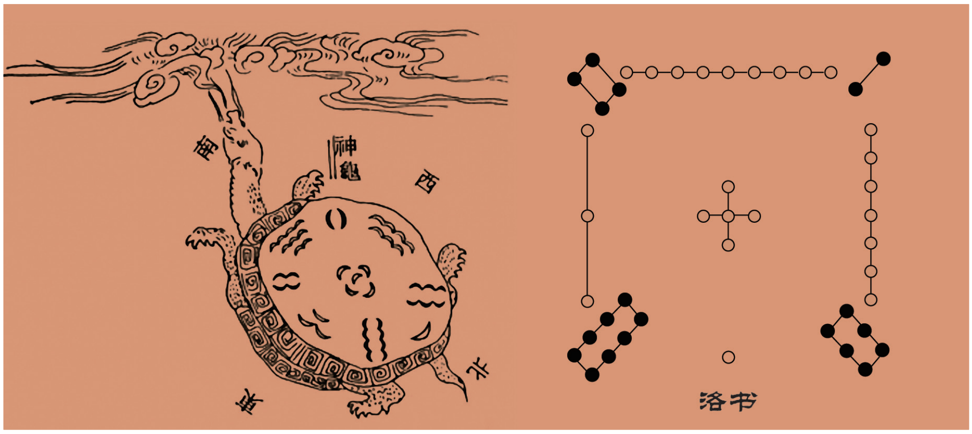
数学与文化交融的奇迹 | 幻方

方开泰　郑妍珣



幻方（magic square）也称为纵横图，就是一个 $n \times n$ 的方阵，按照一定的排列布局，填入 1 到 n^2 的连续正整数，使得方阵各行、各列、两条对角线上的数字之和均相等。这个和数被称之为"幻方常数"（magic constant）或"幻和"（magic sum）。对于任意一个 n 阶幻方，其幻方常数 S 和阶数 n 的关系式是 $S = n(n^2+1)/2$。以一个 3 阶幻方为例，见图 1。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1　3 阶幻方

对于这个 3 阶幻方，各行、各列、两条对角线上 3 个数字之和都等于 15。更一般地，将 n^2 不同的数排成 n 行 n 列并符合行和、列和、对角线和相等的方阵也称为幻方。

"幻方"，对于很多人来说看似陌生，殊不知它早已和我们悄悄地接触过了。

小时候，我们常常沉浸在中国神话故事里，一读到"大禹治水"，就会幻想着自己以后也能成为像大禹一样的治水英雄。传说在公元前 2200 年左右，江河泛滥，洪水滔天，给远古的先民们带来了巨大的灾难。就在此时，灵龟呈洛书，大禹借助"洛书"完成了治水大业，造福了千千万万的华夏子孙。而这"洛书"也就是人类发现的世界上第一个幻方。"洛书"图案，用数字符号翻译出来，就是在 3×3 的方阵中填入了从 1 到 9 这 9 个连续整数，且每行、每列、两条对角线上的 3 个数字之和都等于 15。它不仅产生了深

图 2　灵龟呈洛书

图 3 射雕英雄传之黑沼隐女

刻的易理思想，而且推动了组合数学的发展。静静地看着这个名为“洛书”的幻方，那承载在龟背上的数学，隐隐透着一股神秘感，散发着奇异的美丽。

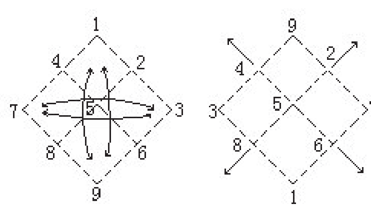
源自幻方的神秘色彩，有着经久不衰的美丽。中国古代南宋杰出数学家杨辉，最早编造出了各式纵横图，从此世界数学史上多了一串串属于幻方的足迹。随着近代组合数学的发展，纵横图一次又一次地展示着它强大的生命力。十八世纪美国最伟大的科学家和发明家富兰克林，创造出一个变化多端的 8 阶幻方，被誉为世界最著名幻方之一，其特殊的性质至今仍有待发现及研究。之后，幻方更是成为全世界瞩目的用以与外星人沟通信息的搭载物，随同旅行者 1 号和 2 号宇宙飞船，开始了人类赋予它寻找外星人的使命。幻方不管走过多久、走到哪里，古代或是现代，东方或是西方，地球上或是宇宙外，总能让人眼前一亮，为这样一个数学与文化交融的奇迹所折服。

金庸先生的武侠小说《射雕英雄传》对幻方更是情有独钟。书中的黄蓉聪明绝顶，曾经在黑沼的小屋中，以寥寥几句话道破了难倒瑛姑十几年的算术题。瑛姑问道：“将一至九这九个数字排成三列，不论纵横斜角，每三字相加都是十五，如何排法？”黄蓉给出了答案：“九宫之义，法以灵龟，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”紧接着，她又说道：“不但九宫，即使四四图，五五图，以至百子图，亦不足为奇。”举手之间，黄蓉又将七十二数的九宫八卦图在沙上画了出来。其实“九宫图”就是一个最小的 3 阶幻方，“四四图”、“五五图”以至“百子图”分别指的就是 4 阶、5 阶以至 10 阶的幻方，而“九宫八卦图”是幻方的一种变形。它们变化万千，像谜一样，暗藏规律、却不全为人所知晓。

“幻方”的背后，藏着一个等待人类去探索的世界。于是，全球东西方各行各业的人不知不觉地聚到了一起，研究幻方，经历着无数次“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的感觉，试图揭开幻方神秘的面纱。

1. 幻方的魅力

在我们中国，这个有着“幻方故乡”之誉的大地上，哺育着一群“幻方迷”。著名的南宋数学家杨辉是从数学角度对幻方进行研究的第一人。他在《续古摘奇算法》中记录了 3 阶幻方洛书的构造方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，思维挺出；戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足”（如图 4）。另外，他列出了“四四图”到“百子图”（杨辉所认为的“百子图”并非 10 阶幻方，后被清初的张潮发现并加以修正，得到真正的 10 阶幻方，称为“更定百子图”），并且对其中 4 阶至 8 阶幻方分别给出阴、阳两图。如何区分幻方的阴和阳，至今尚是一个谜，他如何构造出这些幻方，后人还在猜测。宋代丁易东提出了把 3 阶幻方洛书变化为 6 阶幻圆太衍五十图的方法。明朝的王文素专门研究数字排列组合的纵横图，在他所著的中国



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 4 3 阶幻方构造

第一部珠算书《算学宝鉴》中记载了多种较为复杂的纵横图，除洛书均数图、花十六图是源于杨辉所造的图外，其他均是创新，如连环图、璎珞图、三同六变图等。杨辉、王文素二人的贡献对后来幻方在电子科学上的应用影响非常大。之后的程大位及清朝的保其寿、方中通、张潮分别在他们的著作《算法统宗》、《碧奈山房集》、《数度衍》、《心斋杂俎》中增补了若干种纵横图、研究幻方及其变形，甚至提到了立体幻方。

1956 年，我国古代数学史专家李俨曾对西安元代安西王府旧址掘出的铸有阳文阿拉伯数码幻方的铁板进行了考证，确认其为 6 阶“阿拉伯幻方”，是阿拉伯数字传入我国最早的物证。1996 年上海新博物馆开放，馆中陈列着一块在陆家嘴出土的明代宝玉。玉挂的正面写着：“万物非主，惟有真宰，默罕默德，为其使者。”另一面就是一个四阶幻方（如图 5）。古人认为，奇妙的幻方蕴含着宇宙的法则。一直以来，我国许多学者抱着“探知宇宙法则”的坚定信心，为幻方的研究、发展贡献自己一份力量，1998 年 5 月 5 日中国幻方研究者协会成立。专家、学者们围绕幻方进行研究，不断地攀登一个又一个的幻方高峰。2006 年我国广东汕头大学陈钦梧、陈沐天二人解决了关于幻方的百年历史难题，前后分别成功构造出 13、14、15 阶平方幻方（参图 8（d）及其说明）。紧接着，潘凤雏、高源等中国幻方研究工作者相继攻克了其他阶平方幻方。福州苏茂挺突破性地构造出世界上首个完美平方幻方，向世界宣告了完美平方幻方的存在。

神秘的幻方，也吸引了国外学者们，像著名的数学家费马（Pierre de Fermat）、欧拉（Leonhard Euler）、汉密尔顿（William Hamilton）、霍纳（William Horner）、富兰克林（Benjamin Franklin）、计算机先驱查尔斯•巴贝奇（Charles Babbage）等。第一个 4 阶平方数幻方在大数学家欧拉的手中诞生；霍纳创造出了 8 阶、9 阶的双重幻方（参图 9 及其说明），即幻方各线和、平方和、积都相等；富兰克林创建了一个除具有一般幻方的基本性质外还另有其他特性的 8 阶幻方，被誉为开天辟地的杰作。一个叫费夫曼（G. Pfeffermann）的法国人最早构造出第一个 9 阶平方幻方，随后法国数学家加斯顿•塔里（Gaston Tarry）构造出第一个 16 阶平方幻方，美国幻方专家亨特（J. A. H. Hunter）编出了一个 128 阶三次幻方（参图 10 及其说明），十几年后，加拿大多伦多大学考克斯特（Harold Scott MacDonald Coxeter）教授知晓了一个 64 阶三次幻方。就这样，西方也刮起了一股构造幻方的风暴。一时间出现了由德国人（H. C. Agrippa）阿古利巴（Heinrich Cornelius Agrippa）发明并以太阳系七大行星命名的 3 至 9 阶幻方，由法国人卢贝尔（De La Loubere）所写的欧洲最早论及幻方的著作出版了，更有德国画家杜勒（Albrecht Dürer）把幻方融入了他所创造的版画作品《忧郁》，（如图 6）而刻在十一世纪印度卡杰拉霍（Khajuraho）耆那教神庙石碑上的四阶幻方则被当地人奉为神明的启示，常出现护身符上用于辟邪。

图 5　明代幻方宝玉

图 6　杜勒作品《忧郁》

在中国，有着“幻方大世界”的幻方学术交流网站。同样的，在英国、德国、日本等国家也有着围绕着幻方而成立的学术交流网站。一群来自东西方的幻方迷们，从不同的研究角度出发，有的凭借着电脑强大的计算能力构造出更奇特的幻方，有的试着用线性代数等数学理论去钻研幻方性质，有的埋头苦干、千方百计实现幻方的广泛应用。

2. 多种神奇幻方

旅行者到达一个目的地，可以选择不同路线、不同交通工具。而这一路欣赏到的风景也会有所不同。对于幻方的研究也一样，幻方迷们从不同的点出发，在头脑风暴中，探索、发掘出幻方方方面面的风采。首先让我们来感受一下幻方迷们为幻方奋斗的热情，看看他们如何在没有路的情况下走出了通向幻方的条条大路吧。

(1)定阶幻方的个数

天文数字 人们从最小的一般 3 阶幻方入手，不断挑战更高阶幻方的构造。

弗兰尼克尔（Bernard Frenicle de Bessy）【1】在 1693 年得出结论，认为 4 阶幻方总共有 880 个基本形式，通过旋转与镜面反射，总共有 7040 个幻方。而对于 5 阶幻方总数的估计，理查德•许洛泼尔（Richard Schroeppel）利用计算机编程运算得出结论，认为 5 阶幻方的基本形式有 275305224 个，即 2 亿 7 千 5 百多万个。对 6 阶幻方，皮恩(K. Pinn）和维茨考夫斯基（C. Wieczerkowski）利用蒙特卡洛模拟和统计学方法，得出一个大概的数值估计，其数量在 1.774310×10^{19} 至 1.776610×10^{19} 之间。由此可见，其他阶幻方的多少将是一个多么难以置信的庞大数字。

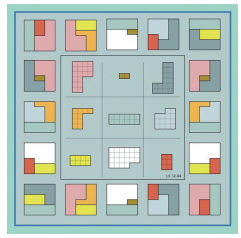
(2)幻方万花筒

推陈出新 幻方迷们通过改变幻方的构成因素，构造出新的形象。

他们第一眼就瞄准了幻方中的数字，想着如果这些数字不再是从 1 到 n^2 的连续正整数，幻方会是个什么样子？图 7（a）则是一个由 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22 的 9 个不连续的正整数构成的幻方。随后，素数幻方、带有负数的幻方、带有分数的幻方也产生了。甚至有时，当数字由几何图案代替，几何幻方也出现了(如图 7(b))。它由九块积木组成。这些积木所含的小方格数恰好分别是 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22，每行每列和两对角线上的方格总数都是 36，而且每条线上的三块积木正好也都能拼成一个 6×6 的矩形。

18	2	16
10	12	14
8	22	6

（a）



（b）

图 7　几何幻方

人们并不满足于幻方这点小小的改变，他们又提出了另外的想法：如果幻方常数不再单指幻和，而是幻积、幻差、幻商等，又会是怎样的呢？所谓的幻积，也就是幻方中各行、各列、两条对角线的数字乘积。而幻差、幻商的定义相对复杂一点，直接举例说明会容易些（如图 8）。图（a）是一个幻积为 216 的 3 阶幻方，而图（b）、(c）分别是幻差为 5，和幻商为 6 的两个 3 阶幻方。图（ b）的

12	1	18
9	6	4
2	36	3

（a）

2	1	4
3	5	7
6	9	8

（b）

3	1	2
9	6	4
18	36	12

（c）

147	1	2562
2982	1533	1886
2426	2058	2163

（d）

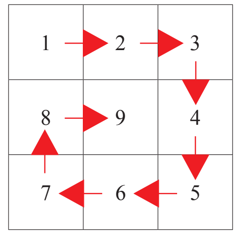
图 8　幻积、幻差、幻商、二次幻方

幻方满足每行、每列、两条对角线上，先求出第二个数减去第一个数的差，再用第三个数减去已求得的前两个数的差，均得到相等的常数 5。类似地，图（c）的幻方满足每行、每列、两条对角线上，先求出第二个数除以第一个数的商，再用第三个数除以已求得的前两个数的商，均得到相等的常数 6。

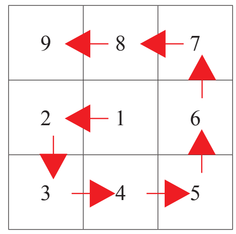
之后，人们又提出了平方幻和（或二次方幻和）等更为刁难人的概念。图 8（d）中的三阶幻方满足各行、各列、两条对角线的数字平方后再相加均相等，等于 147994009，这个数也就是它的平方幻和。更为奇妙的还有双重幻方，同时具有相等的幻和、相等的幻积。图 9 就是霍纳当时构造的八阶双重幻方，幻和为 840，幻积为 2058068231856000。最让人震惊的要属由中国学者高志源和潘风雏创造的 12 阶三次幻方，见图 10，这个幻方同时具有幻和 870，平方幻和 83810，立方幻和 9082800。

精益求精 幻方迷们构造一个又一个美轮美奂、独具魅力的幻方让我们叹为观止。

将 1 至 9 的九个自然数填入 3×3 的方阵中，使其每行、每列、两条对角线上的 3 个数字之和都不相等，并且相邻的两个数在方阵中的位置也相邻，并把这个方阵被称为反幻方。美国当代科普作家加德纳发现了符合条件的唯一两个反幻方（如图 11），仔细看还会发现它们的数字排列酷似螺旋，一个由外向内转，另一个由内向外转。这种自外向内再自内向外的螺旋美感，不禁让我们联想起一首宋代文学家苏轼的回文诗《题织锦图回文》：“春晚落花余碧草，夜凉低月半梧桐。人随雁远边城暮，雨映疏帘绣阁空。”倒读之后是“空阁绣帘疏映雨，暮城边远雁随人。桐梧半月低凉夜，草碧余花落晚春。”这样的回环往复，别有一番风味。



（a）



（b）

图 11 反幻方

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
58	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

图 9

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
117	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	81	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

图 10

还有其他别出心裁的幻方，如同心幻方、复合幻方、部分重叠幻方。图 12 呈现的就是由弗兰尼克尔创造的一个 9 阶的同心幻方，幻和是 369。在这个 9 阶的同心幻方中，套着另外 3 个幻方，分别是 7 阶、5 阶、3 阶的，且幻方中心位置上的数字皆是 41。图 13 是一个 9 阶的复合幻方，即这个 9 阶幻方中 9 个 3×3 的小方阵也是幻方。图 14 是一个 9 阶的部分重叠幻方，其中包括 2 个 4 阶的幻方，2 个部分重叠的 5 阶幻方。