

数学思想中的人文意境

张奠宙



郑板桥的咏雪诗里有着数字的对仗

数学和中国古典诗词，历来有许多可供谈助的材料。例如：

一去二三里，
烟村四五家；
楼台六七座，
八九十支花。

把十个数字嵌进诗里，读来琅琅上口，非常有趣。郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，
五片六片七八片；
千片万片无数片，
飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系，游戏而已。数学和古典人文的联接，贵在意境。

一. 自然数的人文意境

人们熟悉的自然数，现在规定从0开始，即0,1,2,……那么自然数是怎么生成的呢？老子《道德经》说得明白：

太初有道。道生一，一生二，二生三，三生万物。

《道德经》陈述的关键在一个“生”字。生，相当于皮亚诺自然数公理的“后继”。由虚无的“道”（相当于0）开始，先生出“一”，再生出“二”和“三”，以至生出万物。这里，包含了自然数的三个特征。

1. 自然数从0（道）开始；
2. 自然数一个接一个地“生”出来；
3. 自然数系是无限的（万物所指）。

这简直就是皮亚诺的自然数公理了。

再看大数学家冯·诺依曼用集合论构造的自然数。他从一个空集 Φ （相当于“道”）出发，给出每一个自然数的后继：即此前所有集合为元素的集合。具体过程如下：

空集 Φ 表示0；



杜甫草堂；杜甫的登高诗里也有数学。

以空集 Φ 为元素的集合 $\{\Phi\}$ 表示 1；（道生一）

以 Φ 和 $\{\Phi\}$ 为元素的集合 $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ 表示 2；（一生二）

以 $\Phi, \{\Phi\}$, 和 $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ 为元素的集合 $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ 表示 3；（二生三），以前面 N 个集合为元素构成的新集合，表示 N+1（三生万物），

.....

我们了解自然数，何不从《道德经》开始？

二. 关于“无限”

小学生就知道，自然数是无限多的，线段向两端无限延长就是直线。平行线是无限延长而不相交的。无限，是人类直觉思维的产物。数学，则是唯一正面进攻“无限”的科学。

无限有两种：其一为没完没了的“潜无限”，其二是“将无限一览无余”的“实无限”。

杜甫《登高》诗云：

风急天高猿啸哀，渚清沙白鸟飞回。
无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来。
万里悲秋常作客，百年多病独登台。
艰难苦恨满霜鬓，潦倒新停浊酒杯。

我们关注的是其中的第三、第四两句：“无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来”。

前句指的是“实无限”，即实实在在全部完成了的无限过程、已经被我们掌握了的无限。“无边落木”就是指“所有的落木”，这个实无限集合，已被我们一览无余。

后句则是所谓潜无限，它没完没了，不断地“滚滚”而来。尽管到现在为止，还是有限的，却永远不会停止。

数学的无限显示出“冰冷的美丽”，杜甫诗句中的“无限”则体现出悲壮的人文情怀，但是在意境上，彼此是沟通的。

三. 关于“极限”

“极”、“限”二字，古已有之。今人把“极限”连起来，把不可逾越的数值称为极限。“挑战极限”，是最时髦的词语之一。1859 年，李善兰和伟列亚力翻译《代微积拾级》，将“limit”翻译为“极限”，用以表示变量的变化趋势。于是，极限成为专有数学名词。

极限意境和人文意境的对接，习惯上用“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例子。数学名家徐利治先生在讲极限的时候，却总要引用李白《送孟浩然之广陵》诗：

故人西辞黄鹤楼，
烟花三月下扬州。
孤帆远影碧空尽，
唯见长江天际流。

“孤帆远影碧空尽”一句，生动地体现了一个变量趋向于 0 的动态意境，它较之“一尺之棰”的意境，更具备连续变量的优势，尤为传神。

贵州六盘水师专的杨老师曾谈他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁《游园不值》的诗句：

春色满园关不住，
一枝红杏出墙来。

学生听了每每会意而笑。实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数 M，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过 M。于是，M 可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏。无界变量相当于总有一支红杏越出园子的范围。

诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了。



孤帆远影碧空尽：无限的概念。（钱来忠绘）

四. 关于四维“时空”

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂的名句《登幽州台歌》：

前不见古人，后不见来者；
念天地之悠悠，独怆然而涕下。

一般的语文解释说：前两句俯仰古今，写出时间绵长；第三句登楼眺望，写出空间辽阔。在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人。然而，从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线（一维空间）。陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下。这样的意境，是数学家和文学家可以彼此相通的。进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接。

语文和数学之间，并没有不可逾越的鸿沟。

五. 关于对称

数学中有对称，诗词中讲对仗。乍看上去两者似乎风马牛不相及，其实它们在理念上具有鲜明的共性：在变化中保持着不变性质。

数学中说两个图形是轴对称的，是指将一个图形沿着某一条直线（称为）对称轴折叠过去，能够和另一个图形重合。这就是说，一个图形“变换”到对称轴另外一边，但是图形的形状没有变。

这种“变中不变”的思想，在对仗中也反映出来了。例如，让我们看唐朝王维的两句诗：

“明月松间照，清泉石上流”

诗的上句“变换”到下句，内容从描写月亮到描写泉水，确实有变化。但是，这一变化中有许多是不变的，

- “明” —— “清” （都是形容词）
- “月” —— “泉” （都是自然景物，名词）
- “松” —— “石” （也是自然景物，名词）
- “间” —— “上” （都是介词）