2005 年 5 月，李天岩教授在庆祝他 60 岁生日时接受台湾新竹清华大学赠送的“公鸡”礼物

传奇数学家李天岩

丁玖

2005 年是爱因斯坦狭义相对论发表一百周年，为此美国数学会专门设立了“爱因斯坦讲座”，每年请一位世界杰出科学家作公众演讲。2008 年 10 月，在位于加拿大西海岸美丽城市温哥华的不列颠哥伦比亚大学召开的美国数学会与加拿大数学会联合会议上，爱因斯坦讲座的讲者属于年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院英国裔物理学家戴森（Freeman Dyson）教授，但他因故未能赴会，便在 2009 年 2 月的《美国数学会会刊》中发表了一篇题为“鸟与青蛙”的演讲稿。文中他描述了两类伟大的研究学者：鸟瞰大地者与深入探索者，而杨振宁和冯 • 诺依曼分属为之。他又写道：“在混沌领域里，我仅知道一条有严格证明的定理，1975 年由李天岩和詹姆斯•约克（James Yorke）在他们题为‘周期三意味着混沌’的短文中证明的。李 - 约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。”（“In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title ‘Period Three Implies Chaos’. The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.”）

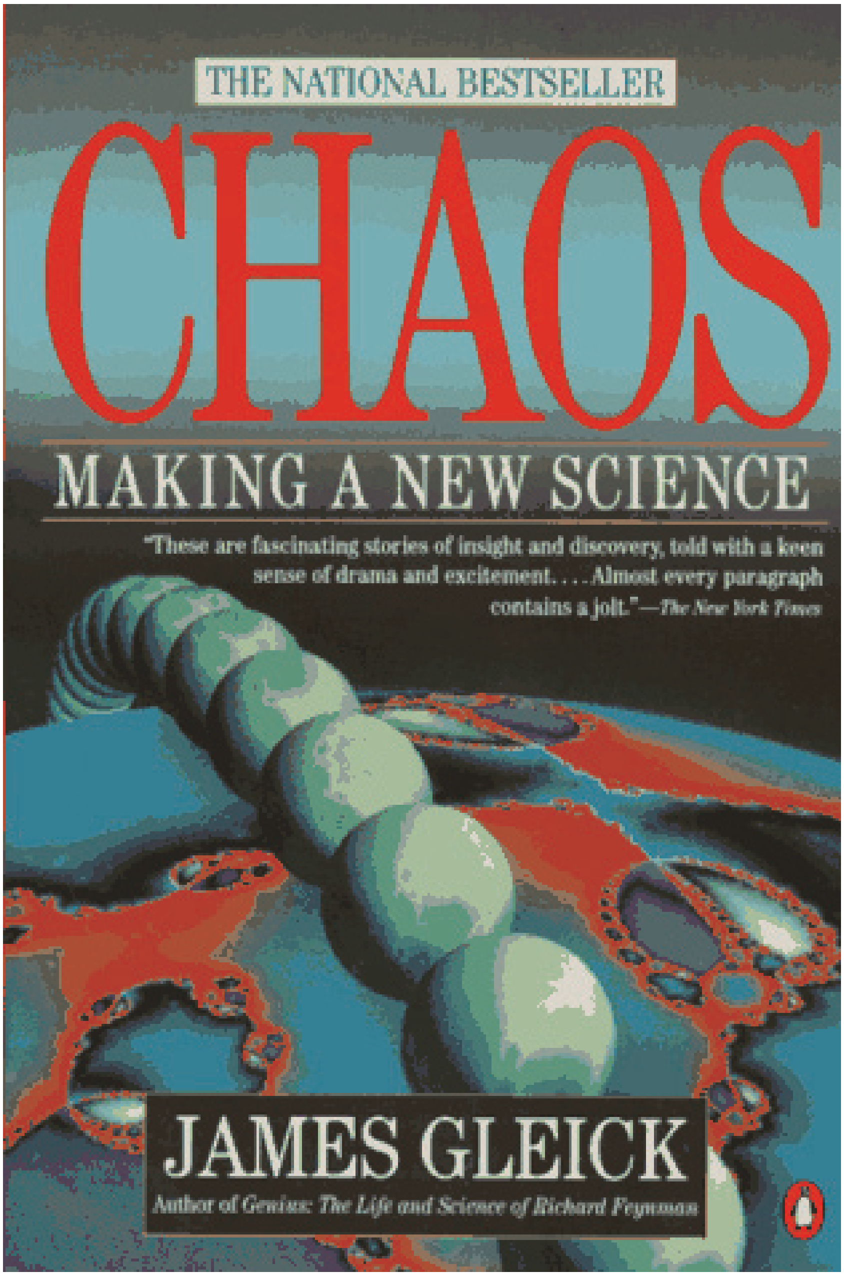
戴森提到的李天岩，是本文的主人公。他祖籍湖南，1945 年 6 月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获医学博士，1934 年回国任教湖南湘雅医

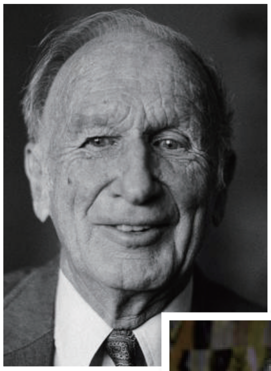
李天岩教授1976年后一直在密西根州立大学数学系工作；目前是这所大学的杰出讲座教授

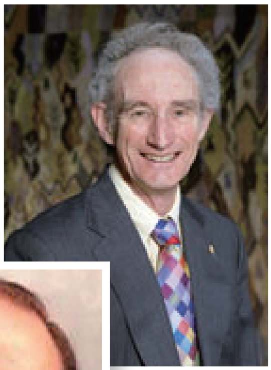
李天岩教授的博士导师 James Yorke（左）

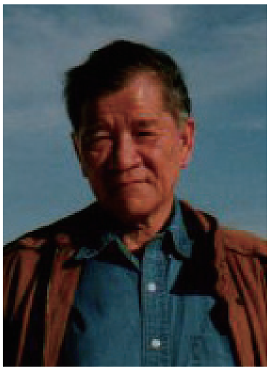
学院，1939年起任福建省省立医院院长。李天岩三岁时随父母及全家定居台湾，在那里接受教育直至大学毕业。他1968年为台湾新竹清华大学数学系第一届毕业生，在按规定服兵役一年后，于1969年赴美国马里兰大学数学系攻读，1974年获博士学位，其论文指导老师就是约克。

李天岩1976年至今一直在美国密西根州立大学数学系任教，其中1976年至1979年为助理教授，1979年至1983年为副教授，1983年至今为正教授，1998年起被赋予杰出讲座教授（University Distinguished Professor）头衔。他1995年荣获美国著名的哥根哈姆（Guggenheim）奖，1996年获密西根州立大学杰出教授奖，同年又获数学系弗莱明杰出教学奖，2002年获台湾清华大学理学院杰出校友奖，2006年获







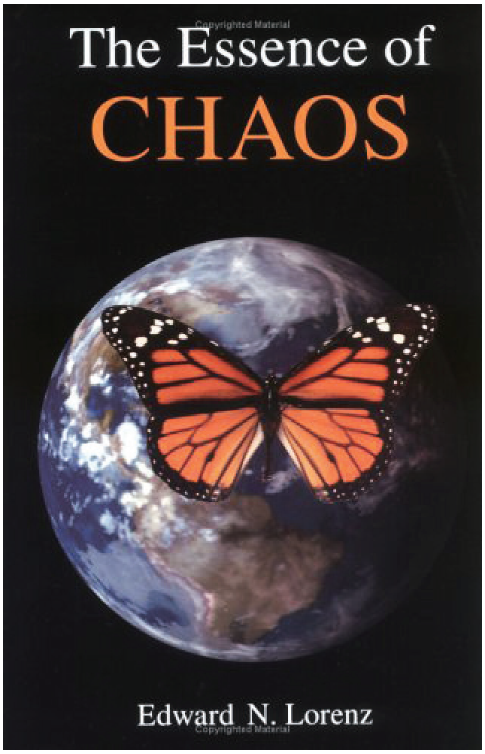


左图：著名科普作者 Gleick 的关于混沌的畅销书；右图：混沌现象和理论的部分重要贡献者 (从上至下)：Lorenz, May, Yorke, 李天岩

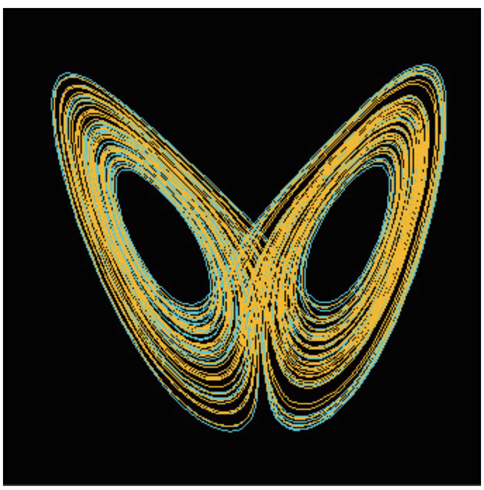
密西根州立大学理学院杰出导师奖。

李天岩曾在应用数学与计算数学几个重要领域中作出了开创性工作，成就非凡。他与约克的上述论文在数学中第一次引入了“混沌”的概念；他对乌拉姆（Stanislaw Ulam）猜想的证明是动力系统不变测度计算理论与算法研究之奠基性工作；他与凯洛格（R. B. Kellogg）及约克关于计算布劳威尔（L. E. Brouwer）不动点的思想和数值方法，开辟了现代同伦延拓算法研究的新天地；他和他的合作者们以及学生们关于代数特征值问题以及一般多变量多项式系统的同伦方法之广泛与深入的研究，为他赢得此领域领袖人物之一的称号。

2005 年 5 月，李天岩的母校台湾新竹清华大学主办了庆祝他六十周岁生日的“数值分析与动力系统国际研讨会”。约克用如下引人入胜的开场白开始了会议的第一个报告：“一百年前，



混沌之父 Lorenz 的著作《混沌及其基本原理》



Lorenz 蝴蝶效应现象

爱因斯坦发表了划时代的四篇论文。三十年前，李天岩完成了三个杰出的工作；它们分别是混沌概念、乌拉姆猜想、同伦算法。”约克如此奇妙的比较，正是对他优秀弟子原创性贡献的绝妙概括。

“周期三意味着混沌”

现今世界上稍微了解一点动力系统的人，无人不知李天岩与约克于 1975 年 12 月在《美国数学月刊》杂志上发表了一篇极其重要的论文“周期三意味着混沌”。该文首创了“混沌”的数学定义，开拓了整个数学界、科学界对混沌动力系统理论和应用研究的新纪元。

在自然科学领域，混沌现象的发现与相对论、量子力学一起被誉称为二十世纪物理学上三大发现。约克对混沌概念有过形象的说明：“生命中充满着小改变导致大变化的情形。例如说车祸，假如人们早个或晚个十秒钟出门，或许就可避免一场车祸。所以小小的改变可以导致很大的变化。”这也是中国成语“差之毫厘谬以千里”之奥秘所在。早在十九世纪末，1936 年被美国数学家贝尔（Temple Bell）在其名著《数学伟人传》中称为“最后的全能数学家”庞加莱（Henri Poincare）在研究天体运动的“三体问题”时已知道其牛顿运动微分方程组的解对初始条件的敏感性。二十世纪六十年代初，美国麻省理工学院气象学教授爱德华 • 洛伦茨（Edward N. Lorenz）用三个简单的常微分方程来计算可用于天气预报的对流扩散问题时意外发现了长期天气预报的不可行性，即俗称的所谓“蝴蝶效应”：北京的蝴蝶翅膀轻轻一拍，两周后可能导致纽约的一场风暴。七十年代初美国普林斯顿大学生物学教授罗伯特 • 梅（Robert M. May）在用“逻辑斯蒂模型”$S(x) = rx(1-x)$ 来研究生物种类的数量变化时惊讶地发现当参数 r 接近 4 时，其迭代序列将变得愈加复杂。在这些科学研究的背景下，混沌的数学概念在李天岩与约克的著名论文中应运而生。

1961 年冬季的一天，具有数学学士学位并在第二次世界大战中为美国空军从事气象预报工作的洛伦茨教授在他麻省理工学院的办公室，与往常一样用 Royal McBee 型的一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。算了一阵子之后，为了下楼喝咖啡，他暂停计算，只是把计算机终端上的数据抄了下来。一小时回来之后当他重新输入刚才的数据，却十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭，面貌全非。开始他以为这仅仅是计算过程中的舍入误差在作怪吧。但严谨而又细心的他经过反复试验、仔细推敲，终于领悟到这一异常现象根植于该微分方程组的内在特性：初值问题解对初始值的极端敏感性。他的发现随即发表在《大气科学杂志》上，成了十年后点燃“李 - 约克混沌”思想火花的火花塞。洛伦茨 2008 年 4 月以 90 高龄去世，他留给世人的“洛伦茨吸引子”成为混沌学领域中最有名的奇异吸引子。

1972 年，美国马里兰大学气象学费勒（Allen Feller）教授将洛伦茨关于气象预测模型的那四篇在气象学家眼里理论性太强、数学味太浓的论文递给了同在流体力学及应用数学研究所的数学系约克教授，认为数学家们也许会感兴趣。约克一生致力于数学与科学的联姻，对英国纯粹数学家哈代（Godfrey H. Hardy）以“无用”引为自豪的纯之又纯“象牙塔”式研究颇不以为然。哥伦比亚大学本科一毕业，他就直奔马里兰大学读数学博士，只因那里有一个流体力学及应用数学研究所这一巨大的“吸引子”。多亏了费勒的引见，约克和他的博士研究生

李天岩才能接触到洛伦茨的论文。他们的确甚感兴趣，约克甚至将文章复印数份，四处寄出，这就是为何坊间曾经流传“约克‘发现’洛伦茨”。

1973 年 3 月的一天下午，当李天岩来到约克的办公室时，约克对他说，“我有个好主意给你！”（I have a good idea for you）这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。那时李天岩正在做微分方程方面的研究，以为他所谓的好主意是关于那方面的高深想法，就半开玩笑地打趣道：“Is your idea good enough for the Monthly?” Monthly 指的是《美国数学月刊》这个一般学生都能看懂的浅近杂志。当李天岩听完约克说完这个好主意后，马上感慨地说，“这将是《数学月刊》一个完美的工作。”因为它所牵涉的语言非常基本。两周后，运用他得心应手的微积分技巧，具体地说，巧妙不断地运用微分学的“介值定理”，李天岩完全证明了这个后来出了名的李 - 约克定理：若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 有一个周期为三的点，即存在三个互不相等的数 a, b, c, 使得函数 f 在 a 的值为 b，在 b 的值为 c，在 c 的值为 a，则对任意正整数 n，函数 f 有一周期为 n 的点，即从该点起函数 f 迭代 n 次后又第一次返回到该点。更进一步，对“不可数”个的初始点，函数从这些点出发的“迭代点序列”之最终走向将是杂乱无章的，无规律可循。当文章写好后，尽管李天岩心里想到的是投给令人尊敬的高等专门杂志，却按照约克的意图，他们寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》。但不久文章被退回，理由是该文过于研究性，不太适合此期刊所重点面向的大学生读者群。但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》。但是，由于李天岩忙于微分方程等方面的博士论文研究，没功夫改它，也不知怎么改。于是乎，这篇文章就在他桌上被束之高阁将近一年。

1974 年是马里兰大学数学系生物数学的“特殊年”。在这一年里，每星期都要请生物数学这个领域里最杰出的学者来校演讲。在五月的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。梅 1959 年在澳大利亚悉尼大学获得理论物理博士学位，两年博士后在哈佛大学从事应用数学的研究，回到母校做到理论物理正教授之后“心血来潮”地对生物学着迷，1973 年成为普林斯顿大学动物学讲座教授，硕果累累。在其最后一天在马里兰的演讲中，梅教授讲了逻辑斯蒂模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许只是计算上的误差所造成的吧。约克听完梅的演讲后，在送他上飞机时，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关于李 - 约克定理的文章给他看。梅看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问。约克从机场回来后立即找到李天岩说，“我们应该马上改写这篇文章。”文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

1985 年夏，李天岩第一次来祖国大陆学术访问，南至中山大学、北至吉林

李天岩(奶奶怀抱者)及母亲(最左边)；前左是哥哥李灵峰，现为台湾清华大学著名物理教授

李天岩 1970 年全家照：前面中间是父母，后排右一为李天岩，后排左一为哥哥李灵峰

1996 年李天岩获密西根州立大学 " 杰出教授奖 " 时与母亲合影

1996 年李天岩获密西根州立大学数学系 " 弗莱明教学奖 " 时与母亲合影

大学，东到杭州、西临西安，中达北京中科院理论物理研究所，马不停蹄地讲解“混沌”与“同伦”。笔者当时刚获硕士学位不久，留校教书，由系领导特批，飞往他讲学第一站广州，首次聆听他极富魅力的讲座。在中国的演讲中，李 - 约克论文的题目“Period Three Implies Chaos”被他形象地翻译成“周期三则乱七八糟”。这篇令他一举成名、篇幅不长的论文，第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义。尽管早在 1964 年，前苏联数学家沙可夫斯基（A. N. Sharkovsky）证明了较李 - 约克定理第一部分更为一般的结果，但只有李 - 约克定理之第二部分才深刻地揭示了混沌现象的本质特征：混沌动力系统关于初始条件的敏感性以及由此产生的解的最终性态的不可预测性。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一，已被引用了超过两千次。

乌拉姆猜想

在日常生活中，概率问题到处可见。波兰科学院院士洛速达（Andrzej Lasota）曾这样讲述概率：当你准备离开一间屋子时，你出门的时侯有可能前后相差一分钟。随着时间的推移，又有不同的概率及可能发生的事要去考虑。比如，有百分之十的可能，你会发生车祸，而被送往医院；或许，有百分之十的机会，你会遇见从未谋面的漂亮女子，而深深为之倾倒，一切皆是偶然。所以事情会演变得愈来愈复杂，所有的事都牵涉到概率。因此约克曾经略显夸张地宣称：数学是概率的一部分。

遍历理论是研究确定性动力系统诸多概率统计性质的一门数学分支，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等于一身的综合性学科，在物理和工程科学中应用广泛，如统计物

理、电子线路，以及与我们日常生活密切相关的无线电话。遍历理论的一个重要论题是关于非线性映射的绝对连续不变测度的存在及计算问题。这一问题又归结为相应的定义在勒贝格可积函数空间上的弗洛比尼尔斯 - 派农（Georg Frobenius 和 Oskar Perron）算子的不变密度函数的存在性与计算问题。对于混沌动力系统，这样的不变测度给出了迭代点的混沌轨道在其相空间中的概率统计分布，并与像熵及李雅普诺夫（Aleksandr Lyapunov）指数这样的重要数学概念密切相关。

1960 年，被誉为美国“氢弹之父”的杰出波兰裔数学家乌拉姆在其名著《数学问题集》中对于计算将单位区间 [0, 1] 映到自己内的非线性映射 S 所对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子的不变密度函数提出了一种数值方法。他将区间 [0, 1] 划分为 n 个子区间，然后他定义了一个 n 乘 n 阶矩阵。这个矩阵的每个元素都是位于 0 与 1 之间的实数。事实上，该矩阵位于第 i 行第 j 列相交处的那个数就是第 i 个子区间中被 S 映到第 j 个子区间中的那些点的比例。计算这个非负矩阵的关于特征值 1 的一个非负左特征向量并将其规范化，就可得到对应于 [0, 1] 区间如上划分的一个逐片常数密度函数。此密度函数可看成弗洛比尼尔斯 - 派农算子的近似不变密度函数。对于这一基于概率想法的数值方法的收敛性，乌拉姆提出了他在计算遍历理论领域现已著名的猜想：当子区间总数 n 趋向于无穷大时，这些近似不变密度函数将收敛于弗洛比尼尔斯 - 派农算子的一个不变密度函数。

1997 年李天岩在儿子密西根大学本科毕业时与之合影

1973 年，洛速达与约克在现已成为研究弗洛比尼尔斯 - 派农算子不变密度函数存在性问题的一篇经典性论文中解决了乌拉姆在其《数学问题集》中提出的一个问题：若 S 为一个足够“简单”的映射（例如逐片线性映射或多项式映射），其导数绝对值不小于 1，将一区间映到自身，则对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子是否存在不变密度函数？事实上，他们证明了如下的“存在性定理”：若区间映射 S 为一逐片二次连续可微映射，且其导数绝对值在该区间上都不小于一大于 1 的常数，则对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子存在不变密度函数。这个定理证明的关键是用到约克发现的关于有界变差函数与其在某一子区间上的限制之变差之间关系的一个不等式。

当李天岩读到上述的洛速达 - 约克定理的证明时，开始了构造计算弗洛比尼尔斯 - 派农算子不变密度函数的数值方法，却全然不知乌拉姆十余年前提出的上述方法。首先他定义了对应于区间 [0, 1] 划分为 n 个子区间的有穷维离散算子。它将每一个可积函数映成在每一子区间上取值为该函数在这一子区间上的平均值的一个逐片常数函数。这一离散算子不光为将可积函数空间投影到逐片常数函数子空间上的迦辽金（Boris Galerkin）投影算子，也是保持积分不变的马尔可夫（Andrey Markov）算子。若将这一算子与弗洛比尼尔斯 - 派农算子复合起来，则该复合算子限制在逐片常数函数全体所组成的子空间上在其标准密度函数基底下的矩阵表示恰为乌拉姆方法中定义的那个非负矩阵。运用下一节所述的布劳威尔不动点定理，李天岩直接证明对每一 个自然数 n，复合算子有一不变密度函数。他进而敏锐地感觉到有界变差函数的概念以及关于有界变差函数序列的经典赫利（E. Helly）引理在证明他独立提出的方法对于洛速达 - 约克区间映射族之收敛性时应起的作用。借助于洛速达 - 约克不等式与赫利引理，他证明了这个逐片常数逼近法的收敛性。换言之，乌拉姆方法产生的近似不变密度函数序列当 n 趋于无穷大时的确收敛于弗洛比尼尔斯 - 派农算子的不变密度函数。