

## 中国数学会 2023 年度华罗庚数学奖获奖人 袁亚湘院士的科学成就

袁亚湘院士主要从事非线性优化的数值方法研究，在信赖域法、序列二次规划方法、拟牛顿法、非光滑优化、共轭梯度法和子空间方法等领域做出了卓越贡献。目前他已经出版了五本书（其中一本由 Springer Verlag 出版），并在 *Mathematical Programming*, *SIAM J. Numer. Anal.*, *SIAM J. Optimization*, *Numer. Math.*, *Math. of Comp.*, *IMA J. Numer. Anal.* 等国际期刊上发表了 170 多篇研究论文。

传统的优化方法是线搜索方法，其每次迭代要先确定方向然后沿该方向寻找好点。上世纪八十年代兴起的信赖域法，其每次迭代则在一个区域内寻找好点，之后二十多年中一直是非线性优化的学科前沿和研究热点，已成为非线性优化的基本方法。

作为世界上信赖域算法领域的领先专家之一，袁亚湘院士因其对非光滑优化的信赖域算法的收敛性、非线性约束优化的信赖域算法构建以及 Celis-Dennis-Tapia 问题和其他信赖域子问题的开创性分析等系统研究而广受认可。其两个非常突出的贡献如下：

**(1) CDT 子问题最优性条件：**优化方法的核心步骤是每次迭代的计算。许多约束优化的信赖域法在每步迭代都要求解由国际上著名优化专家所提出的 CDT 子问题 (Dennis 曾任国际数学规划协会会长、SIAM 优化杂志创始人和首任主编, Tapia 是美国工程院院士)。

深入理解该问题的理论性质对其有效求解以及构造高效的约束优化信赖域法有关键作用。袁建立了该问题的最优性条件，证明了拉格朗日函数的海色阵最多只有一个负特征值（而利用著名的 Kuhn-Tucker 定理仅能证明海色阵最多只有两个负特征值）。袁还指出了在只有一个约束起积极作用时海色阵也可能有一个负特征值，这是出乎人们意料的（对于单球问题著名的 More-Sorensen 定理能保证海色阵半正定！）。

袁的上述结果为 CDT 子问题最优化理论奠定了基础。袁在证明最优化条件时给出的一个关于矩阵对的引理，即两个二次型的最大值在任意点处非负等价于这两个二次型存在一个半正定的凸组合，后来被欧洲学者研究和推广，并被称为袁氏引理。

法国著名分析和优化专家 Hiriart-Urruty 在 2007 年 *SIAM Review* 杂志上的综述文章中把袁的结果能否推广到多矩阵情形作为第十四个公开问题中的压轴问题提出。

**(2) ST 方法下降估计：**Steihaug-Toint(ST) 方法是在球内求解二次函数极小的截断共轭梯度方法。该方法计算效果非常好，被国际上广泛应用，但是关于该方法所给出的解之好坏却一直没有理论上的估计。

袁通过计算发现该方法对二维问题( $N=2$ )能使目标函数下降至少达到最优下降的一半，并在 1997 年国际数学规划大会上给出有关的证明并猜测这一结论对一切  $N$  都成立。

由于 ST 方法有广泛应用以及该猜测叙述的简洁，此问题很快引起国际上许多著名学者的关注。美国华盛顿大学 Tseng 教授通过深入研究，证明了 ST 方法所求出解使得目标函数下降至少达到最优下降的三分之一。袁通过引入一种新的分析技巧（定义带参数的共轭梯度路径），以简洁的形式最终证明了该猜想。袁的定理和证明（包括证明定理所给出的一系列引理）全部被 2000 年国际上第一本关于信赖域法的专著（作者 Gould 是 SIAM 优化杂志前主编，Toint 是 ST 方法提出者之一）所收录。该专著中还明确写到“the conjecture made by Yuan”。

对于非线性约束优化，袁还与剑桥大学的鲍尔教授 (FRS) 合作，第一个提出基于光滑效用函数的信赖域算法，从而避免了之前非线性约束优化方法因为使用非光滑效用函数带来的 Maratos 效应现象（即算法的快速收敛步被截断）发生。

袁亚湘院士在拟牛顿法方面的研究也非常显著。众所周知，牛顿法是优化中最基础的方法之一，但它需要计算二阶导数，无法用于大规模的问题。拟牛顿法将牛顿法中的