



从哥德巴赫说开去

贾朝华

很多中国人是从徐迟的一篇报告文学中知道哥德巴赫这个名字的。在这篇文章里，徐迟讲述了数学家陈景润刻苦钻研，终于在哥德巴赫猜想研究上取得重大突破的真实故事。文章最初刊登在《人民文学》杂志1978年第1期上，标题就是“哥德巴赫猜想”，《人民日报》和《光明日报》随即转载，一时间传遍全国。

从那以后，人们对于陈景润的故事津津乐道，也常用“哥德巴赫猜想”来形容极其困难的问题或难以企及的目标。然而，大家对于哥德巴赫本人却了解甚少。本文我们就来说说哥德巴赫和他那个时代的一些事情。

小城故事

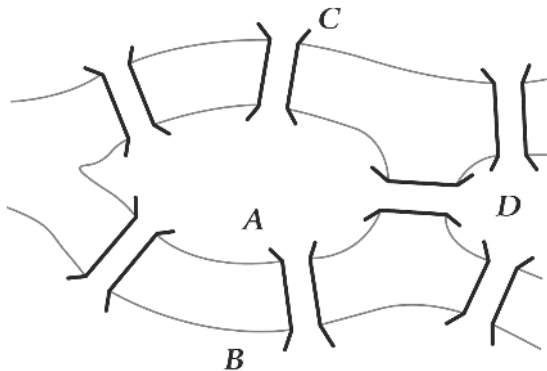
哥德巴赫 (Christian Goldbach), 1690 年 3 月 18 日出生于普鲁士的哥尼斯堡, 生长在一个官员家庭。

普鲁士是德意志的一个邦国。当时的德意志虽然称为“德意志神圣罗马帝国”, 但诸侯争霸, 邦国林立, 皇帝的控制力有限。而且皇帝不是世袭的, 是由一些诸侯选举出德意志国王, 经罗马教皇加冕后才成为皇帝, 那些有资格选举国王的诸侯称为“选帝侯”。

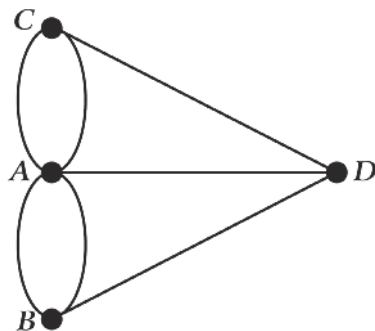
勃兰登堡选帝侯兼普鲁士公爵腓特烈三世因积极支持皇帝对法国宣战, 被授予普鲁士国王称号。1701 年, 他在哥尼斯堡加冕为王, 开启了普鲁士王国的基业。此后, 普鲁士迅速崛起, 通过战争和政治手段, 终于在 1871 年, 由国王威廉一世和“铁血宰相”俾斯麦完成了德意志的统一。

哥尼斯堡 (Königsberg) 是一座历史名城, 德国的很多重要历史事件在这里发生。第二次世界大战德国战败后, 根据“波茨坦协定”, 哥尼斯堡划归苏联, 改名为加里宁格勒。加里宁去世前是苏联名义上的国家首脑, 也是一位教育家, 他曾说过: “很多教师常常忘记他们应该是教育家, 而教育家也就是人类灵魂的工程师”, 后来人们就经常说“教师是人类灵魂的工程师”。

在秀丽的小城哥尼斯堡, 普雷格尔河贯穿全城, 给城市带来了灵气。这条河有两条支流, 它们环绕着一个小岛, 在这两条支流上有七座桥, 见下图。城里的居民常到这里散步, 久而久之, 人们就有了这样一个问题: 能不能既不重复又不遗漏地一次走遍这七座桥? 这就是有名的“哥尼斯堡七桥问题”。



哥尼斯堡七桥



哥尼斯堡七桥的抽象图

在俄国圣彼得堡的大数学家欧拉知道这个问题之后, 就进行了研究。他将陆地和小岛用点表示, 而将七座桥用线表示, 得到了一个用七条线组成的图形, 见上图。于是, 七桥问题就变成了能否一笔画出这个图形的问题。1736 年, 欧拉用严格的数学方法证明了这种画法是看不存在的, 就是说不可能既不重复又不遗漏地一次走遍这七座桥。对于类似的更一般的图形, 欧拉也找到了一个简便的原则, 可以判定它能否一笔画出, 这就是“一笔画定理”。欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的研究, 推动了一个重要的数学分支的产生, 这个分支叫做拓扑学。

哥德巴赫在家乡的哥尼斯堡大学学习数学和医学。因为数学这种理论学科, 工作机会相对少, 所以要学一门像医学这样的实用学科。当时的一些数学家, 如约翰·伯努利和丹尼尔·伯努利都获得过医学博士学位, 这有点像今天有些人同时学习数学和计算机科学一样。

哥德巴赫 20 岁大学毕业, 和大多数这个年龄的青年人一样, 渴望出去看看外面的世界。加上家庭状况不错, 于是, 1710 年之后, 哥德巴赫就云游欧洲, 结识了不少当时欧洲的数学名家。

外面的世界

哥德巴赫首先去莱比锡, 拜访了大数学家莱布尼茨。当时莱比锡在萨克森选帝侯腓特烈·奥古斯特一世的治下, 不属于普鲁士王国, 因此, 从哥尼斯堡到莱比锡就算是出国了。

莱布尼茨 (G. W. Leibniz, 1646-1716) 对于数学的最大贡献是发明了微积分, 微积分在自然科学、社会科学和日常生活中都有广泛的应用, 它的发明也给数学的发展带来了繁荣的



莱布尼茨 (1646-1716) 与牛顿相互独立地发明了微积分

局面，意义之大无法估量。由于莱布尼茨与牛顿对于微积分发明的优先权问题，导致了欧洲大陆数学家与英国数学家一个多世纪的争论，最终人们公认，莱布尼茨与牛顿相互独立地发明了微积分。

莱布尼茨还发明了二进位制，就是用 0 和 1 来表出所有的正整数，这和我们平常用的十进位制不同。电子计算机都是用二进位制的，这是因为电流的状态只有两种——断电和通电，它们分别对应于 0 和 1。莱布尼茨对于中国北宋时期邵雍的“伏羲六十四卦图”很感兴趣，他用二进位制合理地解释了“六十四卦图”。此后，在世界范围内兴起了对于易学的研究，人们对于中国的这门古老学问兴趣日增。邵雍是我国北宋时期的哲学家，一代易学大师，他对于天地运化、阴阳消长有着独到的见解。虽然现在很少有人知道邵雍了，但他说过的“一年之计在于春，一天之计在于晨，一生之计在于勤”成了很多人的座右铭。

作为一位哲学家，莱布尼茨在哲学史上享有崇高的地位，他的科学思想与哲学思想往往是相互联系和促进的。莱布尼茨开创了德国的自然哲学，他的学说和其弟子沃尔夫的理论相

结合，形成了莱布尼茨-沃尔夫理论体系，极大地影响了德国哲学的发展，尤其是影响了康德、黑格尔等人的哲学思想。

此外，莱布尼茨在数理逻辑、物理、化学、光学、地质学和生物学等诸多方面都有杰出贡献，无疑是他那个时代最为博学的人。英国哲学家、数学家和逻辑学家罗素在他的《西方哲学史》一书中，称莱布尼茨是“一个千古绝伦的大智者”。

在现实生活中，莱布尼茨是积极入世的。他大力推动柏林科学院的建立，并于 1700 年出任首任院长。1711 年至 1716 年期间，俄国的彼得大帝几次听取莱布尼茨关于建立科学院的建议，并授予他带薪的数学和科学宫廷顾问头衔。据说莱布尼茨还写信给中国清朝的康熙皇帝，建议成立北京科学院，可惜未被采纳。

莱布尼茨晚年主要效力于汉诺威王室，然而新上台的选帝侯乔治·路德维希对他不太感兴趣，使得莱布尼茨感到政治上有些失意。另外，莱布尼茨终生未婚，不教书，也不进教堂，行为举止和当时上流社会的规范不太合拍，因而门庭有些冷落。

哥德巴赫的到来，使莱布尼茨感到很高兴，对于这位朝气蓬勃的晚辈，莱布尼茨少不了给予指点和教诲。莱布尼茨广博的学识和高屋建瓴的观点，也使哥德巴赫终身受益。

接着，哥德巴赫又到伦敦访问棣莫弗。棣莫弗 (De Moivre, 1667-1754) 是法国人，因躲避宗教迫害移居英国，以后就一直生活在英国。

棣莫弗最擅长的研究领域是概率论，并对此做出了很大的贡献。牛顿对棣莫弗的著作《机会的学说》很欣赏，当学生向他请教概率论问题时，牛顿常常介绍他们去找棣莫弗，他认为棣莫弗在这方面比他强得多。

概率论是研究偶然性（或者随机现象）的数学分支，它的起源与掷骰子赌博的输赢问题有关。16 世纪意大利文艺复兴时期的学者卡尔达诺对此就有研究，并著有《论赌博游戏》一书。17 世纪中叶，法国宫廷贵族中盛行掷骰子游戏，他们常就一些输赢概率的问题请教数学家帕斯卡尔。帕斯卡尔

哥德巴赫的到来，使莱布尼茨感到很高兴，对于这位朝气蓬勃的晚辈，莱布尼茨少不了给予指点和教诲。莱布尼茨广博的学识和高屋建瓴的观点，也使哥德巴赫终身受益。



闻名于世的伯努利家族在风景如画的瑞士繁衍生息

在与费尔马的通信里，常常讨论这类问题。当时旅居巴黎的荷兰数学家惠更斯，知道这些问题后也很感兴趣，还为此写了专著。后人认为，帕斯卡尔、费尔马和惠更斯是概率论的创始人。

第一个对概率论做出重大理论贡献的是雅各布·伯努利，他证明了“大数定律”，棣莫弗将它精细化为“中心极限定理”。这类定理的大致意思是说：如果只做一次试验，某种现象的出现会是偶然的；但如果是做大量重复试验的话，那么这种现象出现的次数在总试验次数中所占的比例相当稳定，呈现出一种必然性。正如棣莫弗在《机会的学说》一书中所指出的那样：尽管机会具有不规则性，但由于机会无限多，随着时间的推移，不规则性与秩序相比将显得微不足道。

棣莫弗积极推动概率论在社会科学中的应用，他还参与研究保险业中的实际问题并写有专著，为保险业合理处理有关问题提供了依据，书中的一些内容被后人奉为经典。

复数理论中有棣莫弗定理，它的表述是这样的：

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

其中 $i = \sqrt{-1}$ ， n 是正整数。这个定理的一般形式和完整证明，后来由欧拉给出。我们取 $n = 2$ ，得到

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta, \\ = \cos 2\theta + i \sin 2\theta, \end{aligned}$$

比较等式两边的实数部分和虚数部分，可得

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

这是三角学中关于余弦函数和正弦函数的倍角公式。如果取 $n = 3, 4, \dots$ ，可以得到更复杂的倍角公式。有了棣莫弗公式，只要通过简单的推导，我们就可以得到这些倍角公式，而不必去死记硬背它们。

在那个时代，数学的分科远没有现在这样细，数学家的兴趣和知识面都比较广泛。哥德巴赫对于理论研究和实际问题都很有兴趣，据记载，他还和炮兵司令一起研究过弹道学的问题，因而，哥德巴赫会和棣莫弗谈得来。



后来，哥德巴赫去了欧洲其它一些城市，分别见到伯努利家族的几位成员，其中丹尼尔·伯努利和哥德巴赫关系密切，他们之间比较频繁的通信，一直持续到了1730年。

16世纪末，伯努利家族的祖辈为躲避宗教迫害，从比利时的安特卫普辗转来到瑞士的巴塞尔，在那里繁衍生息。这个家族以经商为传统，也有个别人行医，似乎都和数学沾不上边。但在一个世纪之后，却在三代人中出现了八位数学家，其中几位有相当大的成就。提起伯努利家族，人们在谈论他们的数学的同时，还会讨论关于天才与遗传之类的话题，这些话题往往比数学更吸引人。

上面说到的雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli, 1654-1705）是这个家族的第一位数学家，他除了在概率论上做出重大贡献外，还在解析几何、无穷级数、微分方程和变分法等诸多方面均有杰出的工作，数论里重要的“伯努利数”和“伯努利多项式”是他的创造。解析几何中的“伯努利双纽线”是雅各布提出来的，但他更钟爱对数螺线，这种曲线经过多种几何变换，依旧还是它本身，性质非常奇妙。在雅各布的墓碑上，就刻有对数螺线，并有这样的铭文——“纵然变化，

依旧故我”，这也许寓意着来世还当数学家。

因为雅各布去世较早，所以哥德巴赫没有机会向他请教。但雅各布还有两个弟弟，尼古拉·伯努利一世（Nicolaus Bernoulli I, 1662-1716）和约翰·伯努利（Johann Bernoulli, 1667-1748），也都是出色的数学家，其中约翰比雅各布的研究范围更广泛且更加多产。

约翰不仅在数学上作了大量的工作，他还解释了力学中的虚位移原理，写了关于潮汐和航行以及行星轨道的数学原理的文章，提出了光学中的焦散面理论等。他的最流行的成果，当属大学微积分教程里总要讲到的“洛必塔法则”。当时，约翰的学生洛必塔编写了一本有影响的书《无穷小分析》，把约翰的这个结果收了进去，后世就误称为“洛必塔法则”。这里面还有一段故事，在《数学文化》创刊号中，万精油先生在“数学史上的一桩错案”一文里有详细的讲述，说起来都是银子惹的祸。

约翰有三个儿子，都是优秀的数学家，其中丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli, 1700-1782）被认为是伯努利家族中最杰出的。此外，约翰还培养出了一位非凡的学生欧拉，这是很值得他骄傲的。

丹尼尔从小受到家庭的熏陶，在研究风格上继承了约翰的传统。他一生著述丰富，还因天文学、地球引力、潮汐、磁学、船舶航行的稳定性以及振动理论等多方面的研究成果，先后十多次获得巴黎科学院的奖赏，他的获奖次数可以和欧拉相比，因而具有了广泛的知名度。

据记载，丹尼尔聪慧过人，富有想象力。现存画像上的丹尼尔，明目慧瞳，俊朗飘逸，一表人才。丹尼尔曾被人误认为是个公子哥儿，因而流传下来了一段故事。究其原因，大概是在公众的眼里，大学者都得像老树般的苍劲。

伯努利家族后面的成员在数学上不那么突出，这会让人以为这个家族的基因有所衰退。其实不然，有人根据家系查询过，这个家族后来至少有120多位成员，在神学、法学、医学、文学、艺术、管理和科学的其它门类中取得了成功，有的还卓有成就，伯努利家族的香火相当旺盛。

欧洲的旅行，使哥德巴赫不断开阔眼界，增长学识，还在



从左至右：雅各布·伯努利，约翰·伯努利，丹尼尔·伯努利

学术圈里交了不少朋友，收获颇丰。当然，他难免有一点思乡，想念故乡的亲人朋友和美景美食。

说起德国料理，我们能想到的无非是香肠和马铃薯（俗称土豆）之类，可称道的不多。但有一样东西还是值得推荐的，就是德国咸猪手。先将猪的前蹄用百里香、月桂叶、胡椒粉和精盐腌制，再用笼屉去蒸，然后经过炉火的长时间烘烤，出炉后的咸猪手，表皮金黄诱人、酥香可口，里面色泽枣红、清香弹牙。佐以德国特有的甘蓝泡菜，酸度适中，甜爽去腻。配酒最好是全麦啤酒，口味醇厚，麦香浓郁，与咸猪手十分相宜。餐后再来一块美味的黑森林蛋糕，浓郁的巧克力味道漫溢口中，很难用文字去描述了。

新奇的土地

1724年，哥德巴赫回到了故乡哥尼斯堡，又见到亲人和朋友，自然是十分的高兴。空闲时到普雷格尔河畔走走，呼吸清新的空气，看看熟悉的景色，很快就从旅途的疲惫中恢复过来了。

此时的哥德巴赫已经34岁，过了而立之年，该看的人都看了，该见的世面也见过了，是到好好规划一下未来的时候了。

事也凑巧，就在哥德巴赫回家后不久，正好有两位学者路过

哥尼斯堡，他们是去圣彼得堡参与圣彼得堡科学院筹建工作的。在与他们的言谈中，哥德巴赫了解到一些基本情况，感觉正对心思。再说他从未去过俄罗斯，那里对他来讲是一个新奇的地方。于是，哥德巴赫精心准备了一份学识证明人名单，在第二年圣彼得堡科学院正式成立之后，就将申请材料寄了过去。

彼得大帝几次听取莱布尼茨的建议之后，终于在1724年1月颁布谕旨，决定成立圣彼得堡科学院。彼得大帝拟定了科学院章程，其中强调，科学院的理论研究应对与国家实际利益密切相关的问题做出贡献。章程中的重要一条是，邀请国外的一些知名学者到科学院工作，以带动俄罗斯科学的发展。彼得大帝于1725年2月逝世，圣彼得堡科学院的正式建立是由他的妻子、继任沙皇叶卡捷琳娜一世完成的。

“沙皇”是俄国皇帝的称谓，俄语中的“沙”是拉丁语“凯撒”的转音，“沙皇”的中文译名是采取一半音译、一半意译的方式。

彼得一世（1672-1725）是俄国罗曼诺夫王朝的第四代沙皇，被公认为是俄国历史上最杰出的皇帝。他一生励精图治，锐意改革，把俄国从落后的封建国家变成了欧洲的一个

此时的哥德巴赫已经34岁，过了而立之年，该看的人都看了，该见的世面也见过了，是到好好规划一下未来的时候了。

强国。1721年，在俄国打败北方强国瑞典之后，俄国枢密院授予彼得一世“全俄罗斯皇帝”和“祖国之父”称号，后世尊称他为彼得大帝。

彼得大帝（Peter the Great, 1682-1725 在位）身高 2.05 米，仪表非凡，精力充沛。他除了在政治和军事方面极有天赋之外，还喜欢做木工、车工等手艺活儿，而且相当专业。但彼得更喜欢的是航海和造船，为此在 1697-1698 年间，他专门组织了一个约 250 人的大考察团，到荷兰和英国学习。彼得隐姓埋名，混在考察团中，对外身份是“炮手米哈伊洛夫”。在荷兰期间，彼得和同伴们在专家的指导下，成功制成一艘三桅巡洋舰。在彼得的毕业证书上有这样的评语：米哈伊洛夫聪明勤奋，已经学会了造船专家的各项业务。到了英国后，彼得除了学习造船外，还参观了牛津大学、格林威治天文台和造币厂等。彼得大帝的这次出行，对他日后制定各项政策有很大的影响。

俄国大诗人普希金这样评述彼得大帝：他“时而是学者，时而是英雄，时而是航海家，时而是木匠”。不仅如此，彼得

还身体力行，努力学习西欧的生活方式，革除俄罗斯的传统陋习。例如，他明文规定，要用德国或法国式服装，代替俄罗斯传统不灵便的服装；他亲手剪掉了一些贵族的胡须，并对蓄胡者课以重税；他经常举办法国式的大舞会，亲自做示范表演；他还指示编写《青年守则》，用以教导贵族子弟的行为规范。经过几十年的教化，俄国上流社会的礼仪风范就与西欧没什么差别了。

彼得大帝的改革，也遇到了很大的阻力，有时充满了血雨腥风。就在他随考察团出国期间，国内发生了近卫军兵变，彼得立即匆匆赶回，镇压了兵变。俄国著名画家苏里科夫，在他的历史画“近卫军临刑的早晨”里反映了这一事件。画中的背景是莫斯科克里姆林宫外墙和瓦西里大教堂的圆屋顶，近景挤满杂乱的人群，是悲哀的近卫军和痛哭的家属，远处身穿海蓝色军装的彼得大帝骑在马上，他的背后是森严的行刑队和一排绞刑架。画面的气氛相当凝重，充满悲剧色彩。

彼得大帝的儿子阿列克谢也反对改革，还企图举兵篡位，被彼得送进监狱，死在那里。另外，4 岁的王储也早早夭折。



彼得大帝 (1682-1725)



叶卡捷琳娜一世 (1684-1727)



1733 年安娜女沙皇时期的 1 卢布银币

彼得因而忧郁成疾，于 1725 年 2 月去世，死时不到 53 岁。

继任女沙皇叶卡捷琳娜一世（1684-1727）和历史上的叶卡捷琳娜大帝不是一个人，她的本名叫玛尔塔。玛尔塔是农夫的女儿，嫁给了一个瑞典骑兵，在俄国与瑞典的战争中被抓，后来被送给了彼得的重臣缅希科夫。彼得在缅希科夫家里遇到玛尔塔，两人一见倾心，结下了不解之缘。玛尔塔相貌出众，妩媚动人，而且温柔有礼，因而俘获了彼得的心。

叶卡捷琳娜一世（1725-1727 在位）文化水平不高，执政能力有限，朝廷大事基本上交给她的老东家缅希科夫打理。虽然叶卡捷琳娜一世政绩平平，但她对于执行彼得大帝的遗愿确是全心全意的，圣彼得堡科学院的正式建立是她政治生涯中最光辉的一笔。圣彼得堡科学院是苏联科学院和俄罗斯科

学院的前身，它的建立开启了俄罗斯近 300 年的科学传统，意义非常深远。

哥德巴赫向圣彼得堡科学院递交申请之后，不久便被聘为科学院的数学教授和记录秘书。1725 年，哥德巴赫踏上俄罗斯这片新奇的土地，从此他的命运就和俄罗斯紧密地联系在一起了。

哥德巴赫向圣彼得堡科学院递交申请之后，小费了一点周折，不久便被聘为科学院的数学教授和记录秘书。1725 年，哥德巴赫踏上俄罗斯这片新奇的土地，从此他的命运就和俄罗斯紧密地联系在一起了。

哥德巴赫当时的年薪为 600 卢布，合月薪 50 卢布。上图是 1733 年安娜女沙皇时期的 1 卢布银币，正面是女皇头像，反面是俄罗斯国徽双头鹰图案，银币重 25.6 克，这和中华民国初期 1 银元的分量差不多，叶卡捷琳娜一世时期的卢布可能大致相同。哥德巴赫到俄国后，生活应该还是比较宽裕的，在学术研究之余，还做点行政工作。

在牛顿和莱布尼茨发明了微积分之后，伯努利家族和欧拉等一些数学家又进一步推动微积分理论和技巧的发展，从中产生出了像无穷级数、常微分方程、偏微分方程、微分几何和变分法等一些重要的数学分支，这些分支合起来，形成一个被称为“分析”的数学研究领域，这个领域与几何、代数等领域一起，构成了理论数学的核心部分。对于当时正在蓬勃发展的这些数学分支，哥德巴赫都很关注和感兴趣，他自己也写过若干篇关于无穷级数和微分方程的论文，并在圣彼得堡科学院宣读。虽然这些论文有一定水平，但确实没有传世价值，后来也就被人们遗忘了。

圣彼得堡（Saint Petersburg）是彼得大帝于 1703 年下令修建的，它的名字来源于耶稣的弟子圣徒彼得，1924 年改名为列宁格勒，1991 年苏联解体后，经市民投票，恢复了圣彼得堡的原名。

圣彼得堡位于波罗的海芬兰湾的东岸，涅瓦河的河口，当初这里只是一片沼泽，彼得大帝先在这里建军事要塞，后

丹尼尔·伯努利也于1725年来到了圣彼得堡科学院，哥德巴赫就有了共同研究的伙伴，他们时常徜徉在涅瓦河畔，切磋讨论数学问题。

扩建为城市。1712年，彼得大帝将首都从莫斯科迁到圣彼得堡。迁都的目的，是为了更顺利地推行他的改革政策，也是为俄国争取出海口，沟通与西欧的海上联系。当时，圣彼得堡紧挨着瑞典的领土（如今这块地方属于芬兰），瑞典人经过1704年和1705年两次失败的进攻之后，未再试图夺取圣彼得堡。

涅瓦河的流量排在伏尔加河与多瑙河之后，是欧洲第三大河，它经过圣彼得堡，流入芬兰湾。在圣彼得堡，涅瓦河分支遍布，河面上有几百座桥梁，把岛屿和陆地相连，自然风光十分秀丽，因此这座城市也有“北方威尼斯”之称。俄国著名诗人丘特切夫的“在涅瓦河上”一诗中，有这样的句子：

在涅瓦河的轻波间
夜晚的星把自己投落，
爱情又把自己神秘的小舟
寄托给任性的波浪。
.....
涅瓦河啊，你的波涛
广阔无限，柔和而美丽，
请以你自由的空间
荫护这小舟的秘密！

圣彼得堡还是世界上少数具有白夜的城市，白夜时漫步在涅瓦河畔，遥望蔚蓝天空的北极光，感觉在梦幻中一样。

对于建造圣彼得堡，彼得大帝花费了很大的心血。他从法国、意大利等国请来了一大批著名建筑师，这些人设计出很多经典建筑，为俄罗斯带来了巴洛克风格。在17世纪初至18世纪上半叶，巴洛克是流行于欧洲的主要艺术风格，它的特点是装饰繁复、富丽堂皇、极具动感。彼得宫（也称为“夏宫”）是巴洛克建筑风格的一个典范，整个宫殿豪华壮丽，装饰精巧，被誉为“俄罗斯的凡尔赛宫”。宫殿下的大阶梯由37座金色雕像、64座喷泉和许多雕塑环绕点缀，一条水渠将大阶梯与波罗的海相连。圣彼得堡被认为是欧洲最美丽的城市之一，它的建成是彼得大帝的一个伟大功绩。

丹尼尔·伯努利也于1725年来到了圣彼得堡科学院，哥德巴赫就有了共同研究的伙伴，他们时常徜徉在涅瓦河畔，切磋讨论数学问题，蓝天之下的花园、宫殿、教堂、喷泉和雕塑，让人心旷神怡。

政治风云

轻松的日子过得快，转眼就过去了一年多。比起他的数学才能来，哥德巴赫与人打交道的能力要更突出一些，因而，在1726年，圣彼得堡科学院院长就向朝廷推荐哥德巴赫，想让他担任彼得·阿列克谢耶维奇·罗曼诺夫（1715-1730）的家庭教师。

小彼得是阿列克谢的独生子，也就是彼得大帝的孙子。他此时11岁，是罗曼诺夫王朝唯一的男性继承人，因此对于他的影响是一件很重要的事情。当时把持朝政的缅希科夫自然不会放过这样的机会，他指派他的亲信担任小彼得的家庭教师，因而科学院的推荐没有成功。

提到缅希科夫（1673-1729），可以说是一位奇才。他少年时在莫斯科街头以卖馅饼为生，偶遇彼得一世，他的机灵乖巧很讨彼得的喜欢，因而被彼得收作了勤务兵。缅希科夫随彼得大帝东征西战，由于他的忠诚而深得彼得的信任，因此得以步步高升。虽然缅希科夫没受过多少教育，但却具有罕见的军事能力和行政才干。他曾在多次著名战役中指挥军队，取得辉煌胜利，后来成为第一位俄国大元帅。缅希科夫负责过圣彼得堡的工程建设，他还创办了砖瓦厂、木材加工厂、盐场、渔场和酿酒厂等诸多企业。

1727年5月，叶卡捷琳娜一世去世，12岁的小彼得继位，称彼得二世（1727-1730在位）。此时的朝政大权仍由缅希科夫把持，但他对于金钱和权力的过分贪婪，招致了很多贵族的极度不满。贵族们策动近卫军，逮捕了缅希科夫，将他全家流放到西伯利亚的偏僻小镇别留佐夫。两年后，缅希科夫在那里郁闷地死去。苏里科夫的历史画“缅希科夫在别留佐夫镇”，描绘了在西伯利亚的小木屋里，落寞的政治家在烛光下，和儿女们一起读圣经的场面。苏里科夫的“近卫军临刑的早晨”、“缅希科夫在别留佐夫镇”和“女贵族莫洛卓娃”，被称为他的历史画三部曲，都是令人震撼的杰作。

缅希科夫一倒台，他指派的家庭教师只得走人。1727年底，哥德巴赫再次被推荐，当上了彼得二世的家庭教师。这样，哥德巴赫的宁静日子就已成过去，他也要经常关心俄国的政治风云了。

就在叶卡捷琳娜一世去世的那一天，欧拉来到了圣彼得堡。此时的欧拉是一位20岁的青年，他是约翰·伯努利的学生，