数学聊斋连载

（连载二）

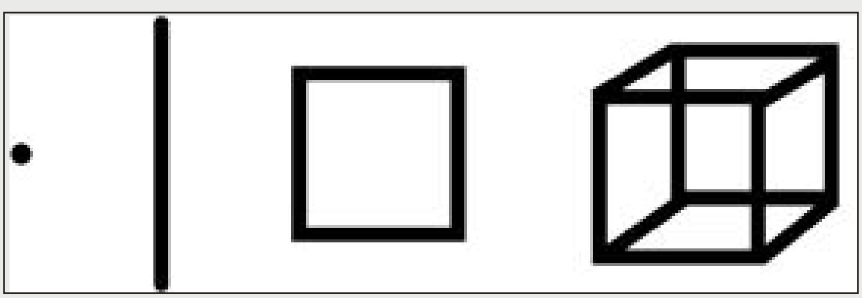
李尚志

人挤成照片之维数变化

有一次与几名中国学者和两名俄罗斯数学家一起吃饭。吃到后来照例问一个问题：吃什么主食？于是用英文问："Rice or noodle?"（米饭还是面条？）谁知这两位俄国人听不懂"noodle"(面条)这个词。几个中国人用手比划了好一会儿还是没能让他们搞懂。我急中生智地说："Rice is zero-dimensional, but noodle is one-dimensional."（米饭是零维的，面条是一维的。）不愧是数学家，两位马上就懂了。维数是数学上常用的概念，点的维数是 0，线的维数是 1，面的维数是 2，立体的维数是 3。说米饭是"零维的"，就是说它可以看成一个一个孤立的"点"组成的，说面条是"一维的"，就是说它是一条一条的线。依此类推，"飞饼"很薄，厚度可以忽略不计，可以认为是二维的；馒头自然就是三维的了。当然，严格说起来，米饭、面条、飞饼都是三维的。

说起维数，还有一件有趣的事：1969 年我第一次路过重庆，那时的公共汽车非常拥挤。有人形容这是"把人挤成照片了"。人是三维的物体，被挤成二维的照片，虽然太夸张了一些，但将拥挤的程度形容得活灵活现。

人是三维的物体，体积不为 0。挤成二维的照片，体积就变成了 0。行列式也是这样：三阶行列式表示平行六面体的有向体积，如果其中有某两行相等，就是说平行六面体的三条相邻的棱中有两条重合，平行六面体退化成平面图形，也就是被"挤成照片"了，体积变成 0。类似地，二阶行列式表示平行四边形的有向面积，如果两行相等，"平行四边形"的相邻两边重合，平行四边形退化为一条线段，面积为 0。一般地，n 阶行列式可以想象成一个 n 维立体的 n 维体积，如果它有某两行相等，"n 维立体"退化为 n-1 维或者更低维数的图形，"n 维体积"当然就等于 0。



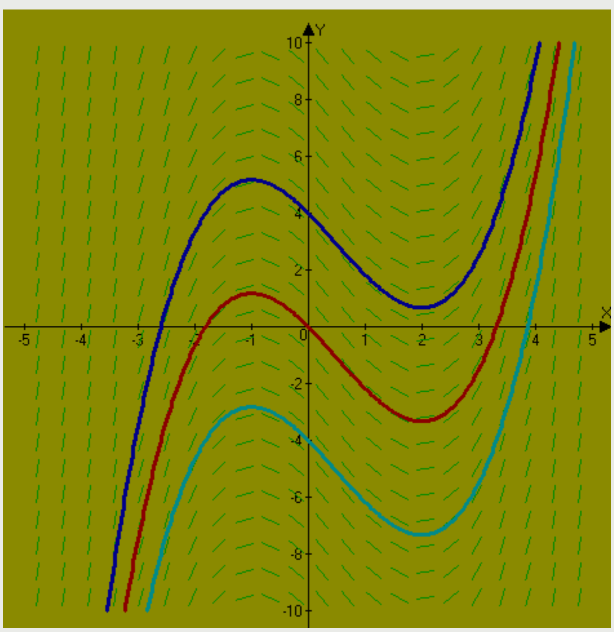
从左至右：0 维是一点，1 维是线，2 维是一个长和宽（或曲面），3 维是 2 维加上高度形成体积面

飞檐走壁之电影实现

——微积分基本定理

小时候看电影，看见电影中的人物轻轻一跳就上了房顶，觉得演这些人物的演员真是了不起。世界跳高记录也只有 2 米多一点，还不如这些演员跳得高。于是就想：如果这些演员到国际上参加跳高比赛，不就可以打破世界跳高纪录并且拿到世界冠军了吗？

后来知道了这些演员并不能从地上跳到房顶上，电影镜头可以通过特技来实现。比如说可以让演员从房顶往下跳到地面，将往下跳的过程用电影胶片拍下来，将拍得的胶片颠倒顺序由后往前放映，看到的效果就是从地面往上跳到房顶了，甚至可以从水中往上跳到跳板上。数学中像这样“倒过来放映”的事情也不少。



函数 $F(x)=x^3/3-x^2/2+c$ 的梯度场。虽然三条曲线相差常数，但它们在同一个 x 处的导数是一样的。

比如，如果已知运动物体的路程对时间的函数关系 $S=S(t)$，求导数就可以得到速度函数 $V=S'(t)$，这比较容易。反过来，要由速度 $V=S'(t)$，求路程 $S=S(t)$，就要做定积分，也就是要将所经过的时间划分成许许多多很短的时间间隔，在每一小段时间内将物体的运动近似地看成匀速运动求得一小段路程，将各段路程相加得到总路程的近似值，再让各时间间隔长度趋于 0，求极限得到总路程的准确值。但是，这样太困难，就好像从地面跳到房顶那样困难。我们也可以化难为易，采用“从房顶往下跳”、再“倒过来放映”的方法，找到一个函数 $F(t)$ 使得由它（通过求导数）得到的速度函数 $V=F'(t)$ 正好等于预先已知的 $V=f(t)$，这样就可以比较容易得到所需的 $S=F(t)$。这样的 $F(t)$ 称为 $f(t)$ 的原函数。通过这样“倒过来放映”的方法求定积分，这就是微积分基本定理。

另一个例子是由数列的通项公式 $a(n)$ 求前 n 项之和 $S(n)$。比如，已知 $a(n)=n^2$ 求 $S(n)$，也就是求前 n 个正整数平方和公式。中学数学中将这个公式作为数学归纳法的证明的例子来讲。但这个公式很难想出来，就好像从地面跳到房顶上那么难。反过来，如果已知数列的前 n 项和的公式 $S(n)$ 反过来求通项公式 $a(n)$，就很容易：

$$a(1)=S(1),\ a(n)=S(n)-S(n-1),\ n=2,3,\cdots$$

比从房顶跳到地面还容易。能不能用“倒过来放映”的方法，设法找一个 $S(n)$ 使它求出的通项

$$a(n)=S(n)-S(n-1)$$

正好等于已知的 n^2？容易发现，当 $S(n)$ 是 K 次多项式时，$S(n)-S(n-1)$ 是 $K-1$ 次多项式。因此考虑三次多项式 $S(n)=an^3+bn^2+cn$ 很容易通过解方程求得待定系数 a,b,c，使得

$$S(n)-S(n-1)=n^2$$

问题就迎刃而解了。

算 24 之不可能问题与难题

算 24, 是很多人都知道的一种用扑克牌玩的游戏。每张牌代表一个的正整数。(为了简单起见，可以将大小王去掉，并约定 J, Q, K 代表 10，A 代表 1。) 参加游戏的 4 个人每人出一张牌，4 张牌就代表了 4 个正整数。四个人就开始竞争，看谁最先将这 4 个正整数通过加减乘除算出 24 来，而且每个整数恰好用一次。所用的数学知识虽然只是简单的算术，但要算得又快又正确也不容易。并且还有很多难题出现。

例如，如果 4 个数是 1, 1, 1, 1，你能算出 24 吗 ? 这个题目很难，所有的数学家都算不出来。你会不会因此而拼命地算这道题，希望有朝一日将这道题算出来，将所有的数学权威都打倒? 只要你具有一点算术常识，就能看出用四个 1 按上述规则算出 24 是不可能的。因此你也不会白费力气去算这道“难题”。这不是难题，而是不可能问题。其实，现在有很多“民间数学家”拼命想解决的问题，比如用尺规作图三等分任意角、找出 5 次以上的一般代数方程的求根公式等等，也和这个问题一样是不可能问题。只不过这些问题的不可能性不容易看出，而是前辈数学家用较高深的数学知识才证明出来的。不过，既然已经证明了，就不再是难题，而是已经解决了的问题。

又例如，4 个数是 5, 5, 5, 1，让你算 24，你能算出来吗? 还有，如果 4 个数是 3, 3, 7, 7，或者 4, 4, 7, 7，或者 3, 3, 8, 8，你能算出来吗? 也许，经过努力之后你仍然算不出来，于是你相信它们都是不可能算出的。不过，如果你看见这样的答案:

$$5\times(5-1\div 5)=24$$

就知道用 5, 5, 5, 1 算 24 不是“不可能问题”，至多只能算是一个“难题”。其实，这个难题也不太难。只要你解除思想束缚，不要求中间每一步的计算结果都是整数，而允许出现分数，就能自己凑出答案来。不过，这样“凑出来”的答案让人感到是偶然的巧合。能不能有一个更自然的思考方法呢 ?

先用 5, 5, 1 算出 24：5×5−1=24。还剩下一个 5 没有用上。我们 5×5−1 进行恒等变形，利用乘法对于加法的分配律将两项的公因子 5 提到括号外：

$$24=5\times 5-1=5\times\left(5-\frac{1}{5}\right)$$

这样既保持了答数 24 不变，又将算式中两个 5 变成了右端的 3 个 5。

你不妨自己试一下，用类似的方法用4 , 4 , 7, 7 或3 , 3 , 7 , 7 算 24。3, 3, 8, 8 稍微不同，但也可以用同样的思路解决。$24=(3\times 8)\div(3\times 3-8)$, 分子分母同除以 3 得：

$$24=8\div(3-8\div 3)$$

当然，这个游戏两个人也可以玩。

你能用上面两幅图中的四张扑克牌算出 24 吗?

乐谱速记法

——不可能问题的可能解

1970 年我从中国科大数学系毕业，被分配到川陕交界的大巴山区教公社小学附设初中班。除了教数学、物理、化学、外语，还负责组织和指导学生的文艺宣传队。搞文艺自然就需要乐曲，那时也不可能像现在这样有录音机甚至 MP3，更不可能到网上下载，只能从广播里听。听见一些好听的乐曲，就想把它们的曲谱记下来。好在我有一点起码的音乐素养，听见乐曲就能够写出谱。问题是乐曲进行得快，人写得慢，一边听一边记录是来不及的。还没有把前一句记录下来，后面又演奏了很多句了。

怎样提高记录速度？当然，可以加强训练，尽量写得快些。我用的是简谱，也就是用表示数字的 1234567 来作音符。这些数字虽然简单，但乐曲中每一拍中往往就有好几个音，要在乐曲进行的这么短的时间内将表示这几个音的数字写完，无论怎样练习也没有这样快。

于是我想到将这些数字简化，自己规定一些尽可能简单的符号来表示各个音。最简单的符号就是一个点。能不能将所有的音都用点来表示呢？如果将所有的音都用一个点来表示，那就没有区别了，不能表示不同的音。要表示各个不同的音，各个符号的形状总得有区别。这样，每个符号就不可能太简单，书写的时间就无论如何追赶不上乐曲的进行。

由此看来，要用不同形状的符号来表示不同的音，记录速度是无论如何达不到要求的。

出路何在？我想起了自己在小学音乐课学过的一点点五线谱的知识，想到五线谱的基本原理：将同一个符号放在不同的位置来表示不同高低的音（五线谱符号形状的不同只是为了区别音的长短而不是区别高低）。为了提高记录速度，我想到可以用同一个最简单的符号——点放在不同的位置来表示不同的音。可以预先将表示声音高低的五条线画在纸上作成五线谱纸，在乐曲进行时将表示各音的点画在纸上。为了表示各个音的长短（节拍），也为了进一步提高记录速度，还可以将表示不同音的点用适当的方式连接成折线段。

在那些年，我曾经用自己发明的这个速记法记录了一些自己喜欢的乐曲。后来有了录音机，有了 MP3，这个速记法似乎没有用处了。但我还是利用这个速记法从所录的歌曲中记录下了一些乐曲的乐谱，只不过条件更好了，可以多放几次，直到全部记录下来为止。

以上设计的乐谱速记法，看起来似乎没有用到数学知识，但是思维的方式却是数学的。其中关键的思考是："只要形状不同，符号就不可能太简单，就不可能写得很快。要写得很快，一个出路是所有的音都采用最简单的符号点来表示。点的形状没有区别，只能用位置来区别。"这里并没有讨论哪一种具体的符号，而是讨论所有这些符号的共同点："用形状的不同来区别音的高低"，然后一网打尽全盘否定了具有这个共同点的所有的符号方案。**考虑许多不同东西的共同点，这正是数学中典型的抽象思维方式。**这与证明"尺规作图不可能三等分任意角"类似，不论哪种具体的尺规作图方法，不论是以前的人想过的，或者是以后的人将要想出的，只要具有共同点"符合尺规作图的规则"，就都讨论过了并且被一网打尽全盘否定了。当然，利用形状区别来记谱也有另外的出路：假如你的音乐素养足够好，就不需要记下全部音，只要记下一些重要的部分就可以将其它部分补充出来。不过，我还没有这样好的素养，所以只好采用这个笨办法了。