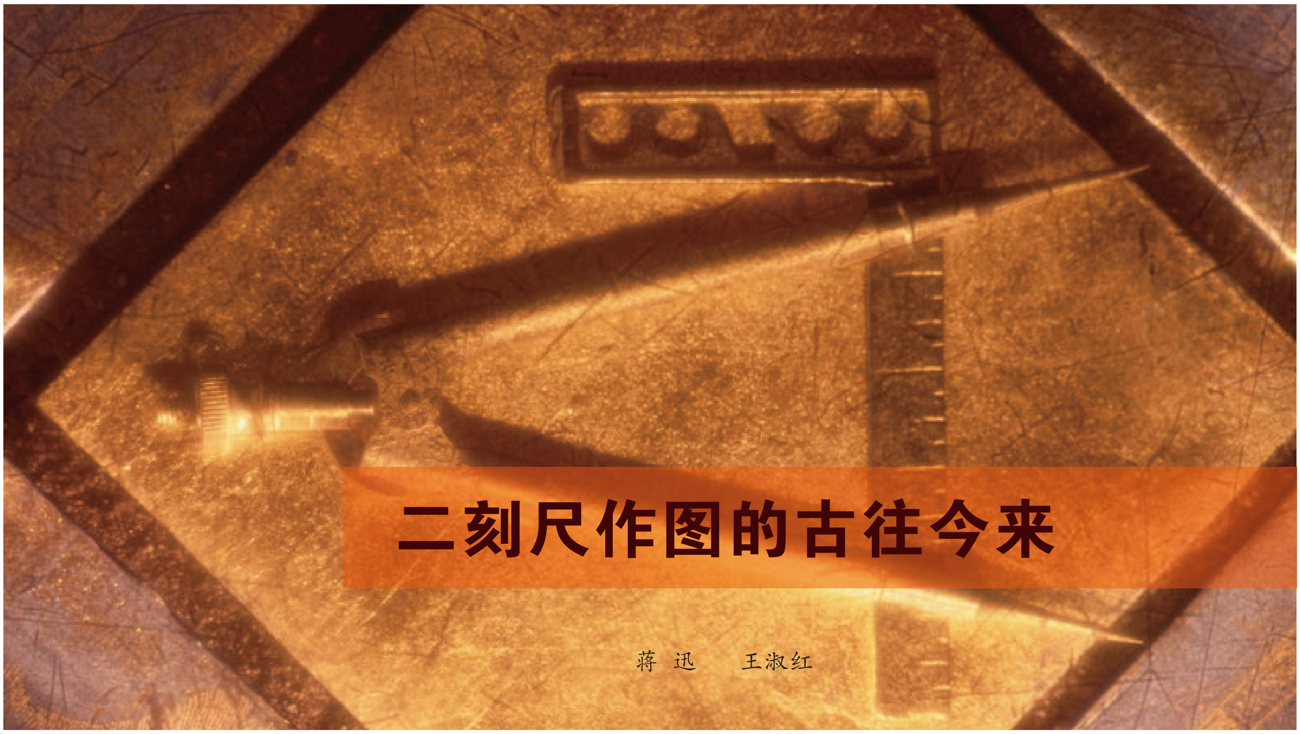


二刻尺作图的古往今来

蒋 迅　　王淑红

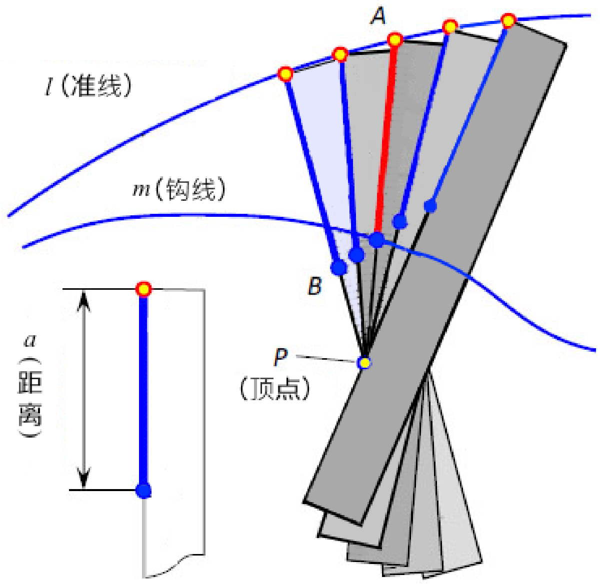
用无刻度的直尺和圆规作图是平面几何的一个重要组成部分。我们都知道，尺规作图源于古希腊时期，已经有两千多年的历史了。我们也知道，尺规作图无法解决所有的几何作图问题。有一则神话故事说，阿波罗神谕必须将正方体祭坛加大一倍才能遏止瘟疫。柏拉图（Plato, 公元前 427- 前 347）受命试图用尺规作图，以失败告终。这样的传说给人一种印象，好像古希腊人无法解决这些问题。事实并不是这样。虽然古希腊人不知道用我们常规的尺规能否解决这类问题，但他们早就知道如何用其他的工具解决这些问题，他们所使用的工具之一就是二刻尺。本文介绍什么是二刻尺，为什么要使用二刻尺，为什么二刻尺后来衰落了，它又有什么新的发展。

1. 什么是二刻尺作图

二刻尺是一种几何作图的工具，它允许直尺有两个刻度，刻度可以在作图过程中标示，因此可以记录长度。顺便说，这是在直尺上划分刻度的来源。所以二刻尺介于刻度尺和尺规作图中的尺之间，既不同于日常使用的刻度尺（有许多刻度），也不同于尺规作图中的尺（没有刻度）。二刻尺有两个刻度，使得二刻尺上有某一固定长的线段。尺规作图中的尺，可视为画无限长的直线工具，二刻尺可看作这种尺上任意添加了点 A 和点 B 两个点（AB 两点长度固定却不确定某一数值）。

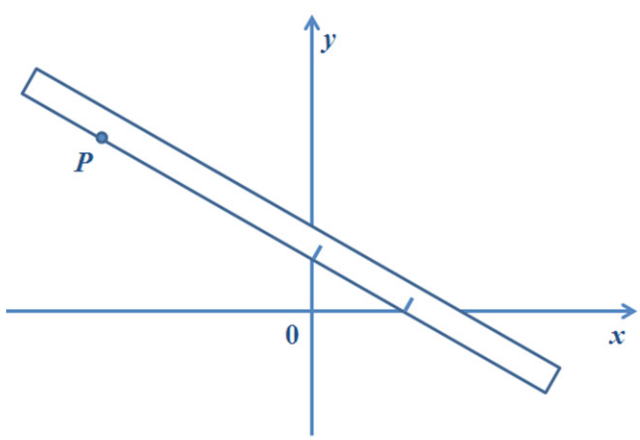
尺规作图中的直尺只能用来将两点连接起来。而二刻尺作图（又称为纽西斯作图，neusis construction）除了可以将两点连接起来，还有以下用法：假设尺上的两刻度距离为 a，有两条线 l、m 和点 P，可以用二刻尺找到一条通过 P

的直线，使得此直线在 l 和 m 的两个交点间的距离为 a。具体做法是：将尺子与点 P（顶点）对齐，并让其中一个刻度（图中黄点）保持在 l 上，慢慢转动尺子，直到另一个刻度（图中蓝点）碰到 m，此线即为所求（图中红线）。



二刻尺作图

把点 P 称为二刻尺的顶点或极点（pole），把 l（直线或曲线）称为准线或滑线（directrix），把 m（直线或曲线）称为钩线（catch line），把长度 a 称为距离 [1]。



二刻尺与直角坐标系

[1] Neusis_construction, https://en.wikipedia.org/wiki/Neusis_construction

当两条线 l 和 m 分别为平面直角坐标系的 x- 和 y- 轴时，二刻尺作图就被用来考虑可构造点问题。我们不做深入的讨论。

2. 为什么用二刻尺作图

仅用圆规和没有刻度的直尺来三等分角、倍立方体和化圆为方是古希腊著名的三大几何作图问题，在历史上名声显赫，吸引了一代又一代数学家的目光。但是经过两千多年的不断耕耘和探索，直至 19 世纪，数学家们利用现代数学的知识才豁然发现这三大问题是不可解的。倍立方体和三等分任意角在 1837 年由法国数学家旺泽尔（Pierre Laurent Wantzel, 1814-1848）证明了不可能只用尺规作图。1882 年德国数学家林德曼（Ferdinand von Lindemann, 1852-1939）证明了 π 的超越性，相当于给出了化圆为方不可能用尺规作图。不过，虽然这些问题无解，但数学家们也未无功而返，因为在此过程中，有诸如发现一些新曲线等科学副产品。从这个意义上来讲，三大几何作图问题有些类似希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）口中的“一只会下金蛋的鹅”。

现在的问题是：三大几何作图问题已经确定不能仅用圆规和没有刻度的直尺作图，那么是否有其他的作图方法可以作出它们的图形呢？答案是肯定的。比如今天我们所讨论的焦点——二刻尺作图。目前已经知道，用二刻尺可以作出三等分角和倍立方体，也能作出一些正多边形。

二刻尺作图与尺规作图一样古老，亦是早在古希腊，数学家们就采用的一种作图方法，但是它的待遇却与尺规作图不同。在古希腊的三种主要作图方法中，它被视为最为低级的作图法，使用不多。因此，它在历史的长河中渐渐淡出人们的视野也在常理之中。不过，当其他作图法不能施展武艺之时，二刻尺却又总被人想起，并发挥一定的威力，似乎充当了一种英雄救人于危难的角色。如此说来，二刻尺不但古老，而且又独具活力，在历史的角落里时不时地绽放出光彩和亮泽。

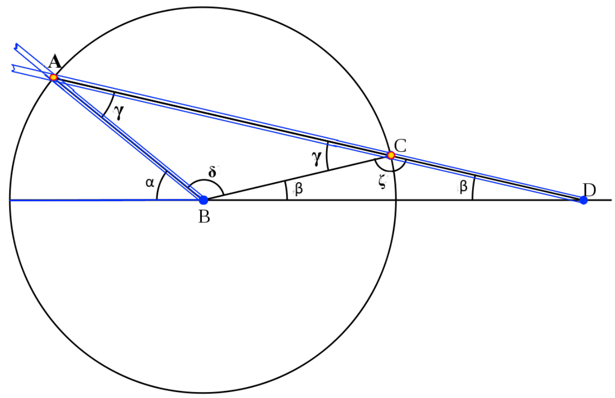
3. 二刻尺作图的应用

我们知道二刻尺虽然在历史上不受青睐，但因其有时在一些不能仅用圆规和直尺作图的几何问题上发挥自身的功用而凸显其价值，因此我们也不能小觑它，比如三等分角、倍立方体以及正 7、9 和 13 边形的作图问题 [2]。

让我们举一个例子来感受一下如何用二刻尺作图。我们看一看如何用二刻尺来完成三等分角。这个想法最早是阿基米德（Archimedes, 公元前 287- 前 212）提出来的。见下图。给定角 α。因为我们很容易做出 30°、60° 和 90° 角，我们不妨假定 α 是锐角。二刻尺上有两个刻度 A 和 B。我们不妨假定角的一个边就是 AB。将另一条边延长，并作一个以 B 为圆心以 AB 为半径的圆。

[2] Eric W. Weisstein, Neusis Construction, From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/NeusisConstruction.html

假定这个二刻尺足够长。让这个尺子一直保持通过点 A，并让点 B 在另一条边上向右移动，直到二刻尺上原来的点 A（黄眼点）移到与圆相交的点 C。这时，点 B（蓝眼点）移到点 D。因此，$CD = AB$。



我们需要证明：$\alpha = 3\beta$. 事实上，

（1）因为角 γ 和角 ζ 是直线上的邻角，所以 $\gamma + \zeta = 180°$.

（2）因为 ΔBCD 是等腰三角形，所以 $\zeta + 2\beta = 180°$.

（3）将两式相减，我们得到 $\gamma = 2\beta$.

（4）又因为 ΔABC 也是等腰三角形，所以 $\delta + 2\gamma = 180°$. 因此，$\delta = 180° - 2\gamma = 180° - 4\beta$.

（5）因为角 α, δ 和角 β 是直线上的邻角，所以 $\alpha + \delta + \beta = 180°$. 从而有 $\alpha + (180° - 4\beta) + \beta = 180°$，即 $\alpha = 3\beta$.

这个证明不是最简洁的。有兴趣的读者可以另辟佳途。也有一些其他的作图方法，可以在麦克安德鲁（Alasdair McAndrew）的论文中找到[3]。他还讨论了用一般的软件（例如 GeoGebra）来实现作图的方法。

一些正多边形可以用二刻尺作图[4]。现在知道，一个 n 边形用二刻尺可以作图的充分条件为

$n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 48, 51, 52, 54, 55,$

[3] Alasdair McAndrew，“Neusis” constructions (2): trisections at http://numbersandshapes.net/2014/12/neusis-constructions-2-trisections/; Alasdair McAndrew. Extending Euclidean constructions with dynamic geometry software, Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics (Leshan, China), 2015: 215-224. 他关于二刻尺的网络文章有 4 篇。对此有兴趣的读者都值得一读。

[4] E. Benjamin, C. Snyder, On the Construction of the Regular Hendecagon by Marked Ruler and Compass, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2014: 409-424.

56, 57, 60, 63, 64, 65, 66, 68, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 80, 81, 84, 85, 88, 90, 91, 95, 96, 97, 99, 102, 104, 105, 108, 109, 111, 112, 114, 117, 119, 120, 126, 128, ... [5]

倍立方问题也可以用二刻尺来实现，我们在本文最后用折纸几何来作倍立方体的例子中有所体现。

4. 二刻尺作图的历史

古希腊崇尚几何，并且以几何为中心，对几何的推崇达到了一个阶段性高峰。其几何成就斐然，从公元前 600 年至公元 600 年间，在希腊半岛、爱琴海区域、马其顿与色雷斯地区、意大利半岛、小亚细亚和非洲北部，缔造了屹立于数学史之林的一座座丰碑。

几何离不开作图，而在古希腊英勇无畏的开拓精神和追求论证数学的严密逻辑思维体系下，他们对作图方法的分类、选择和运用也颇为讲究。最入他们法眼的并不是二刻尺作图方法，而是鼎鼎有名的尺规作图方法。

据数学史家希思（Thomas Little Heath, 1861-1940）的观点 [6]，古希腊数学家和天文学家恩诺皮德斯（Oenopides of Chios, 公元前 440）首先把尺规作图看作比二刻尺作图等级高的一种作图方法。恩诺皮德斯出生于希俄斯岛，但大多数时间在雅典工作。他用尺规作图方法尝试过两种基本平面图形的作图：一是，从一个已知点作一条直线，使其垂直于已知直线；二是，在一条已知直线及其上一点作出与一个已知角相等的角。

与恩诺皮德斯来自同一个岛屿的希波克拉底（Hippocrates of Chios, 约公元前 470- 约前 410）同样既是数学家，又是天文学家。在希俄斯岛时，他可能就已经是恩诺皮德斯的学生。他最初是一位商人，运气不佳，财产被海盗打劫，为了诉讼去了雅典，由此走上不同的人生道路，在雅典成长为一名真正的数学家。他很有可能对尽可能不用二刻尺作图这种原则进行了传播和扩散。据我们所知，希波克拉底是第一个写出系统有序的几何教科书的人，他的书名为《原本》（*Elements*），可惜已经失传。此后至少四位数学家写了同名的《原本》，包括赫赫有名的欧几里得（Euclid of Alexandria, 约公元前 300）[7]。希波克拉底用二刻尺作出了三等分角 [8]。

[5] 这个序列是依据“整数数列线上大全”（OEIS）中的序列 A122254 和 Benjamin 和 Snyder 的新结果得到的。维基百科上的“Neusis construction”条目上说这是一个充要条件。但根据维基百科的另一个条目“Compass-and-straightedge construction”，似乎在 $n = 25$ 和 31 时，答案仍然是未知的。

[6] T. L. Heath. A history of Greek Mathematics, 2 volumes, Oxford, 1921.

[7] 蒋迅，王淑红 . 数学都知道 2，北京师范大学出版社，2016.

[8] Ivor Bulmer-Thomas. Hippocrates of Chios, in: Dictionary of Scientific Biography, Charles Coulston Gillispie, ed. (18 Volumes, New York, 1970–1990: 410-418.)