剩余定理情未了

史定华 陈关荣

中国对数学基本理论的贡献不多,能让国人自豪并以"中国"命名的古老 数学命题可能只有"中国剩余定理"一个,因而我们常常为之余情未了。本文 回顾了剩余定理的简要历史和内容,并谈及其几个经典和最新应用。

同余的发现

古人为安排农事而编制历法,需要计算周期的起点。期间,数学同余概念 的产生和利用反映了中国农耕文明的历史辉煌,而与之相应的诗情画意般的求 解歌诀更体现了深厚的中华文化底蕴。

1"物不知数"问题

这是中国古代一道著名算题。原载《孙子算经》,为卷下第二十六题。

"今有物,不知其数,三三数之,剩二,五五数之,剩三,七七数之,剩二。 问:物几何?答曰:二十三"。

从这里引申出了一个重要的数学概念:同余。例如,"三三数之剩二"概 括了多种"剩二"的情况,譬如5除以3余2,8除以3也余2,说明5和8 除以3时有相同余数。进一步,还能观察到2、5、8、11、……除以3余2的 周期现象,同时可将无限的自然数集合按周期的起点分成0、1、2三个不同的 剩余类, 等等。

上述"物不知数"问题用现代数学式子表达的话,可归结为求

$$x \equiv 2 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{5} \equiv 2 \pmod{7}$$

这组一次同余式的整数解。

《孙子算经》是中国古代一部非常重要的数学著作,成书大约在公元四、 五世纪的南北朝时期,也就是一千五百多年前,其作者生平和编写年代不详。 传本的《孙子算经》共分三卷:卷上、卷中、卷下。"物不知数"问题也称"韩 信点兵"问题(有多个版本)。其中一个版本如下:

传说刘邦建立汉朝之前有一大将韩信,计算士兵数目的方法十分特别。他不 是五个五个或十个十个地数,也不要士兵"一、二、三、四、……"地报数,而 是叫他们排成队伍,依次在他面前列队行进:先是每排三人,再是每排五人,然 后是每排七人。他只将三次队列行进完毕后所余的士兵数目记下来,就知道了士 兵的总数。据此有人认为《孙子算经》的作者是撰写《孙子兵法》的孙武。其实

我国古代天文历法资料表明,一次同余问题的研究受到天文和历法需求的 推动,特别是和古代历法中所谓"上元积年"的计算密切相关。任何一部历法, 都需要一个理想的时间起算点——这个起算点要从制定某部历法的当年往回逆 推,所得起算点称为"上元积年"。在这个起算时刻,日、月、行星都恰好位 于它们各自周期的起点,同时这一天的纪日干支又要恰好是"甲子",如此等等, 故上元积年的推算需要求解一组一次同余式。如南北朝时期祖冲之的《大明历》, 要求上元积年必须是甲子年的开始,而且"日月合璧"、"五星联珠"(就是日、 月、五大行星处在同一方位),同时月亮恰好行经它的近地点和升交点。在这 样的约束条件下来推算上元积年,需要去解10个联立同余式,相当之不容易。

2《孙子歌诀》解法

《孙子算经》解这道题目的"术文"是:"凡三三数之,剩一,则置 七十,五五数之,剩一,则置二十一,七七数之,剩一,则置十五,一百六以 上,以一百五减之;而三三数之,剩二,置一百四十;五五数之,剩三,置 六十三:七七数之,剩二,置三十。并之,得二百三十三,以二百十减之,即 得"。需要注意的是, 古称"106"为"一百六", 而称"160"为"一百六十"。 这里:被3除余1,并能同时被5、7整除的最小数是70好理解;被3除余2, 并能同时被5、7整除的最小数是35,为什么置一百四十?因为题目没有要求 "最小","剩一,则置七十,剩二,置一百四十",按同余运算顺理成章:但为 了答案唯一,故最后都按"一百六以上,以一百五减之"直到最小。

明代著名的大数学家程大位,在他所著的《算法统宗》中,对于这种解"孙 子问题"的方法,还编出了四句歌诀,名曰《孙子歌诀》:

"三人同行七十稀,五树梅花廿一枝,七子团圆正半月,除百零五便得知"。

从数学文化的角度,选择一个问题,离不开教学及历史、诗歌和绘画,特 别是思想与创新。而"物不知数"问题就很符合这些条件。

以数糖果为例进行少儿教学,9粒符合七七数之,剩二,但不符合五五数之, 剩三:16 粒也如此。然而 23 粒符合七七数之,剩二:五五数之,剩三:三三数之, 剩二。故23为一个答案,除法验证128也是答案。然而网上流传的"韩信点 兵"问题(另一版本):他带1500名士兵去打仗,战死四百多。余者,大刀队 3人一排,多出2人;长矛队5人一排,多出4人;弓弩队7人一排,多出6人。 问活着士兵人数?这个版本见图1左下,但这里的问题描述是不对的!正确描 述应该是:余者,3人一排,多出2人;5人一排,多出4人;7人一排,多出 6人。问活着的士兵人数?在此基础上,有些小学生能够准确回答为1049人。

图 1 右图是上海行知小学四年级学生史佳妮按照《孙子歌诀》所作的画。 它诗意盎然宛如一幅国画! 据此"韩信点兵"问题中的

 $x = (2 \times 70 + 4 \times 21 + 6 \times 15) \pmod{105} = 104$



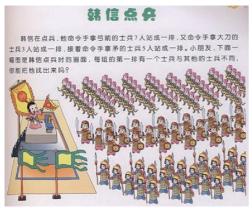




图 1 有关教学的插图

容易接受;但对于104+9×105 = 1049 小学生还得动动脑筋。 该问题的思想与创新将在后面的"同余的情缘"篇中进一步谈及。

3"中国"剩余定理

《孙子歌诀》只能解答用3、5、7作除数的题目,遇到用其他数作除数的算题, 它就行不通了。南宋数学家秦九韶将它推广,在《数书九章》中用大衍求一术 给出了一个系统性解法。德国数学家高斯(K. F. Gauss,公元1777-1855年) 于 1801 年出版的《算术探究》中用现代数学语言把它明确地写成一个定理。

定理: 设整数 $m_1, m_2 \cdots, m_n$ 两两互质,则同余方程组

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

有唯一解

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i t_i M_i \pmod{M} ,$$

其中

$$M = m_1 m_2 \cdots m_n$$
, $M_i = M/m_i$, $t_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ of