戈特洛布 • 弗雷格 (1848-1925)

弗雷格的算术

卢昌海

“算术”一词按《辞海》的定义是“数学中最基础与初等的部分”。《辞海》虽不是学术辞典，但对“算术”一词同时用了“基础”和“初等”两个形容倒是颇为恰当的。相比之下，维基百科（wikipedia）的“算术”定义——“最古老、最简单的数学分支”（the oldest and most elementary branch of mathematics）——仅仅包含了“初等”这一层含义，就略显欠缺了[1]。当然，这也不怪维基百科，因为普通现代人听到“算术”一词所想到的大约确实只是“初等”这一层含义。不过对数学家、逻辑学家和哲学家来说，起码有过一段时间，“算术”一词中的“基础”之意是很被凸显的。

在拙作罗素的“大罪”——《数学原理》[2] 中，曾经提到过“数学基础”（foundations of mathematics）这一研究领域的几个主要流派，并着重介绍了其中的“逻辑主义”（Logicism）流派中的集大成人物罗素（Bertrand Russell），以及他和怀特海（Alfred North Whitehead）合力打造的《数学原理》（*Principia Mathematica*）这座逻辑主义的高峰——虽然高峰过后几乎是悬崖式的衰落。在本文中，我们要介绍逻辑主义的另一位主要人物的著作。此人名叫弗雷格（Gottlob Frege），是逻辑主义的先驱人物之一，兼有数学家、逻辑学家和哲学家的头衔，是德国人[3]。

[1] 由于《辞海》和维基百科都不是一成不变的，在这里注明一下：所引《辞海》的“算术”词条来自 1999 年版；所引维基百科的“Arithmetic”词条则来自截至本文完稿之日的版本。

[2] 参见《数学文化》2015/ 第 6 卷第 2 期。

[3] 有必要说明一下，“逻辑主义”这一名称有可能是德裔美国哲学家卡尔纳普（Rudolf Carnap）于 20 世纪 20 年代末才提出的，弗雷格和罗素虽是逻辑主义的代表人物，自己却并未用过这一名称，其主要工作也远远早于这一名称的流行。

逻辑主义的核心目标是将数学约化为逻辑。 不过数学实在是一个过于庞大的体系，虽然在弗雷格从事逻辑主义研究的年代（19 世纪末和 20 世纪初），数学体系的庞大跟如今相比还差得很远，却也早已不是弗雷格所能驾驭的，而且当时逻辑本身的表达力也还相当有限。因此弗雷格将研究的目标指向了在他看来具有基础地位、同时又相对简单的部分——算术，试图将算术约化为逻辑 [4]。

不过在介绍弗雷格的逻辑主义研究之前，有一个问题值得首先探讨一下。

这一探讨的背景是：在数学的诸多分支中，算术通常是被视为最可靠，甚至具有先验真理性的分支。这一观点的渊源可远溯至古希腊，比如毕达哥拉斯（Pythagoras）学派的“万物皆数”（all things are numbers）及亚里斯多德（Aristotle）所主张的算术先于几何。 近代数学家也表示过类似的观点，比如“数学王子”高斯（Carl Friedrich Gauss）就曾表示过算术比几何更可靠，是“以纯粹先验的方式成立的”（stands purely a priori）；德国数学家克罗内克（Leopold Kronecker）则说过一句很著名的话：“整数是上帝创造的，其余一切都是人类所为”（God made the integers, all else is the work of man）。由于传统的算术是以整数为研究对象的，因此克罗内克这句话相当于说“算术是上帝创造的”。

所要探讨的问题则是：既然人们对算术的可靠性已有如此高的评价，为何还有人“不知足”，试图将算术约化为逻辑？

这种本质上是探求动机的问题当然很难有确切答案，不过从数学史的角度看，将算术约化为逻辑的一个重要动机来自分析领域，其中包括德国数学家魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass）、戴德金（Richard Dedekind）等人对分析基础的研究，那些研究在当时是有一定争议的——比如弗雷格就对那些研究不太感冒，而解决争议的思路之一乃是从算术基础入手。不过更重要的动机则来自一个更具争议性的理论——从 19 世纪 70 年代开始发展起来的德国数学家康托尔（Georg Cantor）的无穷集合理论。康托尔的无穷集合理论部分地也是源自对分析基础的研究——比如试图证明函数傅利叶级数（Fourier series）展开的唯一性等。这一引发高度争议的理论由于含有基数（cardinal number）、序数（ordinal number）这两个具有整数性质的概念，使得算术基础问题也在一定程度上被牵扯进了争议之中。

而算术基础一旦成为问题或陷入争议，则将算术约化为逻辑就成了一条显而易见的出路，因为可靠性能跟算术相提并论的体系实在少之又少，这其中逻辑作为推理本身的基础，几乎称得上是可靠性的“底线”，因此算得上是首选。

[4] 弗雷格的逻辑主义研究始终未能超越这一初始目标，比如他始终未能将逻辑主义推向实数与几何——这其中实数是他一度认为应被归化为逻辑，后来却放弃了的；几何则完全不在他认为应被归化为逻辑的数学之列 (从这个意义上讲，弗雷格的逻辑主义是不彻底的)。说到这个，顺便也提一下， 在弗雷格之后，罗素和怀特海终于将实数纳入了逻辑主义的框架之中，但付出的代价十分沉重， 是通过在逻辑中引进诸如可化归性公理 (axiom of reducibility) 那样饱受批评的新公理，而几何则哪怕在罗素和怀特海的庞大体系中也未能涵盖（虽然他们一度希望能涵盖）。对这些后续发展感兴趣的读者可参阅拙作：罗素的 “大罪”——《数学原理》。

另一方面，逻辑本身在当时也已取得了一些重要进展，比如英国数学家布尔（George Boole）在 19 世纪中叶发展了所谓的布尔代数（Boolean algebra）。那些进展的本意其实是将逻辑数学化，但对于将数学逻辑化这一反向的尝试显然也不无裨益，因为它们显著增强了逻辑的表达力。

弗雷格研究逻辑主义的早期成果之一，是一本哲学色彩较浓的小册子——《算术的基础》（*The Foundations of Arithmetic*），出版于 1884 年。在这本小册子中，他开宗明义地提到了来自分析领域的挑战："对函数、连续性、极限、无穷这些概念有更精确地加以界定的必要。对早已被科学所接受的负数和无理数的可靠性必须作更仔细的考察"，"沿着这些道路，我们必然会逐渐遇到构成整个算术基础的数的概念，以及适用于正整数的最简单的命题。"[5] 这与上面提到的来自分析领域的动机是一脉相承的。

在《算术的基础》中，弗雷格提出了一种用逻辑关系定义自然数的办法。具体地说，他通过引进"属于概念 F 的数"（the Number which belongs to the concept F）这样一种表述方式，将（自然）数约化为了（逻辑）概念。 在此基础上，他进一步将"两个数相等"约化为它们所从属的概念之间的一种（逻辑）关系——被称为等数关系（equinumerate）。两个概念具有等数关系——简称为等数——被定义为满足两个概念的对象（object）之间存在一一对应（one-one correlation）[6]。这种定义"两个数相等"的方式被弗雷格回溯到苏格兰哲学家休谟（David Hume），从而逐渐被称为了"休谟原理"（Hume's principle）。

接着，弗雷格开始定义具体的自然数：0、1、2……（弗雷格的自然数是从 0 开始的）。 由于数的定义已被约化为概念，因此定义一个数等同于为这个数找到一个合适的概念。弗雷格用来定义 0 的概念是"不等同于自身"（not identical to itself）。由于所有概念都等同于自身，因此不存在任何满足"不等同于自身"这一概念的对象，这确实符合我们对 0 的期待。

弗雷格用来定义 1 的概念是"等同于 0"。 由于只有 0 等同于 0，因此满足这个概念的对象只有一个，从而确实符合我们对 1 的期待。

弗雷格用来定义 2 的概念是"等同于 0 或 1"，或者等价地，"从属于由 0 和 1 组成的自然数序列"。显然，只有 0 和 1 这两个对象满足这一概念，从而确实符合我们对 2 的期待。

更一般地，在 $\{0,\cdots,n\}$ 这一"到 n 为止的自然数序列"已被定义了的前提

[5] 据《算术的基础》一书的英译者奥斯丁（J. L. Austin）的注释，弗雷格此处提到的"数的概念"中的"数"乃是指"基数"。

[6] 熟悉集合论的读者不难看出弗雷格的术语与集合论之间的某种平行性："概念"对应于集合，"满足概念的对象"对应于集合的元素，"属于概念 F 的数"则对应于集合 F 的元素个数——也就是集合 F 的基数。不过尽管从集合论的角度看不足为奇，在哲学领域中弗雷格的表述却有很大的新颖性（事实上集合论本身的某些发展在当时也是新颖的），他对"概念"和"对象"的区分与他的若干其他贡献一同，使他成为了分析哲学（analytic philosophy）和语言哲学（philosophy of language）的创始人之一。