

数学思想中的人文意境

张奠宙



郑板桥的咏雪诗里有着数字的对仗

数学和中国古典诗词，历来有许多可供谈助的材料。

例如：

一去二三里，
烟村四五家；
楼台六七座，
八九十支花。

把十个数字嵌进诗里，读来琅琅上口，非常有趣。郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，
五片六片七八片；
千片万片无数片，
飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系，游戏而已。数学和古典人文的联接，贵在意境。

一. 自然数的人文意境

人们熟悉的自然数，现在规定从0开始，即0,1,2,……那么自然数是怎么生成的呢？老子《道德经》说得明白：

太初有道。道生一，一生二，二生三，三生万物。

《道德经》陈述的关键在一个“生”字。生，相当于皮亚诺自然数公理的“后继”。由虚无的“道”（相当于0）开始，先生出“一”，再生出“二”和“三”，以至生出万物。这里，包含了自然数的三个特征。

1. 自然数从0（道）开始；
2. 自然数一个接一个地“生”出来；
3. 自然数系是无限的（万物所指）。

这简直就是皮亚诺的自然数公理了。

再看大数学家冯·诺依曼用集合论构造的自然数。他从一个空集 Φ （相当于“道”）出发，给出每一个自然数的后继：即此前所有集合为元素的集合。具体过程如下：

空集 Φ 表示0；



杜甫草堂；杜甫的登高诗里也有数学。

以空集 Φ 为元素的集合 $\{\Phi\}$ 表示 1；（道生一）

以 Φ 和 $\{\Phi\}$ 为元素的集合 $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ 表示 2；（一生二）

以 $\Phi, \{\Phi\}$, 和 $\{\Phi, \{\Phi\}\}$ 为元素的集合 $\{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\}$ 表示 3；（二生三），以前面 N 个集合为元素构成的新集合，表示 N+1（三生万物），

.....

我们了解自然数，何不从《道德经》开始？

二. 关于“无限”

小学生就知道，自然数是无限多的，线段向两端无限延长就是直线。平行线是无限延长而不相交的。无限，是人类直觉思维的产物。数学，则是唯一正面进攻“无限”的科学。

无限有两种：其一为没完没了的“潜无限”，其二是“将无限一览无余”的“实无限”。

杜甫《登高》诗云：

风急天高猿啸哀，渚清沙白鸟飞回。
无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来。
万里悲秋常作客，百年多病独登台。
艰难苦恨满霜鬓，潦倒新停浊酒杯。

我们关注的是其中的第三、第四两句：“无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来”。

前句指的是“实无限”，即实实在在全部完成了的无限过程、已经被我们掌握了的无限。“无边落木”就是指“所有的落木”，这个实无限集合，已被我们一览无余。

后句则是所谓潜无限，它没完没了，不断地“滚滚”而来。尽管到现在为止，还是有限的，却永远不会停止。

数学的无限显示出“冰冷的美丽”，杜甫诗句中的“无限”则体现出悲壮的人文情怀，但是在意境上，彼此是沟通的。

三. 关于“极限”

“极”、“限”二字，古已有之。今人把“极限”连起来，把不可逾越的数值称为极限。“挑战极限”，是最时髦的词语之一。1859 年，李善兰和伟列亚力翻译《代微积拾级》，将“limit”翻译为“极限”，用以表示变量的变化趋势。于是，极限成为专有数学名词。

极限意境和人文意境的对接，习惯上用“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例子。数学名家徐利治先生在讲极限的时候，却总要引用李白《送孟浩然之广陵》诗：

故人西辞黄鹤楼，
烟花三月下扬州。
孤帆远影碧空尽，
唯见长江天际流。

“孤帆远影碧空尽”一句，生动地体现了一个变量趋向于 0 的动态意境，它较之“一尺之棰”的意境，更具备连续变量的优势，尤为传神。

贵州六盘水师专的杨老师曾谈他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁《游园不值》的诗句：

春色满园关不住，
一枝红杏出墙来。

学生听了每每会意而笑。实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数 M，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过 M。于是，M 可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏。无界变量相当于总有一支红杏越出园子的范围。

诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了。



孤帆远影碧空尽：无限的概念。（钱来忠绘）

四. 关于四维“时空”

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂的名句《登幽州台歌》：

前不见古人，后不见来者；
念天地之悠悠，独怆然而涕下。

一般的语文解释说：前两句俯仰古今，写出时间绵长；第三句登楼眺望，写出空间辽阔。在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人。然而，从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线（一维空间）。陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下。这样的意境，是数学家和文学家可以彼此相通的。进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接。

语文和数学之间，并没有不可逾越的鸿沟。

五. 关于对称

数学中有对称，诗词中讲对仗。乍看上去两者似乎风马牛不相及，其实它们在理念上具有鲜明的共性：在变化中保持着不变性质。

数学中说两个图形是轴对称的，是指将一个图形沿着某一条直线（称为）对称轴折叠过去，能够和另一个图形重合。这就是说，一个图形“变换”到对称轴另外一边，但是图形的形状没有变。

这种“变中不变”的思想，在对仗中也反映出来了。例如，让我们看唐朝王维的两句诗：

“明月松间照，清泉石上流”

诗的上句“变换”到下句，内容从描写月亮到描写泉水，确实有变化。但是，这一变化中有许多是不变的，

- “明” —— “清” （都是形容词）
- “月” —— “泉” （都是自然景物，名词）
- “松” —— “石” （也是自然景物，名词）
- “间” —— “上” （都是介词）



松下问童子（亚明绘）

“照”——“流”（都是动词）。

对仗之美在于它的不变性。假如上联的词语变到下联，含义、词性、格律全都变了，就成了白开水，还有什么味道？

数学上的对称本来只是几何学研究的对象，后来数学家又把它拓广到代数中。例如，二次式 x^2+y^2 ，当把 x 变换为 y ， y 变换为 x 后，原来的式子就成了 y^2+x^2 ，结果仍旧等于 x^2+y^2 ，没有变化。由于这个代数式经过 x 与 y 变换后形式上与先前完全一样，所以把它称为对称的二次式。进一步说，对称可以用“群”来表示，各色各样的对称群成为描述大自然的数学工具。

世间万物都在变化之中，但只单说事物在“变”，不说明什么问题。科学的任务是要找出“变化中不变的规律”。一个民族必须与时俱进，不断创新，但是民族的传统精华不能变。京剧需要改革，可是京剧的灵魂不能变。古典诗词的内容千变万化，但是基本的格律不变。自然科学中，物理学

有能量守恒、动量守恒；化学反应中有方程式的平衡，分子量的总值不能变。总之，惟有找出变化中的不变性，才有科学的、美学的价值。

六. 关于“存在性”

数学上有很多纯粹存在性的定理，都十分重要。例如：

- 抽屉原理。N 只苹果放在 M 格抽屉里 ($N > M$)，那么至少有一个抽屉里多于一个苹果。这一原理肯定了这样抽屉的存在性，却不能判断究竟是哪一格抽屉里有多于一个的苹果。

- 代数基本定理。任何 n 阶代数方程，在复数域内必定有 n 个根。这一著名的定理，只说一定有 n 个根，却没有说，怎样才能找到这 n 个根。

- 连续函数的介值性定理。在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，如果有 $f(a) > 0, f(b) < 0$ ，则必定在区间内存在一点 c ，使得 $f(c) = 0$ 。同样，这个定理只保证函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有一个根 c 的存在性，却没有指出如何才能找到这个 c 。

- 微分中值定理。设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且处处有导数，那么必定在 $[a, b]$ 中存在一点 ξ ，使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 。这也是典型的纯粹存在性定理，即微分中值定理中的 ξ 只是肯定存在于 a, b 之间，但不确定知道在那一点。

在人文意境上，存在性定理最美丽动人的描述，应属贾岛的诗句：

松下问童子，
言师采药去；
只在此山中，
云深不知处。

贾岛并非数学家，但是细细品味，觉得其诗的意境，简直是为数学而作。

七. 关于局部

古希腊哲学家芝诺和他的学生有以下的对话：

“一支射出的箭是动的还是不动的？”

“那还用说，当然是动的。”



宋代大词人苏轼（范曾绘）

“那么，在这一瞬间里，这支箭是动的，还是不动的？”
“不动的，老师。”
“这一瞬间是不动的，那么在其他瞬间呢？”
“也是不动的，老师。”
“所以，射出去的箭是不动的。”

确实，孤立地仅就一个时刻而言，物体没有动。但是物体运动有其前因后果，即物体运动是由前后位置的比较反映出来的，有比较才会产生速度。

仔细琢磨一下微积分的核心思想之一，在于考察一点

的局部。研究曲线上一点的切线，只考虑该点本身不行，必须考察该点附近的每一点，这就是局部的思想。

常言道，“聚沙成塔，集腋成裘”，那是简单的堆砌。古语说“近朱者赤，近墨者黑”，是说要注意周围的环境。众所周知，要考察一个人，要问他 / 她的身世、家庭、社会关系，孤立地考察一个人是不行的。

微积分学就是突破了初等数学“就事论事”、孤立地考察一点、不及周围的静态思考，转而用动态地考察“局部”的思考方法，终于创造了科学的黄金时代。

考察局部，何止于微积分？人生处处是局部和整体的统一。

八. 关于黎曼积分和勒贝格积分

苏轼《题西林壁》诗云

横看成岭侧成峰，
远近高低各不同。
不识庐山真面目，
只缘身在此山中。

将前两句比喻黎曼积分和勒贝格积分的关系，相当有趣。苏轼诗意是：同是一座庐山，横看和侧看各不相同。勒贝格则说，比如数一堆叠好了的硬币，你可以一叠叠地竖着数，也可以一层层横着数，同是这些硬币，计算的思想方法却差异很大。

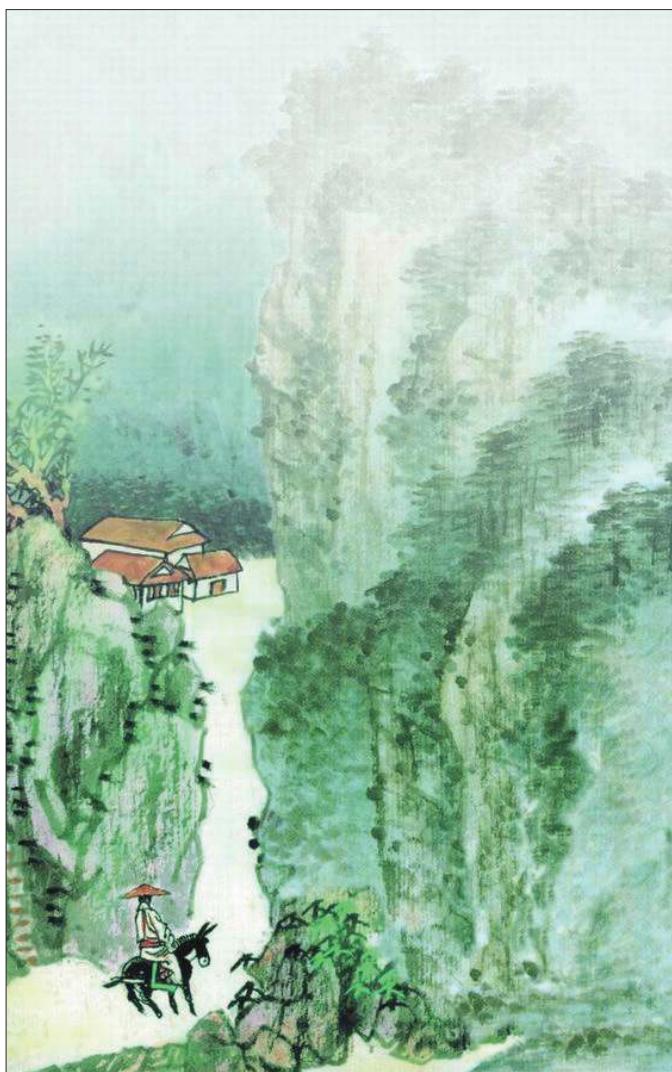
从数学上看，同是函数 $y = f(x)$ 形成的曲边梯形面积 M ，也是横看和侧看不相同。实际上，如果分割函数 $y = f(x)$ 的定义域 $[a,b]$ ，然后作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 用以近似 M ，那是黎曼积分的思想，而分割值域 $[c,d]$ 作和 $\sum_{i=1}^n y_i m(x, y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i)$ 近似表示 M ，则是勒贝格积分的思想（这里的 m 是勒贝格测度）。

横看和侧看，数学意境和人文意境竟可以相隔时空得到共鸣，发人深思。

九. 关于“反证法”

数学上常用反证法。你要驳倒一个论点，你只要将此论点“假定”为正确，然后据此推出明显错误的结论，就可以推翻原论点。苏轼的一首《琴诗》就是这样作的：

若言琴上有琴声，放在匣中何不鸣？
若言声在指头上，何不于君指上听？



数学问题的解决是一个曲折和艰难的过程。圆满地解决往往使人有豁然开朗的感觉。

意思是，如果“琴上有琴声”是正确的，那么放在匣中应该“鸣”。现在既然不鸣，那么原来的假设“琴上有琴声”就是错的。

同样，你要证明一个论点是正确的，那么只要证明它的否命题错误即可。就苏轼的诗而言，如果要论述“声不在指头上”是正确的，那么先假定其否命题：“声在指头上”是正确的，即在指头上应该有声音。现在，事实证明你在指头上听不见(因而不是指头上听)，发生矛盾。所以原命题“声音不在指头上”是正确的。

由此可见，人文的论辩和数学的证明，都需要遵循逻辑规则。

十. 关于解题

数学研究和学习需要解题，而解题过程需要反复思索，终于在某一时刻出现顿悟。例如，做一道几何题，百思不得其解，突然添了一条辅助线，问题豁然开朗，欣喜万分。这样的意境，正如王国维在《人间词话》中所说：古今之成大事业、大学问者，必经过三种之境界：

- ‘昨夜西风凋碧树。独上高楼，望尽天涯路’。
此第一境也。
- ‘衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。’
此第二境也。
- ‘众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处’。此第三境也。

学习数学和做事业、研究学问一样，都需要经历这样的境界。一个学生，如果没有经历过这样的意境，数学大概是学不好的了。

作者介绍：

张奠宙，1956年毕业于华东师范大学数学系，1986年起担任华东师范大学数学系教授。1995年至1998年担任国际数学教育委员会执行委员。他是著名的数学史研究专家，曾出版《20世纪数学经纬》等著作。

