

Butterfly Effect and Chaos

蝴蝶效应 和混沌故事



陈关荣

导语

“人们经常都会看到，纯粹理论研究的一点点成果，也许在很长时间之后，会导致连做该纯理论研究的科学家都始料不及的实际应用。”

——爱德华·诺顿·洛伦茨

他不是文学家，却在不经意间留下了一个脍炙人口的新成语：蝴蝶效应。

他是麻省理工学院气象系已故教授爱德华·诺顿·洛伦茨 (Edward Norton Lorenz, 1917年5月23日 - 2008年4月16日)。

洛伦茨是一位气象学家，研究大气物理，曾孜孜不倦地去探索多年来被学术界认为“算不上是科学”(less than science)的“长期天气预报”。气象学家甚至普通人都知道，长期天气预报是不精确的：谁知道明年的今天这个地区的天气会怎么样呢？洛伦茨的伟大贡献之一，是以一个简单具体的物理学模型及其数学原理向世人示明：精确的长期天气预报的确是不可能的。

洛伦茨很早就注意到，虽然一年有四季，但准确地说气候和天气都没有严格的周期规律。在1950年代，他尝试建立一个数学模型来描述大气层上下温差引起气流变化的动力学过程。在作了许多简化之后，他构建了一个12个变量的非常复杂的微分方程组。可是，在当年没有高速计算机辅助的条件下，谁都没有办法对之进行分析和计算。洛伦茨试图进一步简化这个数

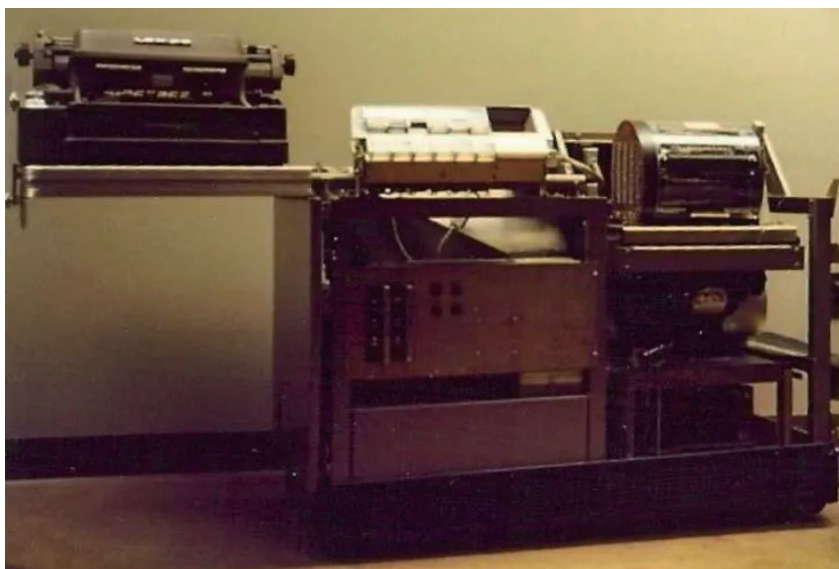


洛伦茨

学模型，但直觉上认为需要保留偶数个方程才能准确地描述气流动态，多次尝试之后以失败而告终。

1961年的一天，他和同在“麻省理工一般环流研究项目”工作而后来成为“现代气候理论之父”的巴里·萨尔茨曼（Barry Saltzman）教授一起探讨了其模型简化问题。那时萨尔茨曼正在研究非线性 Benard 对流，通过谱展开得到了7个变量的降阶非线性方程组。萨尔茨曼告诉洛伦茨，说他得到了一些周期解，但也有不稳定的解。洛伦茨仔细观察了那些结果，发现7个变量中的4个周期解很快衰减从而变得不重要了，而其他3个则会保持长时间的非周期性变化。洛伦茨非常感激萨尔茨曼的实验结果给他提供的启示，感觉到类似这样的3个变量方程组应该足以用来描述他所期望的气流运动的非周期性。果然，他将自己的模型作了相应的简化后，仅保留了3个变量，发现能够观察到非周期性动力学现象。

当年洛伦茨求解这3个变量的方程组用的是一台 Royal McBee LGP-30 计算机，放置在麻省理工第24号楼第五层。这台机器比书桌还大，重约260公斤，可是速度极其缓慢，连今天的笔记本电脑都比它快上一百万倍。当年，计算机程序是由两位年轻女助手艾伦·费特（Ellen Fetter）和玛格丽特·哈密顿（Margaret Hamilton）负责编写的。艾伦和玛格丽特分别从蒙特霍利约克学院（Mount Holyoke College）和厄勒姆学院（Earlham College）数学专业本科毕业，两人来到洛伦茨实验室工作后才开始学习编写计算机程序。不过她俩都很称职。特别值得一提的是那位哈密顿女士，聪明的她很快就成为一位编程能手。她离开麻省理工比较早，后来加盟美国宇航局，先后为登月飞船编写控制程序和为空中试验室（Skylab）编写操作软件，2003年获美国宇航局授予航天杰出贡献奖，2016年荣膺美国总统自由勋章，2017年还被乐高游戏产品选定为成功女士偶像人物。

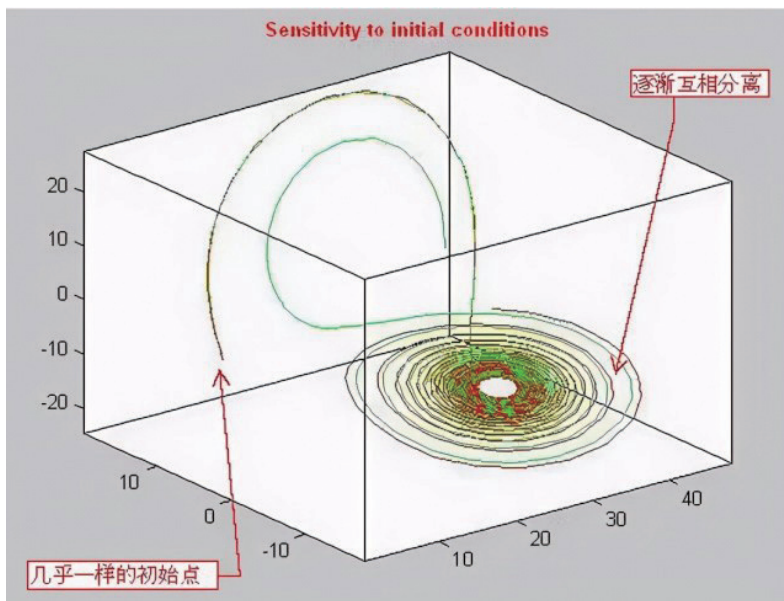


Royal McBee LGP-30 计算机

现在回来继续说洛伦茨的故事。

故事发生的这一天是周五，洛伦茨如常来到了办公室，继续用他推导出来的简化数学方程组做天气预报仿真。他计划把昨天的仿真重复一遍，以保证计算结果准确无误。他知道那台蜗牛机器运算极慢，需要一个多小时才能完成计算，便踱进了学院旁边的小咖啡馆。喝完咖啡回到办公室后，他一看仿真结果大吃一惊，发现新画出来的曲线与昨天的记录大相径庭：两条曲线从相同的初始点出发，在起初几周时间点上的预报相互吻合得很好，但随后两者迅速分离，大约两个月后便变得毫不相关了。他反复检查了公式，两位女士也反复检查了程序，都没有发现任何错误。这让他百思莫解。

经过反复核查，在排除了计算机故障的可能性之后，他注意到了两次仿真试验过程之间的一个微小差异。当时的计算机运算精确度是保留小数点后6位数字的，因此他在第一次计算中输入了初始值0.506127。但在第二次计算中，他图省事输入了0.506，觉得这不到千分之一的“四舍五入”不会带来什么影响。现在他发现自己错了，这影响其实大得很。



对初始条件的高度敏感性

历史上许多重大机遇都出现在这种毫不显眼的事情和毫不惊人的时刻：0.506 不够精确么？改为 0.506127 再算一遍就好了嘛，还来得及去多喝杯咖啡呢。然而，出色的科学家和普通的实验员之间的差别可能就在于这个地方：洛伦茨觉得这不到千分之一的误差所带来的巨大影响从常理来说不可思议，此事必须有个数学解释。随后的几天里，他和两位程序员一起再次重复了两种不同初值的仿真，证实了他悟出的道理：由于该数学模型对初始条件具有高度敏感性，一个微小的初始误差随着反复迭代计算最终酿成巨大的结果差异，导致了模型未来行为的“不可预测性”！

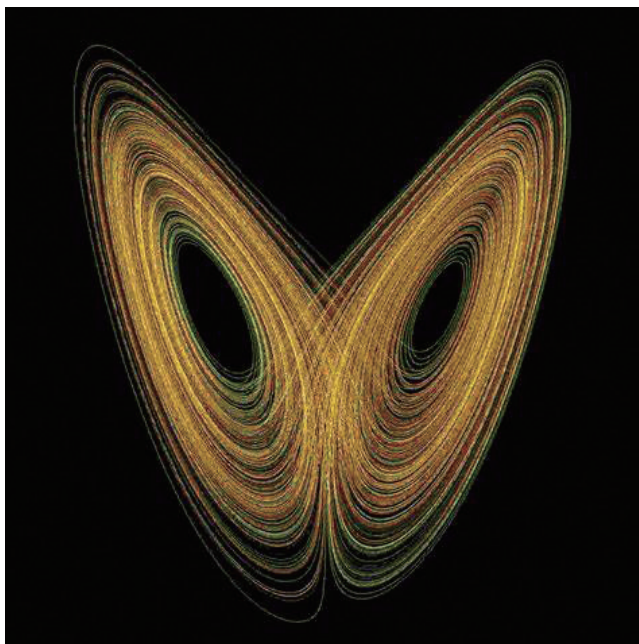
洛伦茨把他的发现写成了论文《确定性的非周期流》(*Deterministic nonperiodic flow*), 于1963年发表在《大气科学》杂志(*Journal of the Atmospheric Sciences*, 20: 130-141, 1963)。

洛伦茨当时觉得他发现的可能只是流体力学中湍流的一个新特征, 投稿时把论文标题拟定为“确定性的湍流”。但杂志编辑对此颇有怀疑。于是他把“湍流”改成了“非周期流”。洛伦茨在论文中指出:“两个状态之间不被察觉的微小差别可能最后演化为巨大的不同……因此, 如果在观察当前状态时不管有什么样的误差——在任何真实系统中这些误差是不可避免的——那么对于一个不太久远的未来瞬间状态做出任何可接受的预测都将是不可能的……非常长期的准确天气预报看来并不存在。”当年洛伦茨估算, 准确的天气预报最多在两周时间之内可以做到。事实上, 今天在高速计算机和大数据支持下, 这个时间段也达不到三周。

在论文末尾, 洛伦茨诚挚地感谢了巴里·萨尔茨曼和艾伦·费特。接下来, 他在另一篇论文中也同样地致谢了玛格丽特·哈密顿。

在1963年这篇里程碑式的论文中, 洛伦茨给出了刻画上述3个主要变量的非线性方程组, 即今天著名的洛伦茨系统或洛伦茨方程:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y-x) \\ \frac{dy}{dt} = cx - xz - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$



洛伦茨吸引子