中国数学会 2023 年度陈省身数学奖获奖人
付保华研究员获奖工作介绍

中国科学院数学与系统科学研究院付保华研究员因其在代数几何领域的全纯辛几何和 Fano 簇研究方面取得的一系列重要成果，荣获中国数学会第二十届陈省身奖。本文尽可能通俗地介绍付保华研究员取得的主要成果和研究背景。

左起：汤雪林、席南华、付保华、雷震、江松。
第二十届陈省身奖颁奖现场，大连，2023 年 12 月

付保华研究员陈省身奖获奖词：

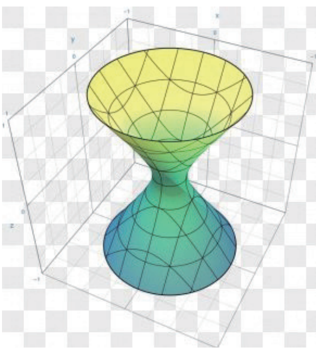
“付保华，中国科学院数学与系统科学研究院研究员，国家级高层次人才计划入选者。曾获华人数学家大会 ICCM 数学奖银奖。付保华的研究方向为代数几何，他在全纯辛几何的研究以及 Fano 簇的研究这两方面取得了一系列重要成果。其主要学术成果有：（1）完全解决了幂零轨道闭包的辛解消问题并 (部分与他人合作) 刻画出其双有理几何；(2) 与他人合作完全解决了具有延拓性质的光滑射影非退化代数簇的分类问题；(3) 与他人合作完全分类了例外李代数中幂零轨道闭包的一般奇点；(4) 与合作者证明了半单李群的完美紧化在 Fano 形变下的刚性，与他人合作提出了 Picard 数 1 的 Fano 流形的正则化切丛是拟有效的完全分类猜想，证明了部分情况并将其与著名的 Campana-Peternell 猜想联系起来，与合作者一起深入系统研究了具有群作用的 Fano 簇，分类了特殊（2，1）型的双有理变换，给出了二次超曲面的一个刻画。”

一、代数几何（algebraic geometry）

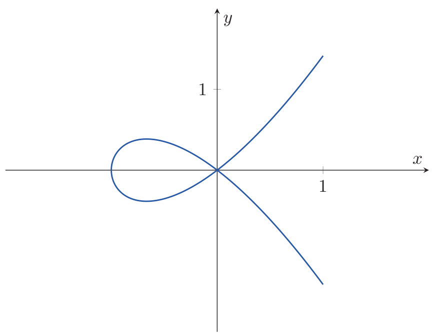
从范畴论（category）的角度，一个范畴需要明确**对象**（object），和对象间的**态射** (morphism)。代数几何的研究对象是**代数簇** (algebraic variety)。代数簇由仿射代数簇 (affine variety) 粘合而成。粗略地说，仿射代数簇是仿射空间 $\mathbf{A}^n$ 中多项式组的零点集合；射影代数簇（projective variety）是射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中齐次多项式组的零点集合；代数簇之间的态射是局部由多项式的商给出的映射。

1 维的代数簇称为**曲线**，2 维代数簇称为**曲面**，维数大于 2 的代数簇称为**高维代数簇**。代数几何中通常考虑代数闭域上的代数簇。为了直观展示，下文常通过代数簇的实数图像说明。

例 1. 曲面和曲线

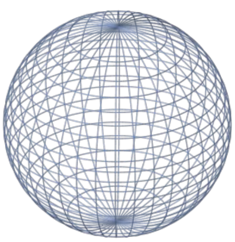


$x^2 - x + y^2 + yz = 0$

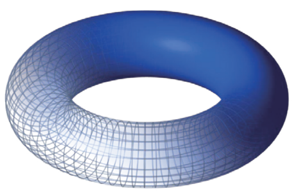


$y^2 = x^2(x+1)$

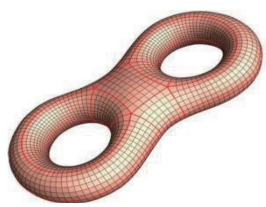
例 2. 复数域上的代数曲线是实 2 维的可定向黎曼曲面。由拓扑学紧曲面的分类知其同胚类可按亏格 g 分类，其中非负整数 g 标记黎曼曲面中洞的个数。



黎曼球面 $g=0$



椭圆曲线 $g=1$

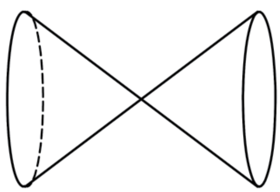


$g=2$

当考虑的集合具有代数簇的结构时，人们可以运用代数几何工具得到该集合更多的信息。这有点类似于伽罗华观察到一个方程的根集不仅仅是一个集合，而且具有群的结构。从而将方程的可根式解问题转换为伽罗华群是可解群的问题。由此证明了一般的 5 次以上方程不可根式解。

例 3. 在线性代数课程中，我们熟知一个方阵有可逆和非可逆两种情况。以 2 阶方阵为例。代数闭域 k 上所有 2 阶方阵的集合 $\mathrm{M}_2(k)=\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\}$ 同构于 4 维仿射空间 $\mathbf{A}^4$. 2 阶非可逆矩阵对应于 $\mathbf{A}^4$ 中由方程 $\det A = ad - bc = 0$ 定义的 3 维代数簇。而 2 阶可逆矩阵 $\mathrm{GL}_2(k)$ 是 $\mathbf{A}^4$ 中 $\det A = ad - bc \neq 0$ 定义的一个扎里斯基（Zariski）开集。它在 $\mathbf{A}^4$ 中稠密，且同构于一个仿射代数簇。因此它是一个 4 维仿射代数簇。从代数几何的分析可知，可逆和非可逆方阵不是等概率地出现。可逆方阵比非可逆方阵“多”。代数几何中通常称这种情况为：可逆方阵是一般情形（general）。取逆矩阵 $\mathrm{GL}_2(k) \to \mathrm{GL}_2(k)$，$A \to A^{-1}$ 是代数簇之间的态射。

例 4. n 阶幂零矩阵的全体自然构成一个仿射代数簇。我们以 $n = 2$ 为例。所有的 2 阶幂零矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 满足迹和行列式为零，即 $\mathrm{tr}\, A = \det A = 0$. 所以 2 阶幂零矩阵的全体同构于 $\mathbf{A}^4$ 中由方程组 $a + d = ad - bc = 0$ 定义的仿射代数簇。它同构于 3 维仿射空间 $\mathbf{A}^3$ 中由 $a^2 + bc = 0$ 定义的曲面。如下图所示：



2 阶幂零矩阵的约当标准型只有两种 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 类似于可逆和非可逆矩阵的情形，这两种情形不是等概率地出现。相似于 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的所有 2 阶幂零矩阵的集合在 2 阶幂零矩阵集合中稠密。

从函数的角度，微分几何关心光滑函数，拓扑学关心连续函数，而代数几何则关心

多项式函数。相较于其它几何学，代数几何学有自身的独特之处。我们介绍其中的几处现象。

1. 代数几何使用的扎里斯基拓扑比较粗糙

扎里斯基拓扑的闭集定义为多项式组的零点集合。不可约代数簇的任何非空开集均稠密。这与欧氏拓扑里的豪斯多夫（Hausdorff）分离性质很不同。我们在例 3 中看到了可逆方阵的集合为稠密开集。这个特点使得代数几何里有一个常用概念“一般的”，即指这个元素属于一个稠密开集。

2. 刚性（rigidity）问题

代数几何中有很多刚性现象。比如，射影代数簇到仿射代数簇的态射只能是常值映射。在例 2 中，赫尔维茨（Hurwitz）定理告诉我们，低亏格曲线到高亏格曲线的态射只能是常值映射。

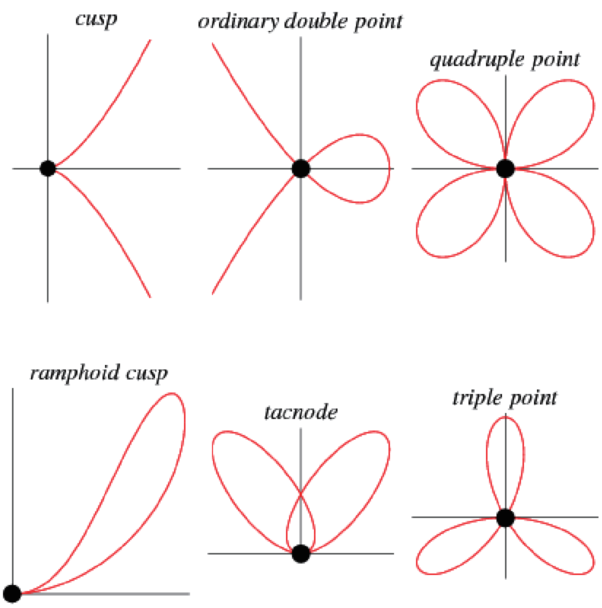
如果一个群具有代数簇的结构，且这个群的乘法和取逆映射是代数簇的态射，则称其为代数群(algebraic group)。一个刚性结果推出射影代数群上的乘法必定是交换的，故称为阿贝尔簇。1 维的阿贝尔簇称为椭圆曲线。

3. 代数簇的奇点（singularity）

奇点这个现象不会出现在微分流形或拓扑流形中。它是代数几何里特有的现象。如例 1 中，由方程 $y^2 = x^2(x+1)$ 定义的结点平面曲线（nodal plane curve）中，原点为曲线上的奇点，因为原点的切空间的维数（2 维）大于曲线的维数（1 维）。这条曲线上其它点的切空间维数均为 1 维。我们称这些点为光滑点。

虽然代数簇的奇点集合构成一个真闭子集，也即代数簇的一般点均为光滑点，但奇点给代数几何的研究带来很大的技术性困难。人们希望研究性质更好的光滑代数簇。光滑代数簇的很多性质与流形接近。类似于微分几何的惠特尼(Whitney)嵌入定理：任一 n 维光滑射影代数簇均能嵌入到 $2n+1$ 维射影空间 $\mathbf{P}^{2n+1}$ 中。作为推论，一条光

滑射影曲线能嵌入到 3 维射影空间 $\mathbf{P}^3$ 中。奇异代数簇（即带有奇点的代数簇）的性质就糟糕得多。即使只带一个奇点的平面曲线都存在无限可能，如下图所示：



一般地，对于任意给定的正整数 n，均能找到一条奇异曲线 C_n，使得 C_n 不能嵌入到射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中。

如何能在保留奇异代数簇大部分几何信息的情况下把问题转换到光滑代数簇，成了人们自然关心的一个问题。由此产生了代数几何的一个核心问题——奇点解消（resolution of singularities）。

二、双有理代数几何（birational geometry）

两个代数簇 X、Y 称为**同构**(isomorphic)的，如果存在态射 $f: X \to Y$, 以及 f 的逆态射 g: $Y \to X$，使得 $fg = 1_Y$, $gf = 1_X$，其中 1_Y、1_X 分别是代数簇 Y 和 X 的恒同态射。

当我们关心的态射只能定义在代数簇的一个稠密开集上时，称其为**有理映射**(rational map)，并用虚线箭头表示 $f: X \dashrightarrow Y$ 以区别于传统的“映射”，即要求在 X 上的每点都有定义。两个代数簇 X、Y 称为**双有理等价**的（birational equivalent），如果存

在有理映射 $f: X \dashrightarrow Y$，X 的开集 U，Y 的开集 V，使得限制态射 $f|_U$ 给出了 U 和 V 的同构。粗略地说，双有理等价的代数簇“几乎”同构。容易看出，同构的代数簇一定双有理同构；任何代数簇一定和它的非空稠密开集双有理同构。

分类是几何学的基本问题。代数簇同构分类产生的代数几何分支称为**模空间理论**（moduli space），而代数簇双有理等价分类产生的分支称为**双有理代数几何学**。它们是代数几何学经典的两大分支。

例 5. 仿射直线 $\mathbf{A}^1$、射影直线 $\mathbf{P}^1$ 和由 $y^2 = x^2(x+1)$ 定义的结点曲线 C 双有理等价。事实上，仿射直线是射影直线的稠密开集，所以 $\mathbf{A}^1$ 与 $\mathbf{P}^1$ 双有理等价。不难验证有理映射 $\mathbf{A}^1 \dashrightarrow C$，$t \to (t^2 - 1, t(t^2 - 1))$ 是双有理映射。从而得到 $\mathbf{A}^1$ 与 C 双有理等价。

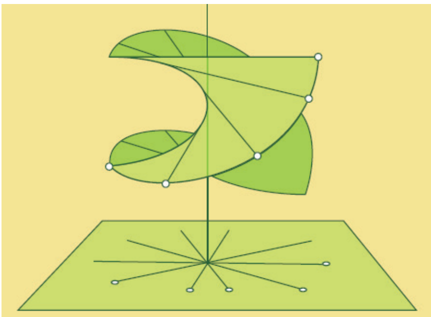
由于双有理等价的灵活度，在双有理分类代数簇时自然会问：能否在每个等价类里选出性质良好的代表元？这些代表元之间会有怎样的联系？在例 5 中，射影直线 $\mathbf{P}^1$ 的性质最好，因为它是射影光滑代数簇。我们将在接下来的章节中进一步回答这些问题。

由于代数簇可能存在奇点，我们可以问代数簇是否双有理等价于一个光滑代数簇？答案是肯定且平凡的（trivial）。事实上，之前提到代数簇 X 的奇点集合 Z 是 X 的真闭子集。令 $X\setminus Z$ 是 Z 在 X 中的补集。它是 X 的稠密开集且光滑。所以，X 与光滑代数簇 $X\setminus Z$ 双有理等价。

奇点解消：令 X 是代数闭域 k 上的代数簇。代数簇 Y 称为 X 的奇点解消，如果 Y 是光滑的，且存在一个双有理、本征（proper）态射 $f: Y \to X$.

本征（proper）态射是泛闭（universally closed）映射，即对任何代数簇 Z，乘积映射 $f \times 1_Z$: $Y \times Z \to X \times Z$ 是闭映射，它将闭集映成闭集。一个域 k 上的代数簇 X 称为完全簇（complete variety），如果态射 $X \to \mathrm{pt}$ 是本征的。射影代数簇都是完全簇。

例 6. $\mathbf{A}^2$ 胀开（blowing up）原点



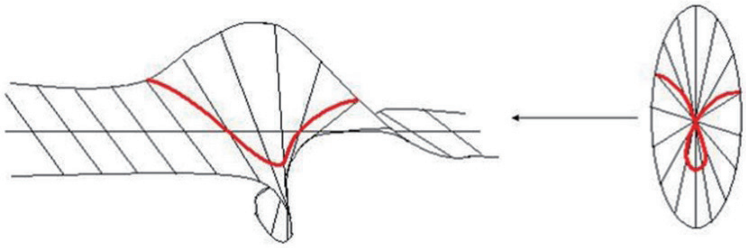
图片来源 [1]

这是代数几何课程里必须掌握的一个基础知识。$\mathbf{A}^2$ 胀开原点是 $\mathbf{A}^2\times\mathbf{P}^1$ 中由方程 $xv = yu$ 定义的子簇 X，其中 (x, y) 是 $\mathbf{A}^2$ 的坐标，$[u{:}v]$ 是 $\mathbf{P}^1$ 的坐标。投影映射 $f: X\to \mathbf{A}^2$ 是一个双有理本征态射。事实上，令 $E = f^{-1}(0)$. 不难验证 $X\backslash E$ 同构于 $\mathbf{A}^2\backslash 0$, E 同构于射影直线 $\mathbf{P}^1$. 几何上看，X 是把 $\mathbf{A}^2$ 在原点处拉开。原点称为胀开的**中心**（center）。也称 f 是 X 压缩例外（exceptional）曲线 E. 类似地，定义高维代数簇的胀开 ([2])。

受到导师扎里斯基的影响，広中平祐（Heisuke Hironaka）自博士起开始研究奇点解消问题。经过长期不断努力，他最终证明了在特征零域上的代数簇经过适当选取的中心和有限次数的胀开能解消所有奇点。他因此获得菲尔兹奖。Hironaka 的结果同时告诉我们：在特征零的域上，代数簇的双有理等价类中总存在一个光滑射影的代数簇。正特征域上维数 ≤ 3 的代数簇的奇点解消已被证明，维数 > 3 的代数簇是否存在解消仍然是一个公开问题。

左起：Zariski、Hironaka，1981 年 . 图片来源 [3]

我们以下图作为例子来展示结点曲线解消奇点的过程。



图片来源 [2]

经过一次胀开，就可以将结点曲线解消为光滑曲线。

胀开还有一个重要的应用是消去有理映射的未定义部分（[2], elimination of indeterminacy）。之后我们还会用到这个性质。这里举一个简单的例子。

例 7. g:$\mathbf{A}^2$ -->$\mathbf{P}^1$，$(x, y) \to [x:y]$，是一个有理映射。g 在 $\mathbf{A}^2$ 的原点没有定义。

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "h"] & \\ \mathbf{A}^2 \arrow[rr, dashed] & & \mathbf{P}^1 \end{tikzcd}$$

其中 X ⊆ $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ 是 $\mathbf{A}^2$ 在原点 0 处的胀开，$f: X \to \mathbf{A}^2$ 和 h：$X \to \mathbf{P}^1$ 分别是 $\mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ 在 $\mathbf{A}^2$ 和 $\mathbf{P}^1$ 上投影映射限制在 X 上。不难验证 $h|_{X\setminus E} = g|_{\mathbf{A}^2\setminus 0}$. 这样态射 h 消去了有理映射 g 的未定义部分。

三、极小模型纲领（minimal model program）

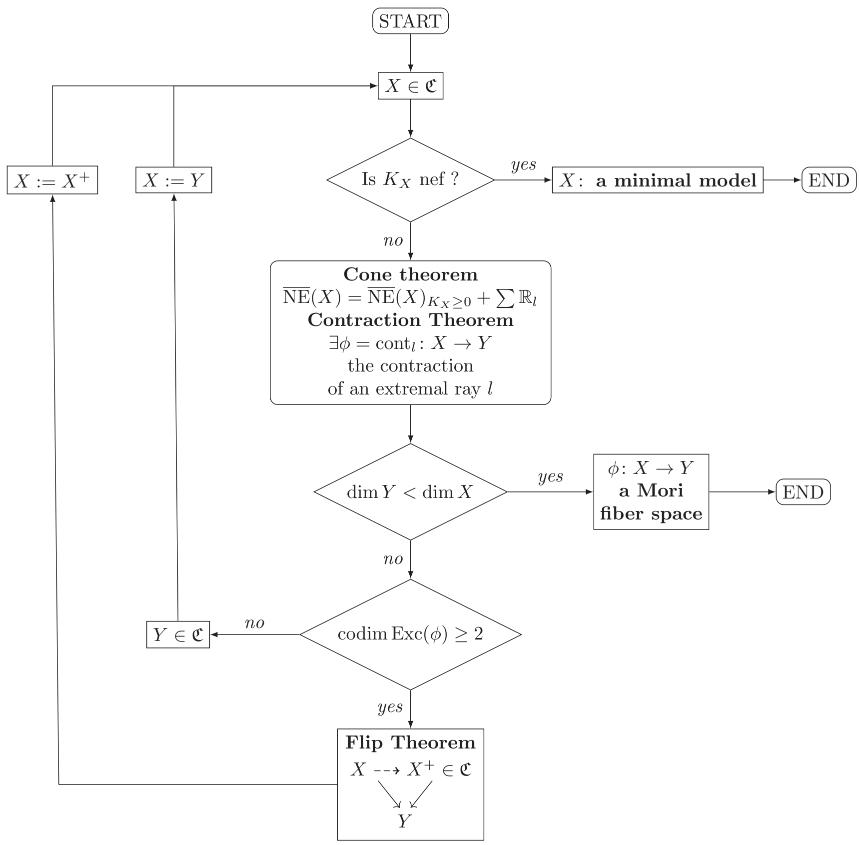
对于光滑射影曲线，双有理等价即为同构。所以，曲线的双有理等价分类问题等同于曲线模空间 $\mathbf{M}_g$ 问题。

对于光滑射影曲面，19 世纪末意大利数学家们发现通过不断地压缩（例 6）曲面上的 −1 曲线，即同构于射影直线 $\mathbf{P}^1$ 且自相交数为 −1 的曲线，有限步压缩后的曲面再

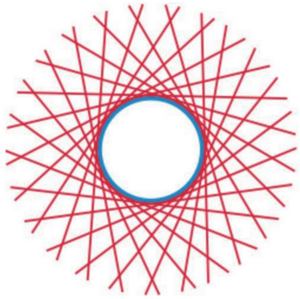
无 −1 曲线，这样的曲面称为极小曲面（minimal surface）.

类似于曲面的操作，对于高维代数簇 X，极小模型纲领，或称为森纲领（Mori's program）以程序的方式对 X 进行有限次双有理等价操作后得到一个极小模型（minimal model）或者一个 Mori 纤维空间（Mori fiber space）.

Minimal Model Program in Dimension 3 or Higher Dimension



我们介绍一下这个程序框图。每个代数簇 X 的典范丛 K_X 是其最重要的几何量。我们以 n 维光滑代数簇 X 为例来定义典范丛 K_X. X 上每个点 x 的切空间 T_X 是一个 n 维向量空间。X 上所有点 x 的切空间构成了 X 上一个秩 n 的向量丛，称为 X 的**切丛** T_X . 切丛的对偶丛称为**余切丛** Ω_X . 典范丛 K_X 是由余切丛 Ω_X 做 n 次外积得到的秩 1 向量丛。



圆的切丛

许多重要的代数几何量均与典范丛有关。例 2 中提到的曲线的亏格 $g = \dim \mathrm{H}^0(X, K_X)$，其中 $\mathrm{H}^0(X, K_X)$ 是向量丛 K_X 的 0 阶上同调。它是一个有限维向量空间，也称为 K_X 的整体截面（global section）。

当 $\mathrm{H}^0(X, K_X)$ 是一个非零向量空间时，设 $s_0,\cdots, s_n$ 是 $\mathrm{H}^0(X, K_X)$ 的一组基，则它诱导了一个有理映射 $\Phi\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$, $x \to [s_0(x) : \cdots : s_n(x)]$，称 Φ 为**典范映射**（canonical map）. 当 $\mathrm{H}^0(X, mK_X)$ 是一个非零向量空间时，其中 m 是一个非负整数，$\mathrm{H}^0(X, mK_X)$ 诱导了有理映射 $\Phi_m\colon X \dashrightarrow \mathbf{P}^N$，称 Φ_m 为**多典范映射**（pluricanonical maps）。当 m 充分大时，$\Phi_m(X)$ 的维数会稳定下来。代数簇 X 的**小平维数** $\kappa(X)$（Kodaira dimension）定义为：

如果对任意 $m \geq 0$，$\mathrm{H}^0(X, mK_X) = 0$，则定义 $\kappa(X) = -\infty$；
否则，定义 $\kappa(X) = \dim \Phi_m(X) \geq 0$，对于充分大的 m.

小平维数是一个重要的双有理不变量（birational invariant），且 $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, \cdots, \dim X\}$. 复旦大学陈猛教授在多典范映射领域取得了多项重要成果。参见他和陈荣凯教授的 2018 年世界数学家大会（ICM）邀请报告文章（[4]）。

代数簇 X 称为**极小模型**（minimal model），如果典范丛 K_X 是数值有效的（nef, numerically effective 的简写），即 K_X 与 X 上任意曲线的相交数非负。代数簇 X 称为森纤维空间（Mori fiber space），如果存在一个纤维化 $f: X \to Z$，使得 f 的一般

纤维 F 连通且 F 是 Fano 代数簇，即 F 的反典范丛 $-K_F$ 是丰沛的（ample）.

极小模型纲领猜测，当 $\kappa(X) \geq 0$ 时，X 双有理等价于一个极小模型；当 $\kappa(X) = -\infty$ 时，X 双有理等价于一个森纤维空间。极小模型纲领对于维数 > 3 的代数簇仍未完全解决。

代数簇称为**一般型代数簇**（variety of general type），如果 $\kappa(X) = \dim X$. 当代数簇 X 的小平维数 $0 \leq \kappa(X) < \dim X$ 时，多典范映射 Φ_m：X-->Z 是一个一般纤维 F 为卡拉比 - 丘 (Calabi-Yau) 代数簇，即 $\kappa(F) = 0$，且 $\dim Z = \kappa(X) < \dim X$ 的有理映射。对这类代数簇的研究可以大致约化为对卡拉比 - 丘代数簇和更低维代数簇的研究。对森纤维空间的研究可以约化为对 Fano 代数簇和更低维代数簇的研究。从这里能够看出，**Fano 代数簇、卡拉比 - 丘代数簇和一般型代数簇**在双有理几何的研究中非常基础和重要。

例 2 中，射影直线是 Fano 代数簇；椭圆曲线是卡拉比 - 丘代数簇；亏格 ≥2 的曲线是一般型代数簇。

例 8. 令 X 是射影空间 $\mathbf{P}^n$ 中一个次数 d 的光滑超曲面，即 X 由一个不可约 d 次齐次多项式定义。则

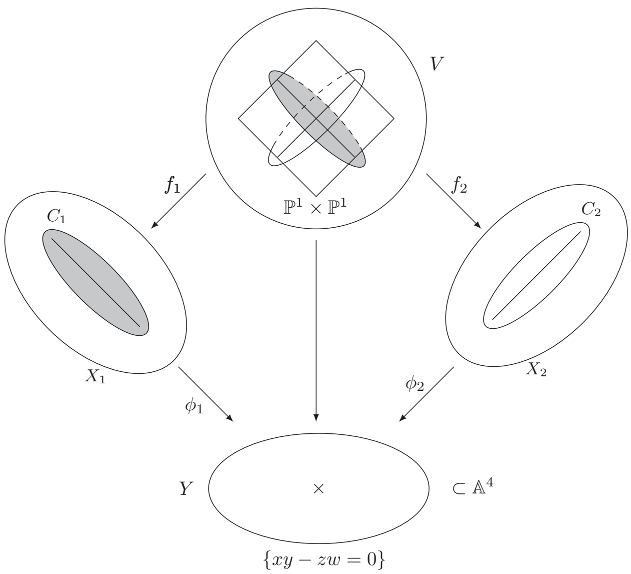
当 $d < n+1$ 时，X 是 Fano 簇；
当 $d = n+1$ 时，X 是卡拉比 - 丘簇；
当 $d > n+1$ 时，X 是一般型代数簇。

由于每个双有理等价类的代表元并不唯一，一个自然的问题是这些代表元之间有怎样的联系？

在 Reid，Kawamata, Kollár 等数学家的努力下证明了，两个 3 维的双有理同构的极小模型可由**复络**（flop）操作连接。粗略地说，两个由复络连接的极小模型只相差一个余维数 >1 的闭子簇（例 9）。复络是一种特殊的**翻转**（flip）. 对于高维代数簇，

Birkar-Cascini-Hacon-M^cKernan (BCHM) 证明了翻转的存在性 ([5])，由此进一步证明了一般型代数簇的极小模型存在。该工作被认为是代数几何领域近 20 年的最大进展之一。在 BCHM 工作的基础上，Kawamata 证明了任意维数的两个双有理同构的极小模型可由复络连接。

例 9. 阿蒂亚复络（Atiyah flop）



复络和翻转出现在高维的双有理几何中。翻转的存在性和终结性是极小模型纲领中很大的困难。BCHM 证明了翻转的存在性。翻转的终结性，即在有限步翻转后终止，尚未解决。阿蒂亚复络是最简单的复络。令 Y 是 4 维仿射空间 $\mathbf{A}^4$ 中由方程 $xy - zw = 0$ 定义的 3 维锥（cone）。原点 0 是 Y 的奇点。令 $f: V \to Y$ 是胀开原点的态射，例外除子 $E = f^{-1}(0) = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. 而 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ 有两个方向的投影 $p_i: \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$, $i = 1, 2$. 分别压缩这些纤维 $\mathbf{P}^1$，得到态射 $f_i: V \to X_i$, $i = 1,2$. 容易看出态射 $\Phi_i: X_i \to Y$, $i = 1, 2$ 的例外曲线 C_i, $i = 1, 2$ 均为 $\mathbf{P}^1$. 称 $\Phi = \Phi_2^{-1}\Phi_1 : X_1 \dashrightarrow X_2$ 为阿蒂亚复络，且 Φ 诱导了 $X_1 \backslash C_1$ 和 $X_2 \backslash C_2$ 的同构。

另一方面，经过 Sarkisov, Corti, Bruno, Matsuki, Hacon, McKernan, 刘济豪等多位数

学家的努力，证明了两个双有理同构的森纤维空间在相差一个自同构时，可由 4 种类型的 Sarkisov 链接连接起来。参见综述文章 ([6])。

最后，高维极小模型纲领不可避免地出现奇点。为了保证极小模型纲领的运行定义了四种类型的“温和”(mild) 奇点。基本想法是解消奇点的过程越复杂，则奇点性质越差。所以，可以通过比较解消后的光滑代数簇和原代数簇的差异定义奇点类型。精确地说，设 X 是一个正规代数簇（normal variety），$f: Y \to X$ 是 X 的一个奇点解消，则有

$$K_Y = f^* K_X + \sum a_i E_i$$

其中 K_Y，K_X 为典范丛，E_i 为例外除子，a_i 称为**差异**（discrepancy）. 特别地，如果 $a_i = 0$，对任意 i，则称 $f: Y \to X$ 是**无差**（crepant）的。

称 X 带有**终端奇点**（terminal），如果 $a_i > 0$，对任意 i；

称 X 带有**典范奇点**（canonical），如果 $a_i \geq 0$，对任意 i；

称 X 带有 **klt 奇点**（klt），如果 $a_i > -1$，对任意 i；

称 X 带有**对数典范奇点**（log canonical），如果 $a_i \geq -1$，对任意 i.

容易看出其中的包含关系：终端奇点是典范奇点；典范奇点是 klt 奇点；klt 奇点是对数典范奇点。对于这四种类型的曲面奇点，有如下刻画：

例 10. 令 X 是复数域上的一个正规曲面，$0 \in X$ 是唯一一个奇点，则：

1）X 带有终端奇点当且仅当 X 光滑；

2）X 带有典范奇点当且仅当在 0 附近，X 同构于商代数簇 $\mathbf{C}^2/G$，其中 G 是特殊线性群 $SL_2(\mathbf{C})$ 的有限子群；

3）X 带有 klt 奇点当且仅当在 0 附近，X 同构于商代数簇 $\mathbf{C}^2/G$，其中 G 是一般线性群 $GL_2(\mathbf{C})$ 的有限子群；

4）X 带有对数典范奇点当且仅当在 0 附近，X 同构于单椭圆（simple elliptic）、尖点 (cusp)、光滑或这些情形商掉一个有限群。

四、有理曲线与极小模型纲领

有理曲线是与 $\mathbf{P}^1$ 双有理等价的曲线。这样的曲线能单参数化，即被一个参数描述（例 5）. 从而被视为最简单的曲线。有理曲线与极小模型纲领有密切的联系。我们从例 6 可以看出曲面的极小模型纲领就是找一类特殊的有理曲线，-1 曲线，然后把它压缩掉。

怎样刻画一个代数簇 X 上所有的有理曲线的集合呢？目前的办法是考虑 $\mathbf{P}^1$ 到 X 的所有态射的集合 $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$. 与例 4 中的情况类似，$\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, X)$ 不仅是个集合而且具有代数簇结构。格洛腾迪克（Grothendieck）在上世纪 60 年代证明了 $\mathrm{Mor}(Y, X)$ 是可数无穷个局部诺特概型（locally Noetherian scheme）的不交并。我们从下面这个简单的例子体会以上结果。

例 11. 考虑集合 $\mathrm{Mor}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^n) = \cup_{d\geq 1}\mathrm{Mor}_d(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^n)$，其中

$\mathrm{Mor}_d(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^n) = \{f\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^n|[x{:}y] \to [f_0(x{:}y) : \cdots : f_n(x{:}y)]\}, f_0,\cdots, f_n$ 是 d 次齐次多项式，且它们无公因式。 $\mathrm{Mor}_d(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^n)$ 不是射影的，而是拟射影代数簇（quasi-projective variety）。我们以 $n = d = 1$ 来说明，后面会用到这个事实。

$$\mathrm{Mor}_1(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1) = \{ f\colon \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1|[x{:}y] \to [ax + by : cx + dy], a,b,c,d \in k\}$$

$ax + by$ 与 $cx + dy$ 有公因式等价于 $ad - bc = 0$. 所以，$\mathrm{Mor1}(\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1)$ 是 3 维射影空间 $\mathbf{P}^3 = \{[a{:}b{:}c{:}d], a,b,c,d \in k \}$ 中挖掉闭子集 $\{ ad - bc = 0\}$，因此是一个拟射影代数簇。

对于一个态射 $f : Y \to X$，记包含 f 的形变空间为 $\mathrm{Mor}_{[f]}(Y, X)$，格洛腾迪克证明了这个局部诺特概型的维数满足以下不等式

$$\dim \mathrm{Mor}_{[f]}(Y, X) \geq \dim \mathrm{H}^0(Y, f^*T_X) - \dim \mathrm{H}^1(Y, f^*T_X)$$

其中 T_X 是 X 的切空间，$H1(Y, f^*T_X)$ 称为**形变障碍**（deformation obstruction）.

接下来我们介绍双有理几何领域第二位菲尔兹奖得主——森重文（Shigefumi Mori）及其主要贡献。Mori 是首位担任国际数学联盟（IMU）主席的亚洲人，任期 2014-2018 年。

Mori 在博士期间，将格洛腾迪克的形变理论（deformation theory）应用到哈茨霍恩（Hartshorne）猜想的研究上，并最终解决了这个猜想 ([7])。

哈茨霍恩猜想：光滑射影代数簇 X 同构于 $\mathbf{P}^n$ 当且仅当它的切丛 T_X 是丰沛的。

Mori，图片来源 [8]

我们来看一段对 Mori 的采访（[8]）。

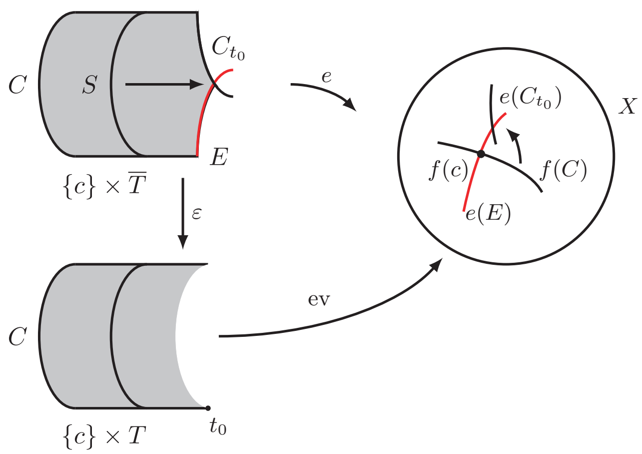
“森：说到 threefolds（本文作者注：3 维代数簇），大四的时候，我的指导老师永田雅宜 (NAGATA Masayoski, 1927-2008) 教授，给我一个问题要我建构一个有意思的三维的 rational variety（本文作者注：三维的有理簇（rational variety）是指与 $\mathbf{P}^3$ 双有理等价的代数簇）。我是做了些东西，在做的当中不时遇到困难，后来才发现，这是 Grassmannian 中由线性子空间所切出的多样体（本文作者注：多样体即代数簇）。这不是永田教授想要的结果，所以从这个意义上来说，我是失败的。但之后发现这就是在 Iskovskikh 分类表上的 Fano threefolds（本文作者注：3 维 Fano 代数簇）。这就是为什么我对三维多样体的双有理几何 (birational geometry) 感兴趣的原因，但这并不代表我当时在做它，那定是我心底真切想要知道的。我的老师 Sumihiro 一直在做 Hartshorne Conjecture，受到他的影响，我那时正在做这个猜测，我们合作解决

了一个特殊的情形。我 26 岁时去哈佛，解决 Hartshorne Conjecture, 但是在这个过程中，发现了 extremal rays（虽然这个东西不足以解决 Hartshorne Conjecture），当时觉得这会是个很有用的东西，也回想起过去做的三维多样体，同时记忆和好奇又复燃了，开始与向井茂 (MUKAI Shigeru) 一起做这方面的研究。”

从这段文字中可以看出，Mori 在大学时就开始研究 Fano 代数簇。他在博士导师 Sumihiro 的影响下研究哈茨霍恩猜想。他解决哈茨霍恩猜想的工作 ([7]) 包含很多原创的想法，对代数几何的发展影响深远。

1. 产生有理曲线的方法——弯曲并断裂（bend and break）

在射影代数簇 X 取一条射影曲线 C，固定曲线 C 上一个点 c，集合 $\mathrm{Mor}_{[f]}(C, X; f|_{\{c\}})$ 参数化了固定 $f(c) \in X$ 的 f 的形变空间。当这个形变空间足够大时，即大于 C 的自同构群的维数时，我们称 f 有非平凡的形变。在这个形变空间 $\mathrm{Mor}_{[f]}(C, X; f|_{\{c\}})$ 取一条曲线 T, 注意例 11 告诉我们 T 不一定是射影的（紧的）。令 $\bar{T}$ 是曲线 T 的射影化（将 T 嵌入射影空间后的紧化），赋值（evaluation）态射 ev: $C \times T \to X$ 可看成是有理映射 e：$C \times \bar{T}$ --> X. 关键点来了，这里的有理映射 e 一定不是态射，从而需要消去 e 未定义的部分。例 7 告诉我们，在消去未定义部分时需要做胀开，从而会产生例外曲线 E. 有理曲线就这样产生了。这种方法产生有理曲线的方法为被形象地称为弯曲并断裂（bend and break）。就好像我们在掰弯一个竹片，最终会断裂一样。见下图。



同样来自 [8] Mori 的访谈。他当年也是在数次失败的尝试后发现了这个关键点。

“森：的确，说的一点都没错。我解决 Hartshorne Conjecture 就是从失败开始的。起先，我想解决 Frenkel Conjecture，那是 Hartshorne Conjecture 的微分几何形式。我只想得到这样的部分的结果。起初我以为做出来了，但细看的时候却发现在论述当中有个落差 (gap)。这个落差来自于我制造的是 rational curves，所以 rational map 并不是一个 morphism。rational 这个关键的想法就是这样出现的。”

2、模 p 约化（mod p reduction）

在弯曲并断裂的过程中，需要假设形变空间足够大。在格洛腾迪克的形变理论中，当 Y 是射影曲线 C 时，形变空间的维数有更容易计算的估计，即以下不等式：

$$\dim \mathrm{Mor}_{[f]}(C, X\,; f|_{\{c\}}) \geq -K_X.f_*C - g(C)\dim X$$

其中 K_X 是 X 的典范丛，$g(C)$ 是曲线 C 的亏格，$K_X.f_*C$ 是相交数。

当 K_X 不是数值有效时，即 X 不是极小模型时，X 上会存在一条曲线 C，使得相交数 $K_X.f_*C<0$，即 $-K_X.f_*C>0$. 在正特征域上有一种自然的态射——弗罗贝尼乌斯态射（Frobenius morphism）$F{:}C\to C$ 能使得形变空间的维数足够大。这是因为，当复合上弗罗贝尼乌斯态射 F 后，

$$fF\colon C\to C\to X$$

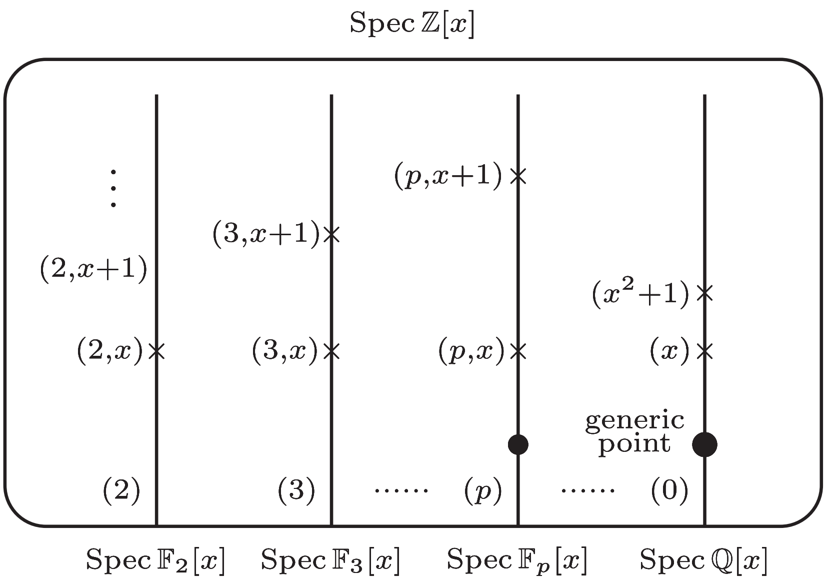
像曲线在 X 中没有变化，即 $fF(C)=f(C)$，但 $-K_X.(fF)_*C=p(-K_X.f_*C)$，其中 p 是域的特征。所以，当复合充分多次弗罗贝尼乌斯态射后，形变空间 $\mathrm{Mor}_{[fF^n]}(C, X; fF^n|_{\{c\}})$ 的维数一定会大于曲线 C 的自同构群的维数，即产生了非平凡的形变。

接下来需要考虑如何把复数域的问题约化到正特征域上，最终还要回到复数域上。这个技巧称为**模 p 约化**。

当考虑一个特征零的多项式 f，简单起见，我们可以假设 f 是整系数多项式。对于一

个素数 p，我们可以把 f 的系数模 p，从而将 f 看成是系数在有限域 $\mathbf{F}_p$ 上的多项式。当我们考虑的几何性质对充分多的素数 p 成立时，我们可以通过代数几何的一般性质（例 3）回到特征零上。

例如，令 Spec A 为交换带幺环 A 的仿射概型，即 A 的素理想的集合。考虑自然的态射 f: Spec $\mathbf{Z}[X] \to$ Spec $\mathbf{Z}$，其中 $\mathbf{Z}$ 为整数环，$\mathbf{Z}[X]$ 为整系数一元多项式环。则 f 的纤维（fiber）可由以下图表示：



图片来源 [9]

可以看出态射 f 在闭点 (即素数 p) 上的纤维是 Spec $\mathbf{F}_p[X]$, 它们是正特征域上的代数几何对象。而 f 的一般纤维 (generic fiber) 是 Spec $\mathbf{Q}[X]$，是特征零的代数几何对象。

通过这种方式，把复数域的问题约化到正特征域上，最终又回到复数域上。在这个问题上，代数方法的威力强于复数域上的超越方法。

2018 年，比尔卡尔（Caucher Birkar）由于在法诺代数簇领域做的重要贡献而获得菲

尔兹奖。他是第三位双有理几何领域的菲尔兹奖得主。

Birkar 的菲尔兹奖获奖词：“对法诺代数簇有界性的证明，以及对于极小模型纲领的贡献。（For the proof of the boundedness of Fano varieties and for contributions to the minimal model program.）”

Mori（右）为 Birkar（中）颁奖，图片来源：IMU 官网

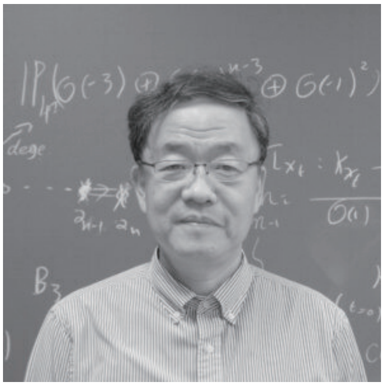
五、极小有理切线簇（VMRT）

我们称一个代数簇是**单直纹簇**（uniruled variety），如果它能被有理曲线覆盖。也就是说单直纹簇有足够多的有理曲线。

芒福德 (Mumford) 猜想：$\kappa(X) = -\infty$ 当且仅当 X 是**单直纹簇**（uniruled variety）.

这个猜想当 X 的维数大于 3 时，尚未证明。

既然单直纹簇能被有理曲线覆盖，一个自然的想法是利用有理曲线研究这类代数簇。一个著名的理论是极小有理切线簇（VMRT）理论，VMRT 是 variety of minimal rational tangent 的缩写。它由 J. M. Hwang（ICM 一小时报告人）和莫毅明院士提出。

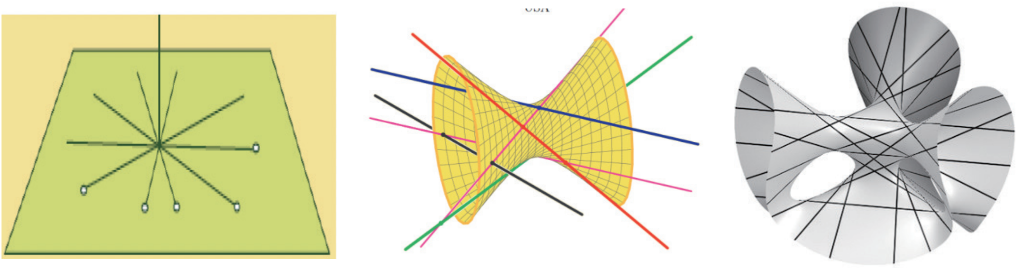


Hwang

莫毅明

VMRT 理论通过次数最小的自由有理曲线研究单直纹簇。自由有理曲线是指能覆盖单直纹簇的曲线。而次数最小使得其在弯曲断裂的过程中不会退化为更低次数的自由曲线，这样次数最小的自由有理曲线的形变空间就具有紧性。

例 12. 射影空间 $\mathbf{P}^3$ 中次数不超过 3 的超曲面中的自由有理曲线



上图分别是 $\mathbf{P}^3$ 中的 1 次、2 次和 3 次光滑超曲面。

在 1 次超曲面上，即平面上，所有直线都是自由的。从几何上看，这些直线有很多的自由度，可以向各个方向形变。

$\mathbf{P}^3$ 的 2 次超曲面同构于 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$，此时曲面上的直线不能像平面那样自由的形变。它们只能在 $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ 的纤维内形变。

$\mathbf{P}^3$ 的 3 次超曲面称为 3 次曲面。一个经典的事实是其上有 27 条直线。但这些直线都不是自由有理曲线。

创立 VMRT 理论是莫毅明院士获得未来科学奖的主要贡献之一。

图片来源：未来科学奖官网

付保华研究员在莫毅明院士获得未来科学奖成果解读 ([10]) 中，对 VMRT 理论有一段形象的解释：

“付保华：莫毅明教授此次获得大奖，主要原因之一是他在微分几何跟代数几何两个重要的方向建立了桥梁。之前也有很多桥梁， 但大部分都是通过度量来构造。而莫毅明教授以及他的合作者创立和发展了极小有理切线簇（VMRT）理论，把微分几何的方法引入到代数几何中，并由此解决了一系列悬而未决的数学猜测。

比如说我们去爬山，你怎么向别人说你到了黄山呢？那你可以选择在迎客松那个地方拍个照。 VMRT 理论就是说某些几何对象（比如有理齐性空间）有一个地标性的建筑。 如果你在别的几何对象上看到了这个地标，那么这个几何对象就是我们原来的那个几何对象，这是非常神奇、非常深刻的。它把一个从局部到整体的判断方法给了大家，所以说它是一个很强大的理论，后面可以得到一些很深刻的结果。”

六、McKay 对应（McKay correspondence）

1884 年，克莱因 (Klein) 分类了复数域上 2 阶特殊线性群 $SL_2(\mathbf{C})$ 的有限子群：

1）循环群：$C_n =< a|a^n = 1>$;

2）二元二面体群：$BD_{4n} =< a, b|a^2 = b^2 = (ab)^n>$;

3）二元四面体群：$BT_{24}=< a, b|a^2 = b^3 = (ab)^3 >$;

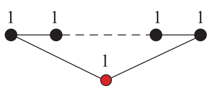
4）二元八面体群：$BO_{48}=< a, b|a^2 = b^3 = (ab)^4 >$;

5）二元二十面体群：$BI_{120}=< a, b|a^2 = b^3 = (ab)^5 >$.

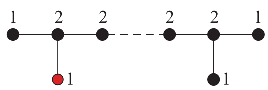
记 Γ 为一个有限子群，Γ 的一个**表示** (representation) 是指 Γ 在某个向量空间 V 上的一个线性作用。等价地，是指一个群同态 ρ：$\Gamma \to GL(V)$. 我们记此表示为 (V, ρ)（或 V_ρ 或更简单的 V）。如果 V 中没有非平凡的 Γ 不变子空间，则称为**不可约表示**。一个经典的表示论事实是：有限群在复数域上的表示是完全可约的，即 Γ 的任何表示都可以写成一些不可约表示之和。我们记 Irr(Γ) 为 Γ 的所有不可约表示所构成的集合。

记 Γ 是 $SL_2(\mathbf{C})$ 的一个有限子群。记 V_{stand} 为其在 $\mathbf{C}^2$ 上的自然表示，记 Γ 的所有不可约表示为 $\mathrm{Irr}(\Gamma)=\{V_0, V_1,\cdots, V_r\}$，其中 V_0 为平凡表示。 对于任意 i, 张量积 $V_{\text{stand}} \otimes V_i$ 仍然为 Γ 的一个表示，所以它可以写成不可约表示的直和形式：$V_{\text{stand}} \otimes V_i = \oplus_j V_j^{\oplus a_{ij}}$. 可以证明 $a_{ij} = a_{ji}$，且 $0 \le a_{ji} \le 1$. 由此我们可以构造 Γ 所对应的 McKay 图：其顶点为所有不可约表示 $V_0, V_1,\cdots, V_r$，两个顶点 V_i, V_j 之间由 a_{ji} 条边连接。我们在每个顶点上标记出相应不可约表示的维数。

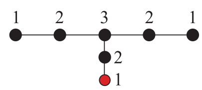
McKay([11]) 给出了所有 $SL_2(\mathbf{C})$ 的有限子群所对应的 McKay 图，得到如下结果（我们标记了平凡表示）。



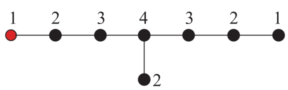
（a）循环群



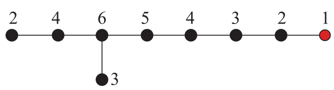
（b）二元二面体群



（c）二元四面体群



（d）二元八面体群



（e）二元二十面体群

这是一个令人吃惊的发现，因为这些图正好是 ADE 型仿射 Dynkin 图。如果把平凡表示去掉，则得到的是 ADE 型 Dynkin 图。众所周知 Dynkin 图对应于复单李代数，所以一个自然的问题是：

问题 1：$\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ 的有限子群与 ADE 型的复单李代数有何联系？

比 McKay 图出现早很多，代数几何学家在研究一类“最简单的”曲面奇点时发现了 ADE 型 Dynkin 图的现象。具体地说，固定一个 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ 的有限子群 Γ，记 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ 为商代数簇。这个商代数簇是仿射代数簇。克莱因在其 1884 年出版的《二十面体及五次方程求解讲义》中发现所有的 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ 都同构于 $\mathbf{C}^3$ 中的一个超曲面。这些曲面方程可以具体写出来：

$\Gamma = C_{n+1}$：$x^{n+1} + yz = 0$，称为 A_n 型克莱因奇点；

$\Gamma = BD_{4(n-2)}$：$xy^2 - xn^{-1} + z^2 = 0$，称为 D_n 型克莱因奇点；

$\Gamma = BT_{24}$：$x^4 + y^3 + z^2 = 0$，称为 E_6 型克莱因奇点；

$\Gamma = BO_{48}$：$x^3 + xy^3 + z^2 = 0$，称为 E_7 型克莱因奇点；

$\Gamma = BI_{120}$：$x^5 + y^3 + z^2 = 0$，称为 E_8 型克莱因奇点 .

曲面的奇点解消有一个好的性质：在同构意义下存在一个**极小解消**（minimal resolution），即别的解消都在此解消之上再做操作得到的。Du Val 在 1934 年构造出了所有克莱因奇点的极小解消。他发现对于这个解消 π：$Z \to \mathbf{C}^2/\Gamma$，其例外曲线 $\pi^{-1}(0)$ 是一串的 $\mathbf{P}^1$. 这些不同分支之间的相交数正好构成 ADE 型嘉当矩阵。换言之 $\pi^{-1}(0)$ 的对偶图（即每个分支为一个顶点，两个分支如果相交则相应顶点之间连一条线）恰好就是相应的 ADE 型 Dynkin 图。

对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ 中的有限子群 Γ，我们知道 Γ 所对应的 McKay 图（去掉平凡表示）与极小解消 π：$Z \to \mathbf{C}^2/\Gamma$ 的例外曲线的对偶图完全一样。特别地，这两个图的顶点有一一对应 ([12])。翻译过来，我们得到如下的表示与几何之间的一个对应，称为 McKay 对应：

Γ 的非平凡不可约表示 $\longleftrightarrow$ 例外曲线 $\pi^{-1}(0)$ 的不可约分支

McKay 对应能否推广到高维呢？一般地，给定有限子群 $\Gamma \subseteq SL_n(\mathbf{C})$， 商簇 $W := \mathbf{C}^n/\Gamma$ 是一个奇异仿射代数簇。由于 Γ 在 $SL_n(\mathbf{C})$ 中，所以 $\mathbf{C}^n$ 上的体积元在 Γ 作用下是不变的，从而诱导出 W 光滑部分上的一个体积元。换言之，W 是一个奇异的卡拉比 - 丘簇。特别地，其典范丛 K_W 是平凡的。

卡拉比 - 丘空间雕塑，蕉岭

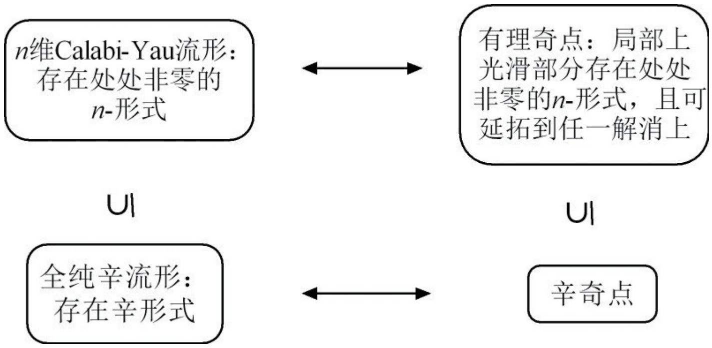
之前提到过的极小解消是曲面所特有的，一般高维代数簇没有极小解消。作为替代，我们引入**无差解消** (crepant resolution)（见典范奇点的定义）。在曲面的情形，无差解消就是极小解消（例 10）. 值得注意的是，无差解消不一定存在，而且即使存在也不一定唯一。McKay 对应在高维情况断言：如果 π：$Z \to W$ 是一个无差解消，则 Z 的很多拓扑性质都由 Γ 决定。1992 年，Reid 正式提出了高维 McKay 对应的叙述。后来也有很多的进展，参见付保华研究员的数学所讲座报告 ([13])。

七、付保华研究员的主要学术成果

付保华研究员的突出贡献很多，在此重点介绍他在幂零轨道和与 VMRT 理论相关的工作：

1. 辛奇点与辛解消

作为超凯勒流形的奇点类比，Beauville 在 2000 年提出辛奇点的概念 . 现在辛奇点已经发展为全纯辛几何的主要研究对象之一，并且与表示论，弦论，数学物理等方向有密切联系。其来源于如下的类比：



其中**辛奇点**是指一个正规簇 W, 其光滑部分存在辛形式 ω，使得对于任一解消 π: $Z\to W$，ω 的拉回 $\pi^*\omega$ 能延拓为 Z 上的全纯 2 形式 Ω. 如果 Ω 也是辛形式，则称 π 为 W 的辛解消。菲尔兹奖得主 Andrei Okounkov 认为辛解消是 21 世纪的李代数 (symplectic resolutions are the Lie algebras of the 21$^{\rm st}$ century)。

辛奇点的基本例子是商簇 $\mathbf{C}^n/\Gamma$，其中 Γ 是辛群 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbf{C}^n)$ 的有限子群。

性质：

1）辛解消当且仅当无差解消；

2）辛奇点都是戈伦斯坦典范（Gorenstein canonical）奇点；

3）辛解消都是半小的（semi-small）.

例 13.

1) 当 $n\geq 2$ 时，$\mathbf{C}^{2n}/\{\pm\mathrm{Id}\}$ 是终端奇点。所以它不存在无差解消，也没有辛解消；

2) 在 2 维时，辛奇点即是克莱因奇点、辛解消即是极小解消。

辛奇点的另外一类非常重要的例子来源于表示论中的幂零轨道。

2、幂零轨道的双有理几何

2-a）幂零轨道闭包的辛解消及其双有理几何

为了回答 McKay 对应小节中的问题 1，我们先介绍复单李代数中一些有趣的代数簇：即幂零轨道。

记 $\mathfrak{g}$ 为一个复单李代数（例如 $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$），$G$ 为 $\mathfrak{g}$ 的伴随李群（例如 $\mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbf{C})$）. 群 G 在 $\mathfrak{g}$ 上有个自然的伴随作用（在经典李代数时，这就是矩阵的共轭作用）。给定元素 $v \in \mathfrak{g}$，记 O 为 v 在此作用下的轨道，则 $O_v \cong G/G_v$ 为一光滑流形，其在 v 点切空间自然地同构于李括号 $[\mathfrak{g}, v]$. Kostant、Kirillov 及 Souriau 等发现可以用 $\mathfrak{g}$、上的 Killing 形式 κ 来定义 O_v 在 v 点切空间的一个非退化二次形式：

$$\omega_v : T_v O_v \to \mathbf{C}, ([u, v], [u', v]) \longmapsto \kappa([u, u'], v)$$

我们再用 G 作用把这个二次形式推到 O_v 的所有切空间上，从而得到 O_v 上的不变非退化二次闭形式。换言之，O_v 是一个全纯辛流形 . 特别地，O_v 的维数一定是偶数且其典范丛一定是平凡的，即卡拉比 - 丘流形。

根据约当分解，O_v 的几何可以分为两种情况：v 为半单的（即 ad_v 在 $\mathfrak{g}$ 上的线性变换 $u \longmapsto [v,u]$ 可对角化）或幂零的（即 ad_v 是幂零的线性变换）。对于前者，O_v 在 $\mathfrak{g}$ 中是闭的，所以它自然成为一个闭子代数簇，称为半单轨道。而对于幂零情况，O_v 在 $\mathfrak{g}$ 中不是闭的（除了 $v = 0$）。记 $\overline{O_v}$ 为其在 $\mathfrak{g}$ 中的闭包，称为幂零轨道闭包。容易证明 $\overline{O_v}$ 一定是奇异代数簇。

在经典李代数的情况，幂零轨道就是幂零元素的共轭类。特别地，它们唯一地由约当标准型中约当块的大小所决定。比如 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$，则幂零轨道一一对应于整数 $n+1$ 的剖分。其它经典李代数中的幂零轨道一一对应于满足某些条件的整数的剖分。可以证明任何复单李代数中幂零轨道的个数都是有限的，且其闭包由一些幂零轨道组成。

记 N 为 $\mathfrak{g}$ 中所有幂零元素组成的几何，称为 $\mathfrak{g}$ 的幂零锥。则 N 为 $\mathfrak{g}$ 中所有幂零轨道的并。据前所述，这是一个有限并，从而一定有一个开轨道，记为 O_{prin}，称为主轨道（principal orbit）。可以证明 N 的边界 $N \setminus O_{\mathrm{prin}}$ 仍然为一个轨道（称为次主轨道，记为 O_{sub}）的闭包。次主轨道 O_{sub} 在 N 中的余维数为 2.

例 14. 我们再来看例 4. 令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$, 其上元素 $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ 是幂零的当且仅当 $a^2 + bc = 0$.

从而 $\mathfrak{g}$ 中所有幂零元素组成的集合同构于 $\mathbf{C}^3$ 中的超曲面 $x^2 + yz = 0$. G 在 N 上的作用有两个轨道：主轨道以及零轨道（也是次主轨道），它们分别对应于 2 的剖分 [2] 以及 [1,1].

在 McKay 对应中，$x^2 + yz = 0$ 正好是 A_1 型克莱因奇点。也就是说子群 $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbf{C})$ 的 McKay 图就是一个点。作为 Dynkin 图，它代表的就是 A_1 型李代数，即 $sl_2(\mathbf{C})$. 而刚才的例子说明在 $sl_2(\mathbf{C})$ 中的幂零锥 N 就是 A_1 型的克莱因奇点 $\mathbf{C}^2/\Gamma$. 这是一个惊奇的巧合。遗憾的是，对别的所有子群并不都对。原因是 N 的维数除了 A_1 型李代数之外都至少是 4 维的，所以不可能成为某个克莱因奇点。那么究竟 Γ（或 $\mathbf{C}^2/\Gamma$）与李代数 $\mathfrak{g}_\Gamma$ 有没有直接的联系呢？

记 $\mathfrak{g}$ 为一个复单李代数，G 为其伴随李群，$O \subseteq \mathfrak{g}$ 为一个幂零轨道。如前所述，O 在 $\mathfrak{g}$ 中的闭包 $\bar{O}$ 虽然是奇异的，但是其典范因子是平凡的。在高维 McKay 对应中，我们回忆一个解消 $\pi : Z \to \bar{O}$ 称为无差解消，如果 Z 是光滑的卡拉比 - 丘簇。可以验证，此时 O 上的辛形式延拓到 Z 上的一个全纯辛形式，从而 Z 成为一个全纯辛代数流形。一个基本问题是：

问题 2. $\bar{O}$ **是否有无差解消？如果有，那么一共有多少个呢？**

对于幂零锥 N，Springer 构造了一个无差解消：取 G 中的一个 Borel 子群 $B \subseteq G$，则 G/B 为一个射影旗簇（flag variety）。G 在 G/B 上的自然作用诱导一个在其余切丛 $T^*(G/B)$ 上的哈密顿作用，从而得到一个动量映射（moment map）：

$$\pi: T^*(G/B) \to \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$$

可以证明，π 的像就是 N，且映射 $\pi: T^*(G/B) \to \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ 是一个解消。由于 $T^*(G/B)$ 具有平凡的典范因子，所以 π 是一个无差解消。

对于 G 的一个抛物子群 $P \subseteq G$，商簇 G/P 也是射影的。与前类似，G 作用于 $T^*(G/P)$ 从而得到一个动量映射

$$\pi\colon \mathrm{T}^*(G/P) \to \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$$

Richardson 证明了其像一定是 g 中的某个幂零轨道闭包 $\overline{O_p}$（这样的轨道叫 Richardson 轨道）。与之前不同的是，映射 $\pi\colon \mathrm{T}^*(G/P) \to \overline{O_p}$ 不一定是双有理的。当 π 是双有理映射时，称之为 $\overline{O_p}$ 的 Springer 解消，此时得到 $\overline{O_p}$ 的一个无差解消。

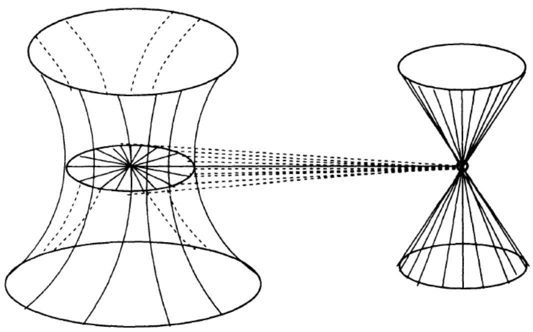
让我们看 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})$ 的例子，此时 G/B 同构于旗簇

$$\mathrm{Flag}:=\{V.|\ V_0= 0 \in V_1 \subseteq V_2= \mathbf{C}^2, \dim V_i = i\}$$

由此可以得到余切空间的描述

$$\mathrm{T}^*(\mathrm{Flag})=\{(V.,A) \in \mathrm{Flag} \times \mathfrak{sl}_2(\mathbf{C})|A(V_i)\ V_{i-1}, i = 2, 1\}$$

在此同构下，Springer 解消 π:$\mathrm{T}^*(G/B) \to N$ 就是 $\mathrm{T}^*(\mathrm{Flag}) \to N$ 的自然映射 $(V.,A) \longmapsto A$（注意到 $A^2 = 0$，所以 $A \in N$），从而态射是射影的。如下图



Blow-up of the vertex of a cone.

图片来源 [14]

对于任一给定点 $A \in N$，$\pi^{-1}(A)=\{V. \in \mathrm{Flag} \mid A(Vi) \subseteq V_{i-1}, i = 2, 1\}$

特别地，$\pi^{-1}(0)= \mathbf{P}^1$. 这正好对应于 A_1 型克莱因奇点解消后的例外曲线 $\mathbf{P}^1$.

付保华证明了幂零轨道闭包 $\bar{O}$ 的辛解消一定是 Springer 解消（[15]），从而完整地解决了幂零轨道闭包的辛解消问题，并回答了问题 2. 他还提出并研究了 Poisson 解消 ([16])，以及幂零轨道闭包的不同辛解消之间的双有理几何 ([17])。付保华还与王金龙一起合作证明了分层 Mukai flop 的 motivic 等价与量子等价（[18]）。这些工作

都是后续研究幂零轨道闭包的极小模型以及一般奇点的基础。

2-b）例外李代数中幂零轨道闭包的双有理几何

一般而言，幂零轨道闭包并没有辛解消，而由 BCHM 的著名结果可知幂零轨道闭包有极小模型（Q-factorial terminalization）。一个自然的问题是如何构造这些极小模型以及如何研究这些极小模型之间的双有理几何。Wolf 奖得主 Lusztig 与 Spaltenstein 合作构造了广义 Springer 映射，并证明其像一定是某个幂零轨道的闭包。

对于经典李代数的情况，Namikawa 用广义 Springer 映射来构造了幂零轨道闭包的所有极小模型，并证明了不同的极小模型之间是由分层 Mukai flop 连接起来的。在其文章中，他猜想类似的结果对于例外李代数也成立。

付保华证明了 Namikawa 的这个猜想 ([19])，从而解决了例外李代数中幂零轨道闭包的极小模型的构造问题。进一步地，他还发现其双有理几何与经典李代数有所不同：有两类新的奇异的 flop 在 F_4 中出现。此外他还分类了具有 Q-factorial 奇点或者终极奇点的幂零轨道闭包的正规化。

2-c）例外李代数中幂零轨道闭包奇点的分类

幂零轨道闭包的奇点一直是表示论以及代数几何学家所关心的问题。作为验证 Grothendieck 猜想的一部分， Brieskorn 证明了 ADE 型李代数的幂零锥的一般奇点正好是与李代数同类型的 ADE 曲面奇点。之后 Slodowy 将此结果推广到任意单李代数。但是对于一般幂零轨道闭包的情况则困难很多。对于经典李代数中幂零轨道闭包的奇点的分类问题，经多位数学家的努力，最后由 Kraft-Procesi 在 80 年代初期完全解决了，这是该方向的一个著名的经典成果。Kraft-Procesi 在其文章中写道：例外李代数的情况很难用他们的方法来处理。

付保华与 Juteau, Levy, Sommers 合作 ([20]) 对例外李代数中幂零轨道闭包的一般奇点进行了分类，从而完整解决了这个问题。这项工作被物理学家用到了超对称规范场论的研究中。

出乎意料的是，付保华等人发现了 ([21]) 几个与经典李代数情况完全不同的奇点。其中最特别的一个（在 E_8 中出现）其实给出了一个四维孤立辛奇点且其局部基本群是平凡的例子。在此例子的基础上，付保华及其合作者在后续的工作中构造了无穷多的这样的例子，从而回答了 Beauville 在 2000 年提出的一个问题。

3. 带群作用的法诺簇 (Fano) 的几何

粗略而言，代数簇可以分为三大类： 法诺簇， Calabi-Yau 簇以及一般型代数簇。法诺簇的几何的研究一直是代数几何的核心课题。

3-a）完全解决了具有一阶非零延拓的光滑非退化射影代数簇的分类问题

数学大师 E. Cartan 在 1909 年提出并且研究了可约化李代数的延拓问题，并得到其著名的关于无穷型的可约化李代数的分类。而后此结果被 Abel 奖得主 Singer 与 Sterberg 给了完整的证明，同期 Kobayashi（ICM 报告人）与 Nagano 给出了一个新的证明。近年来基于法诺簇的形变刚性问题的研究，J.-M. Hwang 与莫毅明院士在 2005 年证明了光滑非退化的射影代数簇的无穷小自同构群的李代数不存在二阶及以上的非零延拓，除非该代数簇就是射影空间。分类具有一阶非零延拓的光滑非退化的射影代数簇被 Hwang 在其综述文章中作为公开问题提出来。

付保华与 Hwang 的合作（[22]）完全分类了具有一阶非零延拓的光滑射影非退化代数簇，从而完整地解决了该问题。作为应用，他们证明了射影空间沿着一个光滑非退化且其割簇不是全空间的胀开满足目标刚性 (target rigidity)。这个证明是一个复杂的归纳过程，其中最主要的创新之处在于把射影几何的方法与理论通过极小有理切线簇引入到该问题的研究中。

3-b）向量群的等变紧化问题的研究

Wolf 奖得主 Hirzebruch（ICM1958 大会报告人）在 1954 年提出分类第二贝蒂数为 1 的向量空间的光滑紧化这一公开问题。迄今为止人们只能对不超过三维的情况回答该问题。1999 年 Hassett 与 Tschinkel (ICM2006 报告人) 开始考虑该问题的等变版本，

即把向量空间作为代数群来看，从而问题划归为分类第二贝蒂数为 1 的向量群的光滑等变紧化。 Hassett 与 Tschinkel 对于三维的情况进行了分类。后来 Chambert-Loire 与 Tschinkel 证明了向量群的光滑等变紧化的 Manin 猜想。

付保华与 Hwang 的合作 ([23]) 分类了 (2,1) 型的特殊双有理变换。这是经典代数几何的问题。 作为该定理的推论，他们分类出所有圆锥曲线连通 (conic-connected) 的第二贝蒂数为 1 的向量群的等变紧化。

付保华与 Hwang 合作 ([24]) 给出了一个方法来构造大量的（但是可能奇异的）向量群的等变紧化，由此提出并研究了欧拉对称簇。他们证明每个欧拉对称簇由一个符号系统 (symbol system) 所给出，并且在一个弱条件下，证明第二 Betti 数为 1 的向量群的光滑等变紧化一定是欧拉对称簇。他们猜想该弱条件可以去掉。

3-c ）法诺簇的形变刚性

称一个代数簇具有形变刚性，如果其任何形变都同构于它自身。可以想见，这样的代数簇非常特殊。菲尔兹奖得主 Kodaira 最开始研究代数簇的形变刚性问题，他证明了二维射影平面的形变刚性，并猜测任意维数的射影空间也具有形变刚性。萧荫堂在 1991 年证明了该猜想。此后 Hwang-Mok 运用 VMRT 理论来证明了皮卡数 1 的有理齐性簇在凯勒形变下具有刚性，除了 B_3/P_2(即 5 维二次超曲面的所有直线构成的代数簇)。此后李起峰证明了许多高皮卡数的有理齐性簇在凯勒形变下的刚性，此时也有许多的不具有形变刚性的例子。

任给半单伴随李群 G, de Concini-Procesi 构造了一个完美紧化 $\bar{G}$. 这是一个法诺簇，其皮卡数等于 G 的秩且其边界 $\bar{G}\setminus G$ 是一些光滑除子的并。Brion 与付保华（[25]）研究了完美紧化上的极小有理切线簇。付保华与李起峰在最近证明了 ([26]) 这些完美紧化在法诺形变下具有刚性。

Ruzzi 在 2010 年分类了皮卡数 1 的光滑对称簇，其中非齐性的一共有两类：一类是

与 G_2 相关的两个代数簇，另外一类是与复合代数 (composition algebra) 相关的四个代数簇。最近陈亦飞 - 付保华 - 李起峰合作证明了（[27]）后一类对称簇在凯勒形变下的刚性。

八、中国数学会陈省身奖背景介绍

国际数学大师陈省身教授是美籍华裔数学家、中国科学院外籍院士。他非常关心祖国数学事业的发展，几十年来在发展中国数学事业、培养数学人才等方面做了大量工作。为了肯定陈省身教授的功绩，激励中国中青年数学工作者对发展中国数学事业做出的贡献，中国数学会常务理事会决定设立“陈省身数学奖”。奖励范围为在数学领域做出突出成果的中国中青年数学家。“陈省身数学奖”由热心于发展中国科学与教育事业的香港亿利达（ELITE）工业发展集团有限公司刘永龄董事长倡议并捐资，中国数学会负责评奖与颁奖工作。自 1986 年设立以来，已连续举办了二十届。自 2022 年第十九届陈省身数学奖起，每年评选一届，每届评选不超过 2 人，每人奖金为 10 万元人民币。

九、致谢

特别感谢付保华研究员对本文初稿提出了宝贵的修改意见！感谢刘杰的帮助，孙沄淲提供了部分插图！

参考文献

[1] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry I*, Springer

[2] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer

[3] A. Jackson, *Interview with Heisuke Hironaka*, Notices of the American Mathematical Society, Volume 52, Number 9, October 2005.

[4] 陈荣凯 - 陈猛，*On explicit aspect of pluricanonical maps of projective varieties.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, 653–670. 2018

[5] C. Birkar, P. Cascini, C. Hacon, J. McKernan; *Existence of minimal models for*

varieties of log general type. J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 2, 405-468.

[6] 陈亦飞 - 王延泽 ; *A note on the Sarkisov program,* London Mathematical Society Lecture Note Series, 2024, 待发表

[7] S. Mori, *Projective manifolds with ample tangent bundles*, Ann. of Math. 110 (1979), 593-606

[8] 刘太平 - 陈荣凯，專訪森重文 (Shigefumi Mori) 教授 , 數學傳播 33 卷 4 期 , pp. 3-18, 2009 年

[9] K. Ueno, *Algebraic Geometry* 1, Translations of Mathematical Monographs, volume 185, American Mathematical Society

[10] 走近抽象数学的美丨未来科学大奖得主莫毅明研究成果解读，腾讯新闻《一起来唠科》 时间：2022-09-24

[11] J. McKay, *Graphs, singularities, and finite subgroups.* Proc. Sympos. Pure Math., 37, Amer. Math. Soc., Province, R.I., 1980:183-186.

[12] G. Gonzalez-Sprinberg, J L Verdier; *Construction geometrique de la correspondence de McKay*. Ann. Sci., 1983, 16: 409-449

[13] 付保华，几何与表示掠影。数学所讲座 2017

[14] C. Musli, Algebraic geometry for beginners, Hindustan book agency

[15] 付保华，*Symplectic resolutions for nilpotent orbits*, Invent. Math. 151 (2003), no. 1, 167–186.

[16] 付保华；*Poisson resolutions*, J. Reine Angew. Math. 587 (2005), 17–26.

[17] 付保华；*Extremal contractions, stratified Mukai flops and Springer maps*, Adv. Math. 213 (2007), no. 1, 165–182.

[18] 付保华 - 王金龙；*Motivic and quantum invariance under stratified Mukai flops*, J. Differential Geom. 80 (2008), no. 2, 261–280.

[19] 付保华 ; *On Q-factorial terminalizations of nilpotent orbits*, J. Math. Pures Appl. (9) 93 (2010), no. 6, 623–635.

[20] 付保华 -Juteau-Levy-Sommers; *Generic singularities of nilpotent orbit closures,* Adv. Math. 305 (2017), 1–77.

[21] Bellamy-Bonnafé- 付保华 -Juteau-Levy-Sommers, *A new family of isolated symplectic singularities with trivial local fundamental group*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 126 (2023), no. 5, 1496–1521.

[22] 付保华 -J.M. Hwang, *Classification of non-degenerate projective varieties with non-zero prolongation and application to target rigidity*, Invent. Math. 189 (2012), no. 2, 457–513.

[23] 付保华 -J. M. Hwang; *Special birational transformations of type (2,1)*, J. Algebraic Geom. 27 (2018), no. 1, 55–89.

[24] 付保华-J. M. Hwang; *Euler-symmetric projective varieties*, Algebr. Geom. 7 (2020), no. 3, 377–389.

[25] Brion- 付保华 , *Minimal rational curves on wonderful group compactifications,* J. Éc. polytech. Math. 2 (2015), 153–170.

[26] 付保华 - 李起峰；*Rigidity of wonderful group compactifications under Fano deformations,* J. Diff. Geometry, 待发表

[27] 陈亦飞 - 付保华 - 李起峰；*Rigidity of projective symmetric manifolds of Picard number 1 associated to composition algebras*,Épijournal Géom. Algébrique(2023), Art. 4, 18 pp. 庆贺 Voisin 教授 60 岁生日的专辑

陈亦飞供稿