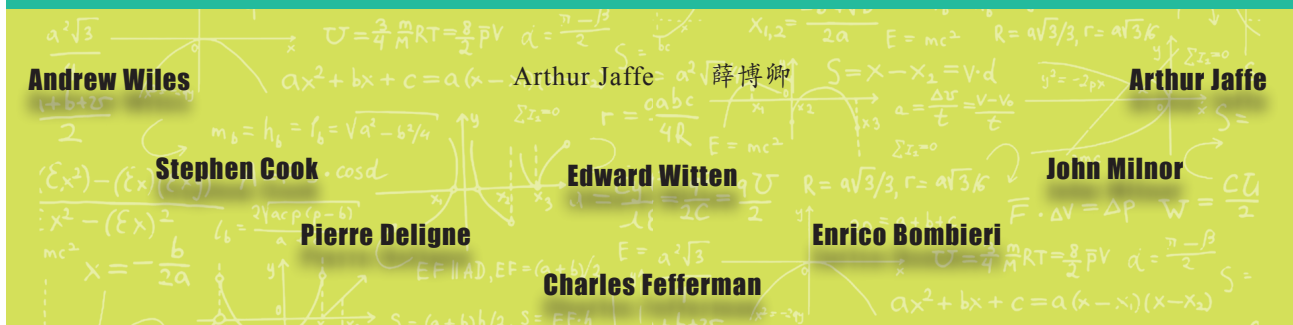


千禧年大奖难题之始与未终



千禧之际，万象更新，数学界的柔风细雨中惊响起初夏的雷鸣。七个重要的数学问题！七百万美元的巨额奖金！克雷数学研究所公布的大奖难题响彻巴黎大街小巷的云霄，引人惊鸿一瞥，这一天，正是2000年5月24日。此事缘何而起？它又将何去何从？本文将只言片语，讲述些许这注定不凡的往事。

“千禧年大奖难题”的诞生与克雷数学研究所¹的成立密不可分。1998年4月15日的晌午时分，哈佛教师活动中心古朴的餐厅中萦绕着人们的莺莺絮语。此时，克雷先生²首次向我³提起了创建一个软件基金会的想法，他部分拥有一家濒临倒闭的公司，正适合改建成基金会。“这是一个争取税收优惠⁴的好方法，但并不是花钱的最佳途径。”我略作沉思提出了自己的建议，“倘若你愿意为数学作一番事业，我必鼎力相助！”克雷先生眼眸一亮，他素来是科学和教育的大力赞助者。大约六周以后，他作出重大决定：另外设立一项基金会，专门支持数学。正所谓兵马未动，粮草先行，这使我备受鼓舞。

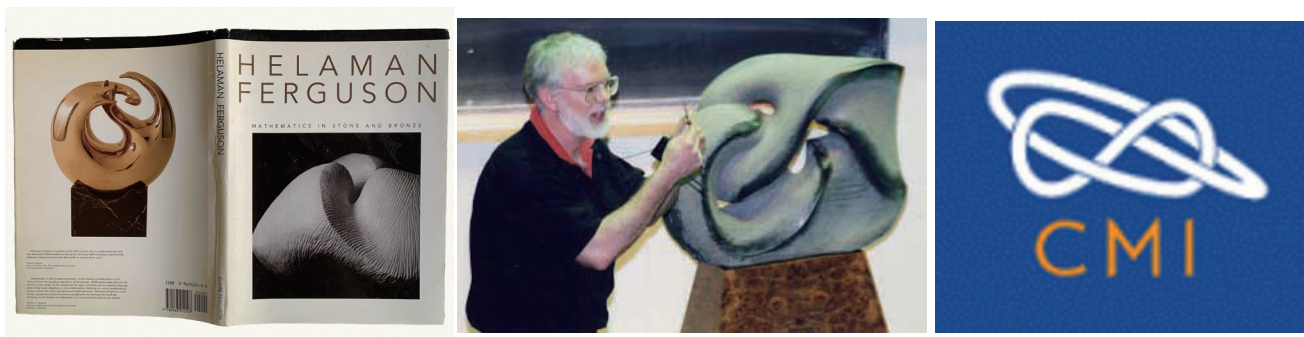
经过深入的思考和充分的准备，我提交了十项可行的项目方案，包括其中的第八项——“千禧年大奖”计划。当时，“千禧年”这个话题在全球如火如荼，我对这一计划青睐有加。而阿兰·孔涅(Alain Connes)、安德鲁·怀尔斯(Andrew Wiles)和爱德华·威滕(Edward Witten)这几位享誉世界的数学家们也陆续

¹ 克雷数学研究所 (Clay Mathematics Institute) 是一个私人非营利机构，于1998年由Landon T. Clay先生资助创立，由本文第一作者Arthur Jaffe教授担任创始会长，致力于促进和传扬“数学思想的美、力量与普适性”(the beauty, power, and universality of mathematical thought)。

² 克雷 (Landon T. Clay, 1926-2017)，美国投资家，1950年毕业于哈佛大学，主修英语文学，他是科学和教育的大力赞助者，克雷数学研究所创始人。

³ 本文中的“我”均指代第一作者Arthur Jaffe，数学物理学家，美国科学院院士，时任美国数学会会长，是克雷数学研究所成立和“千禧年大奖难题”设立的主要筹划人。

⁴ 根据美国法律，缴税时可减免给独立基金会捐赠金额的三分之一。



(a) 海拉曼·弗格森作品集

(b) 弗格森先生和“8字结”阴雕

(c) (现) 克雷数学研究所标志

加入了这项事业。同年9月25日，克雷数学研究所成为注册在美国特拉华州的基金会。第一次董事会议⁵在11月10日召开，通过了这十个项目，并选举出科学顾问委员会。

1999年5月10日是看似寻常却又无比奇妙的一天，大约450名数学家“不经意间”相聚在麻省理工学院，而克雷数学研究所的落成典礼也在节日般的气氛中举行了。当天，著名艺术家兼数学家海拉曼·弗格森(Helaman Ferguson)先生⁶亲手揭开他的杰作——一个阴雕的“8字结”雕塑(见图b)——它由花岗岩制成，足足有半吨重。在纽结理论中，“8字结”是一个非常重要的范例⁷，因而它被定为了克雷数学研究所的标志(见图c)。克雷数学研究所的主要目标和宗旨为：促进和传播数学知识；在广大科学工作者中宣扬数学领域的新发现；鼓励具备天赋的年轻人从事数学职业；以及对数学研究中的非凡成就或巨大进步进行官方认证。伴随着一系列的公众讲座和相关活动，克雷数学研究所正式拉开了历史的一幕。

“千禧年大奖难题”的诞生还与一百年前珍贵的历史遥相呼应。1900年8月8日，希尔伯特⁸在巴黎举行的第二届国际数学家大会上宣布了十个问题，并在1902年正式出版了二十三个问题，它们被合称为“希尔伯特问题”，引领了二十世纪数学的诸多研究方向。需要说明的是，“千禧年大奖难题”的设立初衷与“希尔伯特问题”截然不同，并非是为了预测或影响新世纪数学的发展倾向，而仅仅是为了彰显一些未解的难题，以吸引大众对数学的关注。当然，我们希望把2000年春夏和法国巴黎作为这些难题正式公布的时间和地点，以此来表达对希尔伯特这位数学巨匠最诚挚的敬意。

⁵ 共有四位参会者：三位董事克雷夫妇和我，以及秘书 Barbara Drauschke 女士。

⁶ Helaman Ferguson: Mathematics in Stone and Bronze (见图a) 一书中收录了许多海拉曼·弗格森先生的杰作，包括多种纽结的雕塑。

⁷ Figure eight knot, 它是唯一的交叉数为4的纽结，并且是素纽结。

⁸ 大卫·希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)，德国数学家，是十九世纪及二十世纪前期最全面且最具影响力的数学家之一，提出了大量的思想观念(例如不变量理论、公理化几何等)，并将哥廷根大学建设为世界数学中心。

关于第八项方案的最初计划是通过竞争角逐的方式确立大奖难题，计划书的原文是这样写的：“先择取五十个科研问题，成文并出版成书籍，再从中选取数个‘特别问题’，数量不超过十二个。”一位参与者显得忧心忡忡：“如果公开选取这十二个特殊问题，很容易引发选取流程的政治化倾向并引起争议。”我们最终决定由克雷数学研究所的科学顾问委员会直接决定问题择取的事宜。该委员会的成员正是前文所提及的孔涅、怀尔斯、威滕和我。这时，时光的脚步已然悄无声息地来到了1999年11月，我们猛然发现，距离2000年春夏只剩数月，只有创造奇迹，才可能顺利达成愿景。

难题的数目其实并没有预先设定，我们仅仅认为十二个是一个合理的上限。因为数量足够少，令人得以专注其中；数量亦足够多，使得选题不至于太狭隘。而具体的数目将取决于委员会的工作进程，当时的我们亦无法预测大奖难题的最终面貌。一开始，每个委员会成员都提交了一份清单，所有清单上都赫然出现了两个名词——“黎曼假设”和“庞加莱猜想”。毋庸置疑，它们入围了。接着，委员会召开了频繁的电话会议，我们兴致勃勃地讨论起各式各样的问题，取得一致意见后，便把一个难题加入到名单中，或者用它替换掉一个已在名单上出现的难题。要知道，讨论这些艰深的数学问题并作出合适的判断是一个充满艰难坎坷的过程，这耗费了我们大量的时间和精力。当遇到一个超出我们专业的问题时，我们会联系相关专家进行咨询。我们努力地让大奖难题不特别集中在某一个数学的领域，也正是由于这个原因，许多同样好的问题遗憾地遭到了淘汰。慢慢地，讨论的效率变得越来越低，再往名单中增加或替换单个难题都变得举步维艰，而我对时间进度也越发担忧。当我们在电话中难以取得进展时，我当机立断，宣布讨论环节结束。这时，刚好列出了七个难题。数字“七”或许有很多特殊的含义，然而这一次，它的出现只因天意。

另一个重要的议题是：这些问题该以什么形式提出？比如，庞加莱猜想可被推广为瑟斯顿（Thurston）几何化猜想，而黎曼假设与朗兰兹纲领有关。委员会作出决定：难题都⁹尽可能地以最简单明了的形式呈现。最后，我们还决定了由哪些专家写下难题的具体陈述。这些专家临危受命，在极短的时间内完成了高质量的工作。他们写下的命题以及相关的综述性短文及时地通过了其他专家的审阅、修改及委员会的最终检验。

七个难题如下，顺序依照难题英文名称的字母序排列，括号中所列的是写下难题之具体陈述的作者姓名：

- (1) Birch-Swinnerton-Dyer 猜想 (Andrew Wiles)
- (2) Hodge 猜想 (Pierre Deligne)
- (3) Navier-Stokes 方程解的存在性与光滑性 (Charles Fefferman)
- (4) P/NP 问题 (Stephen Cook)

⁹除了后文中的难题(7)以外。

- (5) 庞加莱猜想 (John Milnor)
- (6) 黎曼假设 (Enrico Bombieri)
- (7) Yang-Mills 规范场存在性与质量间隙 (Arthur Jaffe 和 Edward Witten)

这七个难题中，黎曼假设是唯一一个在“希尔伯特问题”里就出现过的，已历经一百多年却仍然巍然屹立。它在山顶的风景如此令人迷醉，山间的雾霭却乱人眼眸，人们手执大斧披荆斩棘，却始终无法找到一条通往山巅的清晰途径。

需要特别强调的是，这是七个（当时）未解决的重要问题，但并非“最”重要。无论是揭开古老的未解之谜，还是发现全新的研究方向或领域，都无比艰难。由前者所取得的成果较易为当世之人（尤其是数学家们）所敬仰，而后的成就往往需要经过更多的时间积淀才能被世人所理解和接受，两者都难能可贵。

关于获奖的规则细节，以下几条是原则性的：获奖者必须证明或证否其中一个难题；解答不能直接提交给克雷数学研究所，需在正式的学术期刊上发表；克雷数学研究所将在解答被发表两年之后启动审查程序；对于合作取得的成果，或是重要的先验想法，时任董事会将根据科学顾问委员会的建议来决定¹⁰ 他们应分享的荣耀。

奖金金额的设定过程则是另一个非常有趣的故事。我的原始想法是设立滚动奖池制：基金会每年向奖池中投入一定量的金额，当一个大奖难题被解决时，获奖者们将分享的奖金为

$$\text{奖金} = \frac{\text{当时的奖池总额}}{\text{当时剩余的未解决难题数量} + 1}$$

按照这样的设置，如果一个难题很快就被攻破，它产生的奖金是相对少的。如果一些难题一直悬而未决，奖池将会越滚越大，最后变成超级巨奖。恰好在2000年春的一份《泰晤士报》中，英国费伯出版社（Faber&Faber）为了提高一本书的关注度，为解答哥德巴赫猜想¹¹ 提供了一百万美元的奖金。在当时，百万美元可是相当大的一笔财富。然而，出版商只给这笔大奖设置了两年的有效期，他们并没有预备那么多钱，而是就此奖金向劳合社（Lloyd's of London）购买了保险。对一个古老的数学难题而言，两年的时间如过眼云烟，该出版商用极低的风险换得了人们的极大关注。在这样的背景下，我提议为这七个大奖难题预设七百万美元的总奖金。略微遗憾的是，奖池通过投资逐年递增的提议被克雷数学研究所的律师驳回了。受限于筹备时间的仓促，我们对奖池问题没能进一步地协商，这就是七百万美元大奖的由来。

¹⁰ 在当时，第一作者是董事会中唯一的数学家。

¹¹ 哥德巴赫猜想（Goldbach's conjecture）是数论中存在最久的未解问题之一，其表述为：“任一大于2的偶数可以表示成两个素数之和。”