数学聊斋连载

（连载三）

李尚志

足球的圆与方

——概 率

人们常说“足球是圆的。”就是说足球比赛的胜负有偶然性。比如，在2006年世界杯的小组赛中，巴西一路顺风，法国勉强出线，但在淘汰赛中巴西却输给了法国。意大利是世界杯冠军，但是在世界杯结束之后世界足球队排名中，意大利还是只能排第二，巴西排第一，法国排第四。排名第四的队可以打败排名第一的队，这说明“足球是圆的”。这就是足球的魅力。如果都像隋唐演义里面写的，第二条好汉永远打不过第一条好汉，第三名以下的所有的好汉再加上千军万马都绝对打不过第二条好汉，一点悬念都没有，那还有什么意思？

我们有些人很喜欢说“足球是圆的”这句话。既然足球是圆的，中国队与巴西队比赛也有可能进球啊！也许有可能，但实际上一个球也没有进。既然足球是圆的，中国队有可能打赢韩国队呀！确实有可能，但实际上从来没有赢过。照此说来，圆圆的足球一遇到中国队就变成方的了？不然，每当中国队遇到弱队，媒体将这些弱队称为“鱼腩之旅”的时候，足球就变圆了，中国队几乎每次都是因为输给“鱼腩之旅”而失去了世界杯的出线权。

“足球是圆的”就是说足球比赛的输赢是不确定的，具有偶然性，在数学上叫做“随机事件”。既然胜负是偶然的，强队可能战胜弱队，弱队也有可能战胜强队，岂不是大家平等，没有区别了？于是，米卢带领中国队打进了世界杯，并不是他的水平高，而是因为他的运气好，是“神奇教练”。中国队输了不该输的球，也不是因为发挥不好或者指挥失当，而是因为运气不好。赢了是神奇，输了是“魔咒”起作用，因此也就没有什么经验或者教训可以吸取，只要像赌博一样一次又一次地赌下去就行了。

足球是圆的，输赢有偶然性。然而偶然性也服从一定的规律。我写过下面一首诗：“沙场百胜古来稀，九密一疏已足奇。祸福偶然存概率，风云多变泄天机”来说明世间万事万物的偶然性以及偶然性中的规律。打仗的胜负有偶然性，不可能百战百胜。出主意不可能不犯错误，九次考虑得周密，一次有疏漏，就可以说是神机妙算了。天有不测之风云，人有旦夕之祸福，都有偶然性，然而又都有规律——概率、天机都是规律。

比如，假定两个足球队在某一段时间内的水平基本保持稳定，在这段时间内两队的比赛中，如果甲队取胜的场数占70%，乙队取胜的场数占30%，就可以粗略地说甲队取胜概率为70%，乙队取胜的概率为30%，甲队比乙队实力强。如果两队再比赛若干场，胜负比例大体上仍会在这个比例附近波动。在每一次比赛中谁胜谁负具有偶然性，但也与两队教练的指挥是否恰当、队员发

挥是否正常密切相关。乙队发挥正常，就能实现 30% 的取胜概率，不至于场场皆输；如果发挥得好，还可能再向上波动超过 30%，但想超过得越多就越困难。比如可以达到 35% 或者 40%。但如果想要达到 60%，70%，靠临场发挥恐怕就做不到了，必须要提高取胜概率，这只能通过相当一段时间补充人才、训练、参赛锻炼来提高技术、战术、战略水平才能实现。

施拉普纳、霍顿是搞素质教育的，希望提高国足的取胜概率，但这在短时间内难以见效。米卢搞应试教育，让国足实现了已有的取胜概率，赢了该赢的队，唯一一次到世界杯去走了一遭。可米卢还是挨骂，骂他带领中国队到世界杯一球未进，一分未得。这就好比你是一个成绩差的中学生，请了一位“神奇教练”辅导你考上了大学，你却骂这位教练没有让你得诺贝尔奖。

骂米卢的人说米卢只不过是运气好，躲掉了韩国日本，才让中国队出了线。他们忘了，米卢之前的中国队每一次失去出线权都不是因为输给韩国日本，而是因为输给了“鱼腩之旅”。可以说，米卢之前的中国队似乎只怕日本、韩国、伊朗、沙特，取胜概率已经达到了世界杯出线应有的水平，只可惜在比赛时没有实现这个概率而向下波动了，因此“痛失”了出线权。米卢并不神奇，他只是让中国队正常发挥，实现了该实现的概率，并且向上波动了一点。骂米卢的人以为，米卢以后中国队的任务就不是从世界杯出线，而是到世界杯去进球和得分。结果怎么样呢？现在中国队已经不只是怕日本、韩国等四五个强队，而是不知道还有什么不怕的队了。也就是说，取胜概率不断下降，离出线的要求越来越远，失去出线权已经是正常发挥而不能说是“痛失”了，不能怪阿里汉和杜伊。

现在应当怎样办？应当先请施拉普纳或霍顿这样的“素质教育”教练将中国足球队的取胜概率恢复到米卢时代或米卢之前的水平，恢复到只怕四五个强队的水平。再让米卢这样的教练去实现这个取胜概率，重回世界杯。哪怕仍然一球未进、一分未得，也应当谢天谢地了。不过，实现这个计划需要时间，恐怕 4 年不够，需要两个 4 年。两个 4 年岂不是太久了吗？请回忆一下历史的教训：从 1982 年的第 12 届世界杯开始，就是因为不愿意等两个 4 年，我们付出了 5 个 4 年，才终于在 2002 年到世界杯去走了一遭。更何况，足球是圆的，如果准备等 8 年，说不定 4 年就成功了呢？

“没收非法所得”是惩罚吗

——数学期望

商家卖了假货，被市场管理部门发现了，要进行处罚。一种常见的“处罚”是“没收非法所得”。

卖假货的目的当然是为了赚钱。合法经营也能赚钱，但商家嫌赚得太少，通过卖假货（降低成本）来赚更多的钱。卖假货比不卖假货多赚的那部分钱就是非法所得。比如某件商品成本 400 元，合法经营卖 500 元，利润 100 元。如果假货的成本是 100 元，仍然卖 500 元，就赚了 400 元，比合法经营多赚 400 − 100=300 元，这就是非法所得。

卖假货被抓住了，当然应当没收这 300 元非法所得。但这是处罚吗？

“处罚”就是让干坏事的人遭受损失，使他以后不敢再干坏事。干坏事受到的损失怎样计算？应当与不干坏事相比较。干了坏事被抓住，与他不干坏事相比吃了亏，这才是“遭受损失”。以上述情况为例，合法经营卖一件商品赚 100 元；卖假货赚 400 元，被抓住之后没收了非法所得的 300 元，仍然赚 100 元，与不卖假货的收益相同，一点不吃亏，这能叫做惩罚吗？如果只是这样“惩罚”，商家一定会继续卖假货。

如果商家每次卖假货都被抓住，虽然每次都不吃亏，但也没有占便宜，他也就不必再干下去了。但事实上他不可能每次都被抓住。卖假货被抓住不是必然事件，而是随机事件。即使被抓住的概率很大，比如为 90%，平均每卖十次被抓住 9 次，这 9 次的非法所得都被没收了，但还有一次没被抓住，赚了 300 元，那么这十次卖假平均每次还赚 300/10 ＝ 30 元。这相当于将每次非法所得的 10% 返还给他作为奖励了，他肯定还会继续干下去。更何况，众所周知，商家卖假货被抓住的概率并没有高

达 90%，能够有 10% 就不错了。平均起来每卖十次假货只有一次被抓住。被抓住的这次收益为 0，其余 9 次每次赚 300 元，共赚了 300×9 元，十次卖假货平均每次收益为 300×9/10 = 300×90% = 270 元。所以，被抓住的那一次只没收本次的非法所得，不但不是处罚，反而是将其余 9 次的非法所得奖励给他。也就是只没收非法多得的 10%，将其余 90% 奖励给他。受到这样的奖励，他当然再接再厉继续干下去。

怎样才能让他卖假货没有收益呢？很简单：既然他被抓住的概率只有 10%，平均每十次被抓住一次，就应当在这一次抓住时将总共十次的非法所得全部没收。如果每次的非法所得是 300 元，就要没收 300 元的 10 倍。这就是“假一罚十”。他有 9 次没有被抓住，每次的非法所得 300 元，共得 300×9 元；被抓住这次，本来赚了 300 元，却被没收了 300×10 元，收益为 300 − 300×10 =−2700 元。因此十次的总收益为 300×9 + (−2700) = 0 元，刚好持平，既没有占便宜也没有吃亏。

有些“维护人权人士”很反对“假一罚十”，说：虽然卖假货不对，没收这一次的非法所得也就行了，罚十倍是侵犯了他的合法权益。其实，如果他被抓住的概率确实是 10%，罚十倍他也没有吃亏，因此也不是处罚，只不过是将他十次的非法所得全部没收。反正不吃亏，他就会继续干下去。因此，只有罚到十倍以上，才能让他吃亏，才是对他的处罚，才有可能让他不敢再干下去。或者保持“假一罚十”的处理办法，但是加大查处力度，提高卖假货被抓住的概率，比如被抓住的概率由 10% 提高到 20%。假设商家每次卖假的非法所得为 a，每次被抓罚款 10a，损失为 10a − a = 9a，也就是说收益为−9a。平均每十次有 8 次没有被抓，收益 a×8；2 次被抓，收益 (−9a)×2。十次总收益为 a×8 + (−9a)×2，平均每次收益为

$$
\begin{aligned}
&(a\times 8 + (-9a)\times 2)/10 \\
&\qquad = a\times 80\% + (-9a)\times 20\% \\
&\qquad = -10a
\end{aligned}
$$

也就是说：平均起来每次的损失为非法所得的 10 倍，这才是真正的“假一罚十”，对于卖假的商家才有一点震慑作用，使他以后不敢再干下去。更重要的是，一个商家受处罚，会对另外的商家产生震慑作用。这才是处罚的真正目的。

在以上的例子中，商家卖假，有两种可能的结果：被抓或者不被抓。不被抓的概率为 80%, 被抓的概率为 20%。不被抓的收益为 a，被抓的收益为− 9a，

平均收益 =
不被抓的收益 × 不被抓的概率
+ 被抓的收益 × 被抓的概率

这样算出来的平均收益称为他的收益的“数学期望”。我们希望打击卖假行为，就一定要让卖假收益的数学期望为负。而且，数学期望越小，也就是损失越大，打击的效果越佳。

一般地说，凡是在面临风险的情况下作决策，都需要用数学期望来衡量方案的优劣。

比如，有些人疯狂地参加买彩票之类的“博彩”活动，就是因为他们只想到自己中了奖能够赚多少钱，不考虑自己没中奖有多大损失。如果他算一算数学期望：

中奖的概率 × 中奖所得 +
不中奖概率 × （−不中奖的损失），

大概就不会那么狂热了。即使不做这么复杂的计算，只算一下在最坏的情况自己损失多少，衡量一下自己是否乐于承担这个损失。如果觉得还可以承担，输了也可以不必遗憾，输的钱就当是买了门票逛公园。

杯中水面与墙上光影
——生活中的圆锥曲线

如果问什么是圆锥曲线，很多中学生就会马上回答：到一个定点和一条定直线的距离之比为定值的点的轨迹，称为圆锥曲线。这是书上写的，当然不会错。但是，如果再问一句：“既然叫做圆锥曲线，总应当与圆锥有关系吧。这样定义的轨迹与圆锥有什么关系？”能够回