

扩展阅读 >>>

数字图像的压缩与恢复

校对：拟南芥、剃刀、木遥 译者：Armeny

原文作者 Jordan Ellenberg (ellenber@math.wisc.edu), 是威斯康辛大学的数学副教授。原文发表在《连线》杂志三月号上。



2009年早春，斯坦福大学露西尔·帕卡德儿童医院的一组医生把一名两岁男孩送进磁共振成像扫描仪。这个将被我称为布赖斯的男孩身处巨洞般的金属仪器中，看上去是那么弱小无助。他被施以全身麻醉，一根弯弯曲曲的管子从他的咽喉联接到扫描仪旁的呼吸机上。十个月前，布赖斯接受了肝脏移植术，来自捐献者的部分肝脏取代了他自己的已坏死的肝脏。他的康复情况一度不错。但是，最近的实验室测试结果令人担忧，他的身体出现了问题——可能一条或者全部的两条胆管被堵住了。

帕卡德医院的儿童放射科医生施里亚斯·瓦萨纳瓦拉需要高精度的扫描结果来告诉他问题出在哪，但是这将意味着他的小病人在扫描过程中不得不保持绝对静止。哪怕布赖斯只是呼吸了一次，成像结果都会变得模糊。要避免上述情况，就需要进行足够深的麻醉让病人停止呼吸。进行一次标准的磁共振成像检测需要两分钟时间，但如果麻醉师真的让布赖斯在这么长时间里停止呼吸，那么带来的问题将远远超过他肝脏的小毛病。

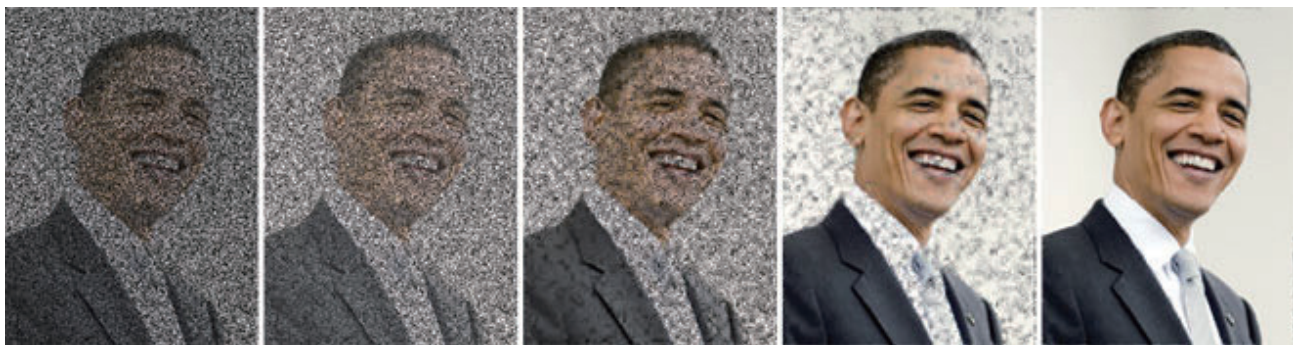
不过，瓦萨纳瓦拉和他的电子工程师同事迈克尔·勒斯蒂格打算使用一种快得多的新扫描方法，名曰“压缩感知”。这种技术可能是当今应用数学界最热门的话题了。未来，它可能会改变我们寻找遥远星系的方式。而现在，这种技术使

得瓦萨纳瓦拉和勒斯蒂格只需要40秒就可以采集到精确重建布赖斯肝脏图像所需的数据。

压缩感知的发现纯属偶然。2004年2月，伊曼纽尔·坎迪斯正在自己的电脑上看着Shepp-Logan图像（译注：这是医学图像处理领域用来进行仿真测试的标准模拟图像，由一些大大小小的椭圆模拟生物器官）打发时间。这幅通常被计算机科学家和工程师用于测试成像算法的标准图像，看起来就像《第三类接触》里那个搞笑地将眉毛扬起的外星人。坎迪斯，斯坦福大学教授，曾在加州理工学院工作过，打算用一个严重失真的模型图像作为磁共振成像仪不能精确扫描而产生的非清晰图像来进行实验。他想到一种名为L1，范数极小化的数学技术可能有助于清除小部分斑痕。他按下下一个键，算法运行起来了。

坎迪斯希望屏幕上的模型图像变得稍微清晰一些。但是，他突然发现用残缺的数据渲染出来的图像是那么细腻完美，对每个细节而言都是如此，这简直就像变魔术一样。太不可思议了。“这就好像你给了我十位银行账号的前三位，然后我能够猜出接下来的七位数字。”他尝试在不同类型的模型图像上重新进行这个实验，结果都非常好。

在博士后贾斯廷·龙伯格的帮助下，坎迪斯提出了一个粗略的理论。之后，他在黑板上向加州大学洛杉矶分校



没经过处理的图（左）和经过处理的图（右）

的数学家陶哲轩介绍了自己的理论。坎迪斯在结束讨论离开的时候觉得陶哲轩对此持怀疑态度，毕竟，图像清晰度的提高也太离谱了。然而，第二天晚上，陶哲轩给坎迪斯送去关于他们之前讨论的问题的一叠笔记。这叠笔记为他们共同发表的第一篇论文奠定了基础。在随后的两年中，他们写了更多文章。

上面介绍的是压缩感知技术的开端，这个数学界的全新领域改变了人们处理大规模数据集的方式。仅仅六年时光，它为上千篇论文提供了灵感，吸引了数百万美元的联邦基金。2006年，坎迪斯在这一领域内的工作为他赢得了奖金值50万美元的沃特曼奖，这是美国国家科学基金授予研究者的最高荣誉。其原因是显而易见的。想象一下，磁共振成像仪可以在几秒钟的时间里生成原本需要花费一个小时才能生成的图像；军用软件截获敌方通信的能力得到极大加强；传感器能够解析遥远际际的无线电波。突然之间，数据的采集、操作以及解析都变得容易了。

压缩感知的原理是这样的：你有一张图片，假设是总统的肾脏图片，这不是关键。图片由一百万个像素构成。对传统成像来说，你不得不进行一百万次量度。而采用压缩感知技术，你只需要量度一小部分，好比说从图像的不同部分随机抽取十万个像素。从这里开始，有大量的实际上是无穷多的方式填充那剩余的九十万个像素点。

寻找那个唯一正确的表示方式的关键在于一种叫稀疏度的概念。所谓稀疏度，是描述图像的复杂性或者其中所缺的一种数学方法。一幅由少数几个简单、可理解的元素（例如色块或者波浪线构成的图片）是稀疏的；满屏随机、散乱的点阵则不是稀疏的。原来在无限多的可能性中，最简单、最稀疏的那幅图像往往就是正解，至少很接近正解。

但是，怎样进行数字运算，才能快速获得最稀疏的图像呢？分析所有可能的情况太费时间。然而，坎迪斯和陶哲轩知道最稀疏的图像是用最少的成分构成的，并且，他们可以用L1范数极小化技术迅速找到它。

这样，在输入不完整的图像后，算法开始试着用大色块来填充空白区。如果有一团绿色的像素点聚集在一起，算法可能会用一个大的绿色矩形填充它们之间的空间；而如果是一团黄色的像素点，那么就用黄色的矩形来填充。在不同颜色交错散布的区域，算法会使用越来越小的矩形或其他形状填充各种颜色之间的空间。算法会重复这样的过程，最终，得到一幅由最少的可能的色块构成的图像，它的一百万像素都已被彩色填满。

并不能绝对保证这样的图像就是最稀疏的，或者正是你所试图重建的那个。但是坎迪斯和陶哲轩已经从数学上证明了，它的错误率是无穷小的。算法运行可能还是需要几个小时，但是，让电脑多跑一个小时，总好过让孩子在额外的一分钟里停止呼吸。

压缩感知已经产生了令人惊叹的科学影响。这是因为每一个有趣的信号都是稀疏的，只要你能够正确定义它的稀疏性。例如，钢琴和弦的乐音是一小组不超过五个纯音符的组合。在所演奏的音频中，只有少部分频率包含有效的音乐信息，而其余大部分频段是一片无声地带。因此，你可以用压缩感知技术从“欠采样”的老旧唱片中重建出当时的乐章，而不用担心失去了由特定频率构成的声波的信息。只需要你手头的材料，就可以用L1范数极小化法以稀疏方式填补空白，从而获得与原音一般无二的旋律。

带着建筑师式的眼睛，顶着略显蓬松的头发，坎迪斯散发着时尚极客的气息。这个39岁的法国人语气温和，但是面对他认为不达标的事情绝不妥协。“不，不，他说的没有道理。”当我提到压缩感知领域某个和他有些观点有着细小差别的专家的工作时，他立刻说，“不，不，不，不。那没有道理，没道理，是错的。”

坎迪斯曾经预见，将来会有大量应用技术是以他的研究成果作为理论基础的。他举例说道，在未来，这项技术不会仅仅用在磁共振成像仪上。例如，数码相机收集了大量信息，然后压缩图像。但是，至少在压缩感知技术可用的情况