# 神奇的伽玛函数（下）

靳志辉

## 0.4 三封信——伽玛函数的诞生

和斯特林处在同一个时代的另外一位数学家几乎在同一个时间点也在考虑 $n!$ 的插值问题，这个人就是哥德巴赫。哥德巴赫的名字在中国可以说是家喻户晓。由于中国数学家在数论领域的杰出成就，和素数相关的哥德巴赫猜想作为数学皇冠上的明珠就一直吸引着无数中国人的目光。哥德巴赫一生都对数列的插值问题保持浓厚的兴趣，他很早就开始考虑阶乘的插值问题。不过看起来哥德巴赫的思路不同于斯特林，他并不满足于仅仅做近似的数值计算，他希望能找到一个通项公式，既可以准确地描述 $n!$，又能够同时推广到分数情形。不过哥德巴赫无法解决这个问题，幸运的是哥德巴赫交友广泛，和当时许多著名的数学家都有联系，包括莱布尼茨以及数学史中出了最多位数学家的伯努利家族。1722 年他找尼古拉斯 • 伯努利请教这个阶乘插值问题，不过没有取得任何进展。即便如此，哥德巴赫却多年来一直不忘思考这个问题，1729 年他又请教尼古拉斯 • 伯努利的弟弟丹尼尔 • 伯努利，而丹尼尔于当年 10 月给哥德巴赫的一封信中给出了漂亮的解答。

**LETTRE XLVII.**

D. Bernoulli à Goldbach.

Sommaire. Solution du problème de la cycloïde. Terme général de la suite $1+2+6+24+$ etc.

St.-Pétersbourg ce 6 octobre 1729.

J'ai eu l'honneur de vous envoyer une grande lettre, lundi passé, que j'espère que vous aurez reçue. Avant-hier j'ai fait la lecture de votre dissertation qui a fort plû à Messieurs les Académiciens, autant que j'ai pu voir par leur attention, mais la lecture finie, personne n'a rien dit. Voici, Monsieur la solution de votre problème: Soit (Fig. 18.) *ABG* la cycloïde donnée dont le cercle générateur est *BLKR*. Qu'on prenne, dans le diamètre *BK*, deux points *O* et *M* également éloignés du centre *N* et du sommet *B*, et qu'on tire *MSC* et *LOD* perpendiculaires à *BK*; qu'on tire par les points *D* et *C* une droite indéfinie *DCI* dans laquelle on peut prendre un point quelconque *P* duquel on érigera la perpendiculaire $PH = \frac{MS.MK}{DC}$; qu'on tire ensuite, par le point *H*, la ligne *DHE* et l'indéfinie *CHFT*. Du point *D*, il faut tirer, perpendiculairement à *DHE*, la ligne $DU = \frac{OL.OK}{HE}$. Du point *U*, il faut tirer la ligne *UFQ*, parallèle à *DE*, qui coupera la ligne *CHFT* en *F*. Tirez la droite *EF*, et l'on aura le triangle mixtiligne *DCH* = au triangle rectiligne *EFH*. C. Q. F. F.

Puisque les points *O* et *P* sont arbitraires, il y a une infinité de solutions.

Dan. Bernoulli.

*P.S.* Voici le terme général pour la suite $1+1.2+1.2.3+$ etc. Soit $x$ l'exposant du terme, et $A$ un nombre infini, je dis que le terme général sera

$$\left(A+\frac{x}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{2}{1+x}\cdot\frac{3}{2+x}\cdot\frac{4}{3+x}\cdots\cdots\frac{A}{A-1+x}\right)$$

Si au lieu de prendre $A$ infiniment grand, on le fait = à un nombre un peu grand, on aura le terme général à peu près. Si $x=\frac{3}{2}$ et qu'on fait $A=8$ on aura

$$\sqrt{\tfrac{19}{2}}\left(\tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{6}{7}\cdot\tfrac{8}{9}\cdot\tfrac{10}{11}\cdot\tfrac{12}{13}\cdot\tfrac{14}{15}\cdot\tfrac{16}{17}\right)=1,3005$$

par le moyen des logarithmes on approche très vitement. Si $x=3$ et $A=16$, au lieu de 6 on trouve $(6.17\frac{1}{2}.17\frac{1}{2}):17.18=6\frac{1}{204}$.

丹尼尔 • 伯努利 1729 年 10 月 6 日给哥德巴赫的信，第一次给出了阶乘插值的无穷级数表示

丹尼尔解决阶乘插值问题的思路非常漂亮：突破有限，取道无穷！他不拘泥于有限的方式，而是直接跳跃到无穷乘积的形式做插值。丹尼尔发现，如果 $m, n$ 都是正整数，当 $m\to\infty$ 时，有

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{(1+n)(2+n)\cdots(m-1+n)}\left(m+\frac{n}{2}\right)^{n-1}\to n!.$$

于是利用这个无穷乘积的方式可以把 $n!$ 的定义自然地延拓到实数集。例如，取 $n=2.5$，$m$ 足够大，基于上式就可以近似计算出 2.5!。我们并不知道丹尼尔是如何想到用无穷乘积的思路去解决这个问题的，然而他能从有限插值跳跃到无穷，足以显示他优秀的数学才能。无穷在整个数学发展中发挥着巨大的作用，二十世纪之后的数学笔者不敢妄加评论，然而如果说“无穷是数学发展的发动机”，在二十世纪之前，这句评论应该不会过分。历次数学危机是因为无穷而产生，几次数学的重大进展和飞跃也是由于数学家们对无穷更加深刻的认识。

接下来伽玛函数的主角欧拉要登场了。欧拉和伯努利家族有着紧密的联系，他是约翰 • 伯努利（Johann Bernoulli, 1667-1748）的学生，这位约翰也就是尼古拉斯和丹尼尔的父亲。我们应该感谢约翰 • 伯努利，因为他发现并培养了欧拉的数学才能。在尼古拉斯和丹尼尔的推荐之下欧拉于 1727 年在圣彼得堡科学院获得了一个职位。欧拉当时正和丹尼尔 • 伯努利一块在圣彼得堡，他也因此得知了阶乘的插值问题。应该是受到丹尼尔 • 伯努利的思路的启发，欧拉也采用无穷乘积的方式给出了另外一个 $n!$ 的插值公式

$$\left[\left(\frac{2}{1}\right)^n\frac{1}{n+1}\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{2}{n+2}\right]\left[\left(\frac{4}{3}\right)^n\frac{3}{n+3}\right]\cdots=n!. \tag{6}$$

用极限形式，这个式子可以写为

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{(1+n)(2+n)\cdots(m+n)}(m+1)^n=n! \tag{7}$$

欧拉实际上在他的论文中描述了发现上述式子的思路，我们不在此赘述，不过上式成立却很容易证明。上式左边可以整理为

$$\begin{aligned}
&\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots m}{(1+n)(2+n)\cdots(m+n)}(m+1)^n\\
&=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)(n+2)\cdots m}{(1+n)(2+n)\cdots m(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}(m+1)^n\\
&=1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot\frac{(n+1)(n+2)\cdots m}{(1+n)(2+n)\cdots m}\cdot\frac{(m+1)^n}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\\
&=n!\cdot\frac{(m+1)^n}{(m+1)(m+2)\cdots(m+n)}\\
&=n!\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{m+1}{m+k}\\
&\to n!\quad(m\to\infty)
\end{aligned}$$

所以 (6)、(7) 式都成立。

而由于 (6) 式对于 $n$ 为分数的情形也适用，所以欧拉实际上也把 $n!$ 的计算推广到了分数的情形，只是这个计算是用无穷乘积的形式表示的，看起来不够直观。欧拉给的无穷乘积相比丹尼尔的无穷乘积有什么更出色的地方吗？实际上后人的验证指出，

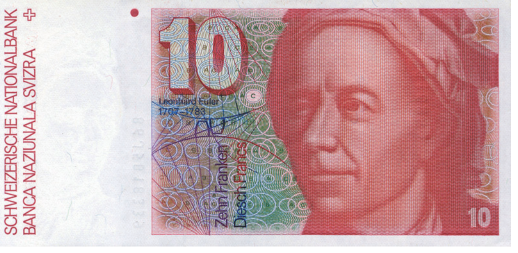
就收敛到 $n!$ 的速度而言，丹尼尔的无穷乘积比欧拉的要快得多，然而欧拉的无穷乘积公式却是能够下金蛋的。欧拉尝试从一些简单的例子开始做计算，看看是否有规律可循，欧拉极其擅长数学的观察与归纳。将 $n=\frac{1}{2}$ 带入 (6) 式，可以得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\right)! &= \sqrt{\frac{2}{1}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{6}{7}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}\cdot\frac{8}{9}\cdots\\ &= \sqrt{\frac{4}{2}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{4}\cdot\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\frac{8}{6}\cdot\frac{6}{7}}\cdot\sqrt{\frac{10}{8}\cdot\frac{8}{9}}\cdots\\ &= \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\frac{8}{7}\cdot\frac{6}{7}}\cdot\sqrt{\frac{10}{9}\cdot\frac{8}{9}}\cdots\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdots}\end{aligned}$$

对比一下根号内的式子和沃利斯公式 (1)，几乎是一模一样，只是最前面差了一个因子 2。欧拉自然非常熟悉沃利斯的工作，基于沃利斯公式，欧拉迅速得到了如下一个令他惊讶的结果

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

欧拉给的无穷乘积满足阶乘的递归式 $T(z)=zT(z-1)$，结合递归式和计算技巧欧拉还计算了其它几个分数，包括 $\frac{5}{2},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{8},\frac{3}{8}$ 等分数的阶乘。在丹尼尔的鼓励之下，欧拉把自己的插值公式以及一些分数阶乘的计算结果写信告知了哥德巴赫，这开启了欧拉和哥德巴赫之间一生的通信交流。两人在接下来的 35 年里连续通信达到 196 封，这些信函成为了数学家们研究欧拉的重要资料，而著名的哥德巴赫猜想就是首次出现在哥德巴赫写给欧拉的一封信中，也正是哥德巴赫激发了欧拉对数论的兴趣。




瑞士法郎上的欧拉

欧拉是具有超凡的数学直觉的数学家，他看到 $\left(\frac{1}{2}\right)!$ 中居然有 $\pi$，对于擅长数学分析的数学家而言，有 $\pi$ 的地方必然有和圆相关的积分。同时由于计算 $\left(\frac{1}{2}\right)!$ 过程中使用到的沃利斯公式，实际上也是计算积分的产物，由此欧拉猜测 $n!$ 应该可以表达为积分形式，于是欧拉开始努力尝试把 $n!$ 表达为某种积分。虽然沃利斯的时代微积分的系统理论还没有发明出来，沃利斯使用插值的方式做一些推导计算，但是沃利斯公式的推导过程本质上就是在处理积分。如果说沃利斯当年只是无心插柳，那后继者欧拉是发现了一片绿洲。受沃利斯工作的启发，欧拉开始考虑如下一般形式的积分

$$J(r,n)=\int_0^1 x^r(1-x)^n\,dx,$$

此处 $n$ 为正整数，$r$ 为正实数。利用分部积分法，很容易证明

$$J(r,n)=\frac{n}{r+1}J(r+1,n-1).$$

重复使用上述迭代公式，最终可以得到

$$J(r,n)=\frac{1\cdot 2\cdots n}{(r+1)(r+2)\cdots(r+n+1)}.$$

于是欧拉得到如下一个重要的式子

$$n!=(r+1)(r+2)\cdots(r+n+1)\int_0^1 x^r(1-x)^n dx. \tag{8}$$

上式中欧拉实际上已经成功地把 $n!$ 表示成了积分的形式。然而这里的问题是 $(r+1)(r+2)\cdots(r+n+1)$ 这个表达式限制了 $n$ 只能为整数，无法推广到分数的情形，欧拉继续研究能否简化这个积分表达式。此处 $r$ 是一个任意实数，有没有办法让 $r$ 从上面的积分式子中消失呢？要让一个量从一个数学等式中消失，数学家们惯用的手法之一就是让这个量取一个极端的值，譬如无穷。欧拉的老师约翰 • 伯努利说过“无穷是上帝的属性”，在通往无穷的路途中，造物主的秘密往往被数学家们窥视。欧拉开始追问：如果让 $r$ 趋向于无穷取值，会发生什么样的情况呢？分析学的大师欧拉开始展现他的计算技巧，取 $r=f/g$，稍微整理一下可以得到

$$\frac{n!}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}=\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int_0^1 x^{f/g}(1-x)^n dx.$$

然后令 $f\to 1,\ g\to 0$，显然上式左边趋于 $n!$，右边会发生什么情况呢？为了简化计算，令 $x=t^h,\ h=\frac{g}{f+g}$，整理之后上式可以变换为

$$\begin{aligned}\frac{n!}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}&=\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}}\int_0^1 h(1-t^h)^n dt\\&=\frac{f+(n+1)g}{(f+g)^{n+1}}\int_0^1\left(\frac{1-t^h}{h}\right)^n dt\end{aligned} \tag{9}$$

当 $f\to 1,\ g\to 0$ 时显然有 $h\to 0$，利用罗必塔法则，我们可以得到微积分中一个熟知的式子

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-t^h}{h}=-\log t.$$

于是对 (9) 式两边取极限，奇迹出现了

$$n!=\int_0^1(-\log t)^n dt, \tag{10}$$

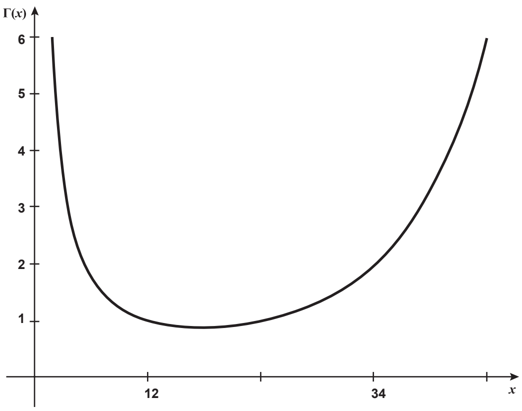
原来的积分式中的 $r$ 消失了，欧拉成功地把 $n!$ 表达为了一个非常简洁的积分形式！对上式再做一个变换 $t=e^{-\lambda}$，就可以得到我们常见的伽玛函数形式

$$n!=\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda} d\lambda. \tag{11}$$

把 (10) 和 (11) 式从整数 $n$ 延拓到任意实数 $x$（包括负数），我们就得到伽玛函数的一般形式

$$\Gamma(x+1)=\int_0^1(-\log t)^x dt=\int_0^\infty t^x e^{-t} dt.$$

1730 年欧拉把他推广得到的 $n!$ 的积分形式再次写信告知了哥德巴赫，由此完美地解决

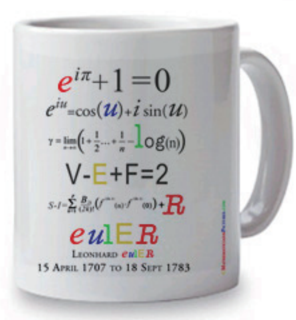



Γ(*x*) 在正半轴的图像

了困扰哥德巴赫多年的插值问题，同时正式宣告了伽玛函数的诞生，当时欧拉只有 23 岁。

虽然会有一些争议，有不少数学人把数学家排名中的头两把交椅划给了欧拉和高斯。欧拉和高斯都是具有超凡直觉的一流数学家，但是欧拉和高斯的风格迥异。高斯是个老狐狸，数学上非常严谨，发表结果的时候却都把思考的痕迹抹去，只留下漂亮的结果，这招致了一些数学家对高斯的批评。而欧拉的风格不同，他的做法是把最基本的东西解释得尽量清楚，讲明引导他得出结论的思路，经常通过经验直觉做大胆的猜测，他的文章中往往留下了做数学猜想的痕迹。拉普拉斯曾说过：“读读欧拉，他是我们所有人的老师。”高斯的评价是：“学习欧拉的著作，乃是认识数学的最好工具。”数学家波利亚在他的名著《数学与猜想》中列举了许多欧拉做数学研究的例子，对欧拉做数学归纳和猜想的方式推崇备至。

欧拉被称为分析学的化身，在分析学中，无出其右者。欧拉的老师约翰 • 伯努利在给欧拉的信中这样评价欧拉的工作：“我介绍高等分析的时候，它还是个孩子，而你正在将它带大成人。”希尔伯特说“分析学是无穷的交响曲”，欧拉显然是无穷分析中最出色的作曲家。欧拉二百多年前写的教科书《无穷分析引论》至今还在不断地印刷，最近也刚刚出版了中文翻译版本。布尔巴基学派的灵魂人物韦伊（André Weil, 1906-1998）1979 年在罗彻斯特大学（University of Rochester）的一次讲演中说：“今天的学生从欧拉的《无穷分析引论》中所能得到的益处，是现代的任何一本数学教科书都比不上的。”




欧拉的数学发现

许多人把数学比作音乐，把欧拉称作数学界的贝多芬。因为贝多芬在两耳失聪之后继续谱写了大量著名的交响曲，而欧拉在 60 岁左右双目失明之后仍然以口述形式完成了几本书和 400 多篇论文，在数学上变得更加多产。数学界从 1911 年开始出版《欧拉全集》，耗费了一个世纪的时间，已经出版了 70 余卷，25000 多页，而这项庞大的出版任务还仍处于未完成状态。

## 0.5 $\Gamma(n)=(n-1)!$ 还是 $\Gamma(n)=n!$ ?

伽玛函数找到了，我们来看看第二个问题，为何伽玛函数被定义为满足 $\Gamma(n)=(n-1)!$ ？这看起来挺别扭的，如果我们稍微修正一下，把伽玛函数定义中的 $t^{x-1}$ 替换为 $t^x$

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt,$$

这不就可以使得 $\Gamma(n) = n!$ 了嘛。估计数学界每年都有学生问这个问题，然而答案却一直有一些争议。

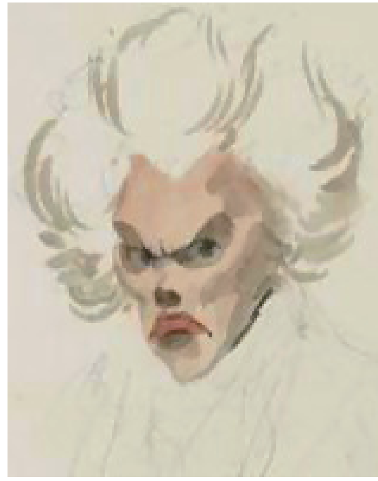
欧拉最早的伽玛函数定义还真是如上所示，选择了 $\Gamma(n) = n!$，事实上数学王子高斯在研究伽玛函数的时候，一直使用的是如下定义：

$$\prod(x)=\int_0^{\infty} t^x e^{-t}\,dt,$$

然而这个定义在历史上并没有流传开来。

欧拉在伽玛函数的推导中实际上引入了两类积分形式

$$\int_0^1 t^x(1-t)^y\,dt, \qquad \int_0^{\infty} t^x e^{-t}dt.$$



勒让德肖像水彩画

现在我们分别称为欧拉第一类积分和欧拉第二类积分。勒让德追随欧拉的脚步，发表了多篇论文对欧拉积分进行了深入的研究和推广，不过在勒让德的研究中，对积分中的参数做了−1 的移位修改，主要定义为

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

和

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

$B(x, y)$ 现在被称为贝塔积分或者贝塔函数。其中 $\Gamma(x)$ 的这个定义选择导致了 $\Gamma(n) = (n-1)!$。实际上伽玛函数中的 $\Gamma$ 符号历史上就是勒让德首次引入的，而勒让德给出的这个伽玛函数的定义在历史上起了决定作用，该定义被法国的数学家广泛采纳并在世界范围推广，最终使得这个定义在现代数学中成为了既成事实。

什么原因驱使勒让德偏向选择 $\Gamma(n) = (n-1)!$ 的定义呢？这成为了一个谜，没有明确的解释。不过有数学史研究者们对欧拉的研究表明，在 1730-1768 年之间欧拉自己在研究第一类积分的时候，实际上就已经对积分中的参数做了−1 的移位修改，从而明确地引入了贝塔积分，而这个修改显然被勒让德注意到了。是什么原因使得欧拉和勒让德在研究他们的积分形式的时候都考虑引入−1 移位修改呢？有数学家猜测一个可能的原因是这两位数学家注意到，如果按照现代伽玛函数的定义，那么有

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{12}$$

$B(x, y)$ 具有非常漂亮的对称形式。可是如果选取高斯给出的 $\Pi(n) = n!$ 的定义，令

$$E(x,y)=\int_0^1 t^x(1-t)^y dt$$

则有

$$E(x,y)=\frac{\Pi(x)\Pi(y)}{\Pi(x+y+1)},$$

这个形式显然不如 $B(x, y)$ 具有对称美，而数学家总是很在乎数学公式的美感的。

还有一个类似的解释是从抽象代数的角度提出的，考虑伽玛分布的概率密度函数

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & x>0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

形成的集合 $\{f_\alpha : \alpha > 0\}$，那么该集合在卷积运算 $\star$ 之下构成一个抽象代数中的半环，即满足

$$f_\alpha \star f_\beta = f_{\alpha+\beta}.$$

而用 $\mathbf{\Pi}(x)$ 的定义则无法得到类似的结果。

另外一个更具启发性的解释也是从抽象代数角度描述的。对伽玛函数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

做一个线性变换 $h{:}t \to ct$，可以得到如下函数

$$\frac{\Gamma(x)}{c^x}=\int_0^\infty e^{-ct}t^x\frac{dt}{t} \tag{13}$$

由此 $dt/t = d\log t$ 可以被看成是乘法群 $(0, \infty)$ 上的一个不变测度，在尺度伸缩变换下满足不变性：

$$\frac{d(ct)}{ct}=\frac{dt}{t}.$$

而 $e^{-ct}$ 对应于群上的一个加法特征 (additive character) $f$，满足

$$f(t+s) = f(t)\cdot f(s),$$

$t^x$ 对应于群上的一个乘法特征 (mulpicative character) $g$，满足

$$g(t\cdot s) = g(t)\cdot g(s),$$

由于积分表示的是求和，所以 (13) 式被看成是乘法群 $(0, \infty)$ 上加法特征和乘法特征混合乘积的累积求和。有了这个分解，只要在抽象代数的有限域上定义了 $f$ 和 $g$ 这两个映射，实数域上定义的 $\frac{\Gamma(x)}{c^x}$ 函数就可以被推广到有限域上进行定义，只是无限求和的积分号变成了有限求和符号$\sum$。进一步，借用贝塔函数和伽玛函数满足的关系式 (12), $B(x, y)$ 也可以完全类似地在有限域中定义出来，而这种推广也将变得具有简洁的对称美。当然，这个理由和欧拉、勒让德的选择无关，而是现代数学家们给出的一个额外的解释。

## 0.6 伽玛函数欣赏

伽玛函数从它诞生开始就被许多数学家追逐研究，包括高斯、勒让德、魏尔斯特拉斯、刘维尔等等，数学家们发现了这个函数大量的奇特性质，在解决许多数学问题的时候是一把利器。伽玛函数作为阶乘的推广，首先它也满足如下的斯特林公式

$$\Gamma(x)\approx\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x-\frac{1}{2}}.$$

另外，伽玛函数不仅可以定义在实数集上，基于复变函数的理论还可以延拓到整个复