

# 关于广义相对论的 数学理论

## 爱因斯坦的引力场方程与黑洞

ukim

本文的目的是介绍广义相对论的数学背景  
以及关于数学家们对黑洞形成机制研究的历史

从上至下：爱因斯坦，闵可夫斯基，希尔伯特

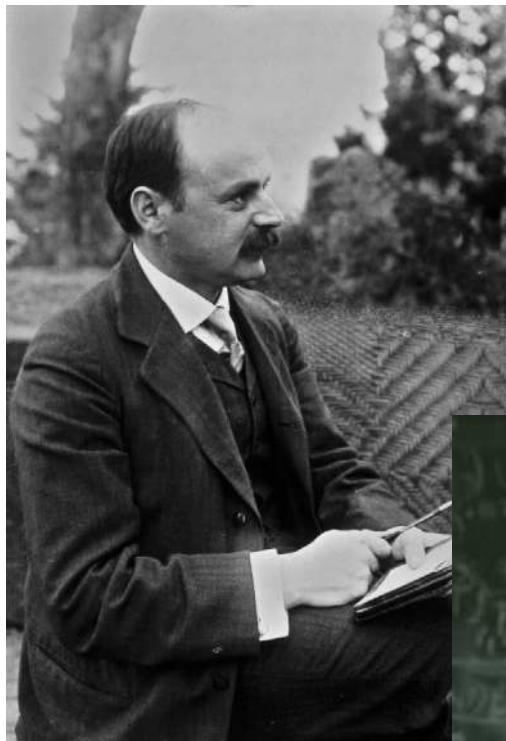
1915年11月25日，爱因斯坦向普鲁士科学院提交了广义相对论的论文。而在五天前，希尔伯特也向普鲁士科学院递上了一份关于引力学的手稿。长久以来，人们总是热衷于讨论究竟谁才是第一个提出广义相对论的人。然而这却并不是我们想要讨论的问题，我们关心的是这两份手稿里共同包含的一个方程，这个方程现在普遍被称为爱因斯坦引力场方程。

首先让我们尝试在不写下精确的表达式的情况下粗略地理解引力场方程。爱因斯坦认为，引力场或者物质的存在导致了时空的弯曲，而时空的弯曲恰恰体现了引力本身。引力场方程本身诠释这个想法。方程的右边是能量-动量张量，这个张量描述了时空中物质的分布；方程的左边可以被认为时时空本身 Ricci 曲率张量，恰如其名，这个张量描述了时空本身的弯曲。

从数学上来看，这个方程本身包含了10个变量和10个相互独立的子方程，并且是一个非线性的二阶双曲型非线性方程，仅仅写下这个方程就需要莫大的勇气和智能，更不要说是找到它的解了。实际上，关于爱因斯坦和希尔伯特对于

广义相对论的优先权之争就是围绕着谁先写下了这个方程。据说，1915年初期爱因斯坦对于如何把引力数学化的想法已经相当的成熟，唯一的缺憾就是未找到描述引力分布的场方程。是年七月，他应希尔伯特的邀请去哥廷根大学作了一系列毫无保留的演讲。恰如这个众所周知的调侃之言，“哥廷根马路上一个孩子，都可以比爱因斯坦更懂得四维几何”，希尔伯特由于比哥廷根马路上一个孩子懂得更多的四维几何，很快地得到了引力场方程的表达式，当然这丝毫不影响爱因斯坦的伟大，因为希尔伯特本人都说过，“发现相对论的，是作为物理学家的爱因斯坦，而不是数学家”。

言归正传，让我们致力于了解引力场方程的解。需要澄清的一点是，这个方程的解，不仅仅是一些经典意义上的场，除却这些描述物质分布的场以外，解方程还意味着来构造时空本身。换句话说，每一个解都对应着一个可能存在的宇宙。在这个方程刚刚诞生的时刻，关于爱因斯坦本人到底知道多少个解我们很难知道，但是无论如何，我们都可以断言他至少知道一个解，也就是现在被称为闵可夫斯基空间的解。



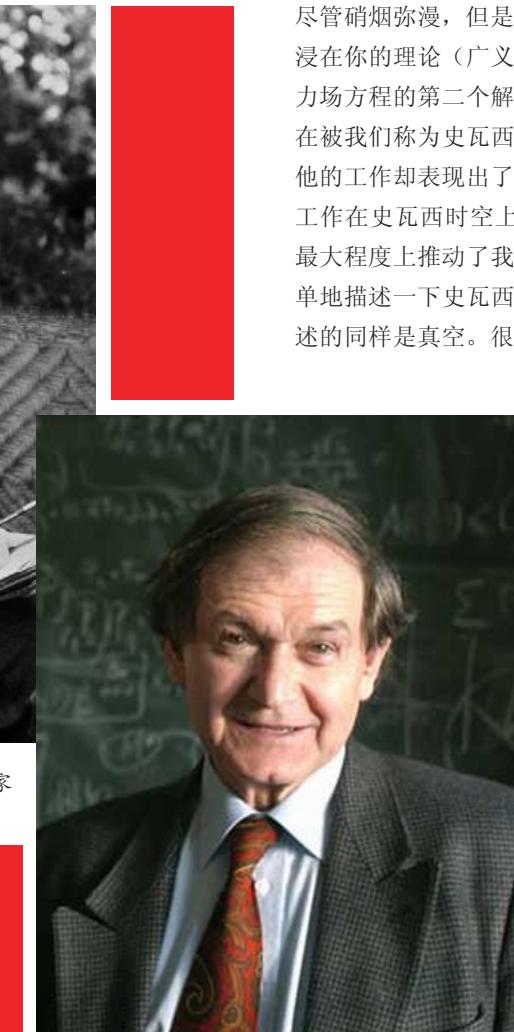
卡尔·史瓦西 (1873-1916), 德国天文学家

这个断言的逻辑不是基于闵可夫斯基曾经是爱因斯坦在大学时期的数学教授这一个事实, 而是因为闵可夫斯基空间是平坦而无弯曲的, 它的曲率是零。这是一个最最简单的例子, 在每一本关于四维几何的书上, 这个例子一定是第一个出现的。而且整套的广

义相对论在这个特殊的时空上退化为狭义相对论。我们提到过, 场方程的左边被 Ricci 曲率所决定。按照定义, Ricci 曲率是时空的曲率的某一些特殊的分量, 所以对于闵可夫斯基空间而言, 场方程的左边是零。毋庸置疑, 右边也必须消失。而我们又知道, 方程的右边描述了物质的分布, 所以对于闵可夫斯基空间而言, 是没有任何物质的, 也就是说这是场方程的一个真空解。

我们能不能找到其它的解呢?

同样是在 1915 年, 这一年的圣诞节之前的一天, 四十二岁的德国人卡尔·史瓦西 (Karl Schwarzschild) 从德军在俄国方面的前线给爱因斯坦写了一封与战争毫无瓜葛的信, 他提到: “就像你读到的一样, 这场战争对我还算不错,



罗杰·彭罗斯爵士, 牛津大学教授, 1988 年沃尔夫奖获得者

尽管硝烟弥漫, 但是我还是能甩掉他们而随心所欲地沉浸在你的理论 (广义相对论) 之中”。随后, 他附上重力场方程的第二个解, 这个在一战战壕中诞生的宇宙现在被我们称为史瓦西解。史瓦西在第二年的三月去世, 他的工作却表现出了令人惊讶的活力, 越来越多的研究工作在史瓦西时空上展开, 尤其是 Kruskal 后来的工作最大程度上推动了我们对史瓦西时空的理解。让我们简单地描述一下史瓦西解, 它是一个球对称的精确解, 描述的同样是真空。很多物理模型都可以构架在这个时空之上, 比如说一个球状星球以外的时空。在这个模型下, 通过计算, 我们可以容易地检验光在引力作用下的弯曲, 近星点的进动和引力红移等现象。然而, 这些都不是重点, 史瓦西解最让人振奋让人激动的一面是: 它预言了黑洞。

黑洞, 现在已是妇孺皆知的名词, 用妇孺皆知的说法, 是说一个星体的密度大到一定的程度, 其引力使得附近的光都无法逃逸, 那么既然我们看不到有光线从这个星体发出, “黑”的由来也就理所当然了。我们并不关心黑洞的精确定义而把精力放在史瓦西时空 (在 Kruskal 工作的意义下) 的一个特定的区域上。在这个区域

里, 我们通过计算类光的测地线, 可以发现光线永无逃逸的可能性, 也就是说, 这真的是黑洞的内部 (在正确的定义下, 这也是黑洞)。

自从黑洞被史瓦西解所预言的那一刻开始, 它就成为了广义相对论的核心论题。专家们对它既爱且恨, 直到今日, 尽管我们对黑洞的理解有了长足的进步, 但是诸如黑洞的基本性质和黑洞的形成等很多基本问题仍然需要进一步的理解。在史瓦西时空里面, 如果一个勇敢的观测者生活在黑洞的内部, 那么他会发现对于一个二维的球面而言, 如果我们由里向外沿着光线传播的方向将它撑大一点点的话, 它的面积非但没有像我们想象的那样理所当然的增加, 反而减少。牛津大学的数学物理学家罗杰·彭罗斯 (Roger Penrose) 是



Demetrios Christodoulou,  
希腊籍数学和物理学家，普林斯顿大学教授

第一个体会到这个简单现象背后的深刻意义的人，他把这种球面称为捕获曲面，其意义不言而喻：由于沿着光线传播的方向球面的面积越变越小，最后会坍塌为一个点，这样子光好象被这个曲面所捕获而在曲面坍塌的时刻最后也消失。彭罗斯著名的奇点定理说，在合理的物理假设下，如果时空当中存在一个捕获曲面的话，那么经过一个特定的时间之后，任何光不能被延伸，也就是说在未来有一个奇点，一切光都会消亡。直白的说，这个定理传达了一个骇人听闻的消息，一段时间之后，整个宇宙都会在引力的作用下而毁灭。值得庆幸的是，这个“一段时间之后”是相当长的一段时间。这里需要一提的是，霍金有一个相当类似的定理，说如果我们向过去做时间旅行的话，我们会最终到达一个起点而不能够进一步的倒退到更加古老的过去，这个起点现在被称为“大爆炸”。那么，彭罗斯的定理和黑洞又有什么关系呢？根据彭罗斯的一个猜想，物理学家认为所有的在未来的奇点都藏在黑洞里面。这样子，在这个猜想成立的情况下，有奇点就必有它的藏身之处——黑洞。另一方面，彭罗斯的定理又说有捕获曲面就有奇点。这样子，是否存在捕获曲面就成为辨别是否存在黑洞的重要依据。

我们再次回到爱因斯坦的重力场方程，从它简洁又不失华丽的外表，恐怕没有人能看到场方程竟然预言了黑洞的存在。近一个世纪后的今天，对于现实世界的人们来说，我们关心如何透过场方程读出未来的劫数；在数学家和物理学家

眼中，这意味着能否把重力场方程当成一个发展性的方程来求解。Choquet-Bruhat 女士是这个方面的先驱，通过引进近代的偏微分方程的技术，她证明了至少对很短时间内要发生的事情，我们还是相当有把握预测的。由于她的工作运用了极为繁琐的数学，数学家们欢欣鼓舞，他们再次找到了一个借口可以插手物理学家的事务。当然，这里的问题仍然相当的棘手，一些貌似简单的问题令他们一筹莫展。我们举一个具有划时代意义的猜想，叫做正质量猜想。在广义相对论中，质量的概念还是存在，但是质量是否是正的却变得不清楚了。直到上个世纪八十年代，这个猜想才第一次被理查德·舍恩 (Richard Schoen) 和丘成桐所证明，之后不久威腾 (Witten) 又给了另一个证明。正质量猜想不仅仅在广义相对论中，就是在微分几何当中也有着众多的应用。

由于闵可夫斯基空间的质量是零，根据正质量猜想它是具有最小的质量的时空，大家都猜想他应该是“稳定的”。这个稳定的意思是什么呢？简单来说，如果我们知道另外一个时空和闵可夫斯基空间在一个时刻相差无几的时候，那么对于无论多么遥远的未来，我们都可以说明这两个时空仍然非常近似。赫里斯托祖 (Christodoulou) 和 Klainerman 证实了这个猜想的正确性，他们在长达 600 页的论证中，通过发展了对重力场方程做能量估计的技术来理解引力波的衰减机制，并最终说明闵可夫斯基空间的稳定性。由于闵可夫斯基空间不含有黑洞，在这套理论开始发展的几年里面，没有人认为它对于理解黑洞有什么帮助。赫里斯托祖自有远见，他观察到在重力场方程中，不同的分量在引力波的传播的机制中扮演着不同的角色，这个观察早在他与 Klainerman 的证明中已彰显出其无可替代的重要性。如果要理解黑洞的形成，直观告诉我们，时空的某一个部分要相当的扭曲，这恰恰对应了赫里斯托祖发现的短脉冲初始值。他论证道，如果给一个合适的短脉冲初始值，在一段时间之后，仍然基于引力波的衰减机制，一个捕获曲面就可以产生。这应该是迄今为止，通过爱因斯坦的重力场方程对黑洞形成的数学机制最有意义的一个尝试。

在今后的研究中，关于黑洞和我们的宇宙，爱因斯坦的重力场方程还会说些什么呢？让我们拭目以待。

作者毕业于北京大学数学系，2010 年获得普林斯顿大学数学博士学位。为本刊特约撰稿人。