第谷与开普勒仰望天空的雕塑坐落在布拉格。

理性文明两千年
——概述与重访(下)

项武义

§4. 重访开普勒行星定律的探索历程

师法其意，改弦更张，
以后见之明的简洁新途径身历其境

自古以来，“量天”一直是几何学的“巨梦”，此事一直到开普勒才真正圆此巨梦。在天文观测中，夹角和方向乃是实测之数据，而星际之距离则是主要有待克服的难点，开普勒量天有术的方法何在？

师法其意之一：开氏量天术

概括地来说，下述跨周期叠加测量法乃是开氏巧用周期性，善用第谷天文宝库的基本方法。如图 -11 所示，M 是火星在 t_1 时刻的位置 $M_0(t_1)$ 在黄道面上的垂直投影，$(\pi-\mu_1)$ 则是在 t_1 的薄暮观测所得的 $\overline{SE_1}$ 和 $\overline{E_1M}$ 的方位差。一个火星年约为 $T=687$ 天。所以在和 t_1 相差几个火星年的 t_2 时刻，则有 $M(t_1)=M(t_2)=M$。上述跨周期的 ΔSE_1M 和 ΔSE_2M 就在天际叠加成所示的四边形！其中 μ_1，μ_2 和 θ 都是直接实测之角度，可以在第谷天文宝库（或现代天文数据）中查到。由此可见，只要能够掌握日 - 地距的规律（亦即，地球绕日的极坐标方程）就可以用他熟知的三角测量公式去计算 $\overline{SM}$ 的方位与距离，此事让他认识到下述“卓见”。

师法其意之二：（自知之明乃是新天文学的基石所在）

有鉴于地球和其它行星都在绕日运行，所以由地球观测各别行星的视运动就变得复杂难解，可以说是“舞在其中，当局者迷”的一种表现，其实也正是千古之谜的根源所在。反之，若能有自知之明（亦即充分掌握日 - 地距的极坐标方程）则利弊逆转，就可以利用上述开氏量天术研究行星运行的规律！所谓“自知之明”善莫大焉！它是新天文学的基础所在，这也就是《新天文学》第三卷的主题，其标题为：

“第二个不规则性 (second inequality)，即对太阳或地球运动的探讨，是深刻天文学的关键，那里存在着许多运动的物理原因”。

开氏量天术的三角分析：

一般情形：令 $\alpha_1=\angle E_1MS$，$\alpha_2=\angle E_1MS$，$d=\overline{SM}$，则有

$$\beta=2\pi-\mu_1-\mu_2-\theta=\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\frac{d}{\sin\mu_1}=\frac{\lambda_1}{\sin\alpha_1},\quad \frac{d}{\sin\mu_2}=\frac{\lambda_2}{\sin\alpha_2}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1\sin\mu_1}{\lambda_2\sin\mu_2}\,(:=k),\quad \sin(\beta-\alpha_2)=k\sin\alpha_1$$

$$\alpha_2=\cot^{-1}\left(\frac{k+\cos\beta}{\sin\beta}\right)\tag{1}$$

特殊情形：设 t_i 和 t_j 都是和某一个火星冲相差几个火星年者（参看图 -12）。$\{\theta_i,\theta_j,\mu_i,\mu_j\}$ 皆为实测数据而 $\alpha_i=\pi-\theta_i-\mu_i$，$\alpha_j=\pi-\theta_j-\mu_j$。因此，由正弦定律即得

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i}=\frac{\sin\alpha_j\sin\mu_i}{\sin\alpha_i\sin\mu_j}\tag{2}$$

重访地球面积律的探索历程（后见之明之一）：

在开氏行星定律中，地球面积律是他第一个重大突破（首战告捷），也是他用来探索其它各定律的基础与利器，所以它自然也是我们重访的首要。在《新天文学》中，地球

的面积律乃是第三卷对于“第二个不规则性”（亦即日 - 地距的极坐标方程）研究成果的简洁重述，堪称神来之笔。如今回看，它乃是地球绕日运动的角动量守恒定律，是理性文明史中第一个发现的角动量宏恒律，其极坐标表达式即为：

$$\frac{1}{2}\lambda^2\omega=\text{常数}\,,$$

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}\,(\text{角速度})\qquad(3)$$

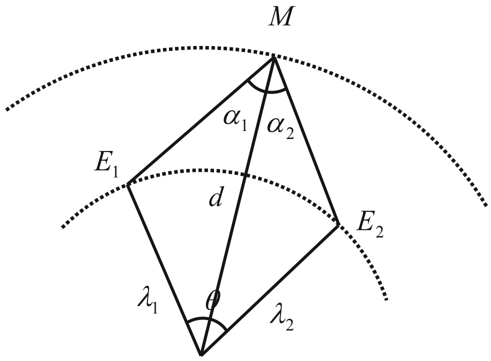


图 -11

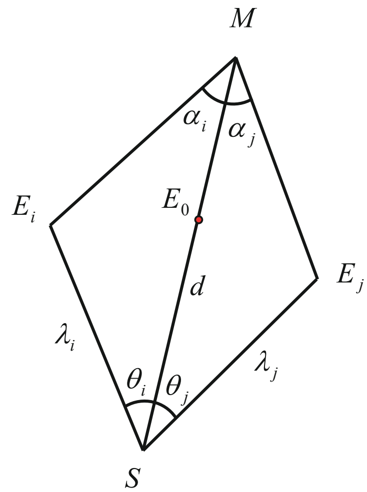


图 -12

有鉴于在薄暮观测中，当时之日的地方位 θ_t，乃是第一个实测的数据，它们的逐日差额就是当天的每天平均角速度 ω_t；而上述守恒律的探索其实就是要从实测数据去检验

$$\frac{1}{2}\lambda(t_j)^2\omega(t_j)=\frac{1}{2}\lambda(t_i)^2\omega(t_i)$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{\lambda(t_j)^2}{\lambda(t_i)^2}=\frac{\omega(t_i)}{\omega(t_j)}$$

恒成立。

再者，t_i 在和 t_j 各别和某一个火星冲 t_0 相差几个火星年的特殊时刻

$$\frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2}=\frac{\sin^2\alpha_j\sin^2\mu_i}{\sin^2\alpha_i\sin^2\mu_j}\ \text{和}\ \frac{\omega_i}{\omega_j}$$

都可以由实测数据直截了当地计算之。

例如表 -1（见下页）所列者，乃是以 1948 年 5 月 5 日火星冲为准，前后三十个火星年的实测实算数据。易见它们的最后两行之值几乎相等（差相在 0.3% 之内）。我们当然还可以改用其它火星冲作同样检验，而且发现它们依然几乎相等。这样就可以由实测的角度和方位的实算，检验地球面积律这个极为重要的实验性定律 (experimental law)。

重访地球椭圆律之探索（后见之明之二）：

在此将以后见之明，改弦更张，先行探索地球的轨道是否是一个太阳位于其焦点之一的椭圆？有鉴于业已建立的地球面积律和每天实测可得的逐天角速度，即有

$$\frac{1}{2}\lambda^2\omega=k\,,\quad\frac{\sqrt{2k}}{\lambda}=\sqrt{\omega}\qquad(4)$$

历史的注记

(i) 在开普勒行星律的探索历程中，是先有地球的面积律，亦即第三卷对于“第二不规则性”的充分掌握，接着发现火星的面积律，然后再苦战数年才发现火星的椭圆律。上述三者发表于 1609 年的《新天文学》。地球的椭圆律以及其它四个行星的面积律和椭圆律实乃顺理成章的推广，陆续发表于三册《哥伯尼天文学概要》(Epitome Astronomiae Copernicanae，1617-21)，而综合六个行星各别定律的周期律则发表于《世界之和谐》(Harmonica Mundi，1619)。

(ii) 当年离解析几何学之问世还有几十年，所以现代众所周知某些锥线性质：如五点定一锥线，锥线以焦点为原点的极坐标方程乃是开普勒未能得见，也没能想到者，但是他当然熟知阿波罗尼斯的锥线论。

亦即 $\frac{\sqrt{2k}}{\lambda}$ 每天之值皆可相当精准地实测实算！

另一方面，由解析几何的后见之明，一个以原点为其焦点之一的椭圆之极坐标方程均可写成下述形式，即

$$\frac{1}{\lambda}=c_0+c_1\cos\theta+c_2\sin\theta\qquad(5)$$

由此可见，我们可以先取一年中相当均匀间隔的三天 $\{t_1,t_2,t_3\}$，先由下述三元一次方程组，即

$$\sqrt{\omega(t_i)}=c_0'+c_1'\cos\theta(t_i)+c_2'\sin\theta(t_i)\,,\quad i=1,2,3\qquad(5')$$

解得 $\{c_0', c_1', c_2'\}$，然后再以任选许多天的 $\sqrt{\omega(t)}$ 和 $\theta(t)$ 之值代入

$$\sqrt{\omega(t)} = c_0' + c_1'\cos\theta(t) + c_2'\sin\theta(t), \quad i = 1, 2, 3$$

来检验上述等式是否几乎恒成立。这样，就可以简洁明了地探索而得地球的椭圆律！

有兴趣对于开普勒行星定律探索历程，作一次身历其境的全程重访的读者，在此郑重建议去细读《千古之谜与几何天文物理两千年》的第五章，并且认真地做该章的习题与演练。在此限于篇幅，仅作下述分析与注记。

分析与注记

(i) 开普勒行星定律是整个理性文明无比辉煌的实验性定律，对于它作一次重访中，后见之明自然是指路明灯，可以使得我们的历程目标明确，避免曲折。其实，在开氏当年写书时，岂不是也已经有了后见之明？

(ii) 在重访之一中，一方面我们对于好几个取定的火星冲计算和它相差几个火星年的日-地距之比值。这是开氏量天术的特别简化的情形，只要直截了当地用正弦定律就可以由实测的角度马上实算之。从几何观点来看，此事其实就是善用周期性，以居于原位的太阳和火星为观测站来对于 $\{E_i, E_j\}$ 作太空三角测量。另一方面，我们有效利用每天平均角速度 $\{w(t_i), w(t_j)\}$ 是每天都可以精准实测的数据。

(iii) 有了地球面积律 $\lambda^2\omega/2 = k$，就可以由 $\omega(\theta)$ 之值直接计算 $\sqrt{2k}/\lambda(\theta) = \sqrt{\omega(\theta)}$ 在各个方位之值，亦即地球绕日运行的极坐标方位业已简洁掌握。所以重访之二关于地球椭圆律的探索根本可以看做地球面积律的一个顺理成章的应用。再者，有了地球绕日运行的极坐标方程，一般情形的开氏量天术就可以长驱直入地测算其它行星的极坐标之数据。由此可见，其它行星的面积律和椭圆律的探索又是一种直截了当的顺理成章！

日期	ω_i	ω_j	$\frac{r_j^2}{r_i^2}$	$\frac{\omega_i}{\omega_j}$	日期	ω_i	ω_j	$\frac{r_j^2}{r_i^2}$	$\frac{\omega_i}{\omega_j}$
1948.5.5	0.969	（以此日期当做基准）			1948.5.5	0.969	（以此日期当做基准）		
1940.10.26		0.998	0.968	0.971	1957.9.30		0.983	0.976	0.986
1938.12.9		1.016	0.952	0.954	1959.8.18		0.961	1.006	1.008
1937.1.21		1.017	0.951	0.952	1961.7.5		0.953	1.014	1.016
1935.3.6		1.001	0.966	0.968	1963.5.23		0.962	1.006	1.008
1933.4.18		0.977	0.990	0.992	1965.4.9		0.982	0.984	0.987
1931.6.1		0.958	1.009	1.012	1967.2.25		1.005	0.961	0.964
1929.7.14		0.954	1.014	1.016	1969.1.12		1.019	0.949	0.951
1927.8.27		0.966	1.003	1.003	1970.11.29		1.014	0.954	0.956
1925.10.9		0.988	0.976	0.980	1972.10.16		0.992	0.973	0.976
1923.11.22		1.010	0.957	0.959	1974.9.3		0.969	1.000	1.000
1922.1.4		1.019	0.949	0.951	1976.7.21		0.955	1.013	1.015
1920.2.17		1.009	0.959	0.960	1978.6.8		0.957	1.011	1.013
1918.4.1		0.986	0.981	0.983	1980.4.25		0.973	0.993	0.996
1916.5.14		0.964	1.003	1.005	1982.3.13		0.997	0.970	0.972
1914.6.27		0.954	1.015	1.016	1984.1.29		1.016	0.952	0.954

表-1 二十个火星年的实测实算数据

开普勒 (1571-1630)

伽里略 (1564-1642)

笛卡儿 (1596-1650)

惠更斯 (1629-1695)

§5. 从新天文学到自然哲学的数学原理

顺理成章，精益求精；

天上人间合而为一，至精至简，万有引力

古希腊文明经过文艺复兴的蕴育而重获新生。到了十六世纪中叶，业已萌芽茁壮，容光焕发，有蓬勃进展之势。例如 §3 中所述的天文学巨棒三接力，则是其中至重至大者；不但开创了天文学的新纪元，而且也引领着近代科学的全面进展。由十七世纪初叶的新天文学（包括伽利略 (Galileo) 用望远镜所得的重大天文发现）到 1687 年牛顿的巨著《自然科学的数学原理》(以下简称《原理》) 集其大成，理性文明进展之神速，令人叹为观止！比之于理性文明的先前两千年的进化历程，可以说简直是一气呵成而又精彩绝伦的突飞猛进。其中有很多引人入胜，富有启发的创见与思想。在此限于篇幅，仅作极为简略的概括：

(1) 1608 年望远镜的发明：它的光学原理十分简明，首先是在荷兰为了航海之用而发明的；而天文学家如伽里略，开普勒等马上就认识到它在天文观测上的重要性而自行研制。此事大大扩展了天象观测的视野与精度，促进了天文学的更上层楼，例如伽里略的种种天文发现。

(2) 伽里略 (Galileo，1564-1642) 的重力实验：自由落体以及斜面实验，等加速运动的数理分析，惯性和 $F = m \cdot a$ 的首现。

(3) 笛卡儿 (R. Descartes，1596-1650)：解析几何，广义的惯性定律。(他在力学上的机械论在当代曾为显学，如今早已成为历史陈迹)。

(4) 开普勒天文学的逐步进展：

(i) 他的三册《哥伯尼天文学概要》逐渐成为欧陆天文学的主要教科书。

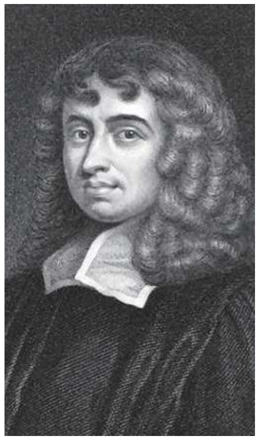
(ii) 他在 1627 年出版的《鲁道夫星表》(Rudolphine Table) 要比任何其它星表精准百倍而被广泛采用。

(iii) 他预测在 1631 年 11 月 7 日会有水星凌日，1631 年 12 月 6 日会有金星凌日；前者由茄桑地 (Gassendi) 的观测证实，但是后者则因为发生在欧洲的夜晚而未能观测。随后霍洛克 (Harrocks) 按照开氏定律预知 1639 年 12 月 4 日还有另一次金星凌日，并且作了详细的观测与纪录。

伽利略在介绍天文望远镜


费马 (1601-1665)


帕斯卡 (1630-1662)


巴罗 (1630-1677)


瓦利斯 (1616-1703)


虎克 (1635-1703)

(5) 惠更斯 (Huygens，1629-1695)：圆周运动的离心力，摆线运动的数理分析。

(6) 费马 (Fermat，1601-1665)，帕斯卡 (Pascal，1630-1662)，巴罗 (Barrow，1630-1677)，瓦利斯 (Wallis，1616-1703) 在数理分析上的工作和虎克 (Hooke，1635-1703) 在物理上的工作和见解也都为牛顿集其大成的工作多方开路与奠基。牛顿曾自述，他之所以能看得比别人远，乃是因为他站在巨人的肩上。以上所列，大概就是牛顿自述中的“巨人”。

《原理》精要之概述：

《原理》的基本方式是系统地运用数理分析，对于天体运行，重力实验，圆周运动等等作精益求精的深究其理。所以他在第一卷开宗明义对于力学的基本概念：如质量，动量，惯性，力，向心力，速度及加速度妥加明确定义；并列述力学的基本定律为：

惯性定律、$F=m\cdot a$ 和作用力反作用力定律

〔注〕其中前两条是当代熟知之共认，而第三条则是牛顿的重要创见。

《原理》中有很多引人入胜，精辟的数理分析。其中最为重要的结果首推下述四个命题和由它们推论所展现的万有引力定律 (Law of Universal Gravitation)：

命题 1： 面积律等价于作用力向心，即

$\frac{1}{2}\lambda^2\omega=$ 常数 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ 和 a 共线 (colinear)

命题 2： 面积律和椭圆律

$\Rightarrow$ 向心作用力的大小和距离平方成反比

命题 3： 在一个其力向心（或离心）而且大小和距离平方成反比的作用力之下，一个质点的轨迹必然是一个以原点为其焦点之一的锥线。

命题 4： 一个均匀密度的球形薄壳施加于其外的一个质点的重力等同于将其质量集中于球心所产生之引力。(一个简洁的积分公式)

历史的注记

(i) 在开普勒的《新天文学》中，地球的面积律乃是第三卷对于日 - 地距研究成果的精简总结；然后促使他发现面积律对于其它行星也普遍成立；但是面积律的深刻物理内涵，却一直到牛顿才充分理解。命题 1 的证明十分简单，本质上就是下述两行，即

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\times\vec{v}=\vec{v}\times\vec{v}+\overrightarrow{OP}\times\vec{a}=\overrightarrow{OP}\times\vec{a}=0$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{a}$ 同向或反向 $\Leftrightarrow \vec{a}$ 离心或向心

上述简朴精到的理解是引领牛顿迈向成功的重要关键（参看在《原理》中对于向心力的诸多研讨）。

(ii) 虎克曾写信给牛顿提出“命题 2”这个猜想希望和他合作求证之。信中还提及他对于加速度在切线和法线方向的分量的物理意义。前者

使得速率改变而后者则使得方向改变（亦即曲率）。几经努力，牛顿成功地证明了命题 2，但是认为虎克对此毫无贡献 (should have no credit whatsoever)。但是只要对于《原理》中对于该命题的证明详加分析，就可以看出椭圆的曲率公式和上述虎克的“灼见”其实是有其重要性的。

(iii) 命题 3 也叫做开普勒逆问题。其实《原理》中对于它的论证，离完整的证明相去尚远，因为它最后是依赖一个当代还不存在的常微分方程的唯一性定理才能达成者。

(iv) 命题 4 这个积分公式对《原理》的核心结果——万有引力定律至关重要。因为没有它就无从估算地球对于苹果的引力，因此也无法把太阳对于行星的引力和前者作对比。唯有天上人间合而为一，才能主张万有引力！牛顿完全认识这个积分公式的重大意义，但是一直到 1686 年才达成其证明，由他 1686 年 6 月 20 日给哈雷 (Halley，1656-1742) 的信可见这也就是他一直到 1686 年才肯发表《原理》的主要原因。再者《原理》对于命题 4（亦即《原理》之命题 71）的证明却又是十分难懂。

有鉴于上述几点，§ 6 的重访也就更有其必要。

§ 6. 重访《原理》中数理分析的几个精要

重要命题的简洁初等新证

(6.1) 重访命题 2 的证明

在论证的起始，且让我们先分析一下椭圆律和面积的自然配合何在？由图 -13 所示，F_1 和 F_2 分别是椭圆的两个焦点，F_1' 和 F_2' 对于任给切线 l 的对称点；d_1 和 d_2 则是 F_1 和 F_2 到 l 的距离。易见面积律的几何意义就是

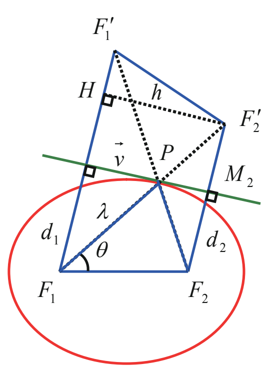


图 -13

$$v\cdot d_1=\lambda^2\omega=\frac{2\pi ab}{T},\quad v=|\vec{v}|$$

其中，F_1 是向心加速度所指向的中心；而椭圆的光学性质则表现在 F_1PF_2' 和 F_2PF_1' 共线而且 $\overline{F_1F_2'}=\overline{F_2F_1'}=2a$。有鉴于 d_1 在上述面积律所扮演的要角，自然要研讨 d_2 和 F_2 究竟扮演着何许角色，而此事显然应该往 $\{d_1,d_2\}$ 之间的关系探求之。令 h 为等腰梯形 $F_1F_2F_2'F_1'$ 的高，则有

$$\begin{aligned}&4a^2=\overrightarrow{F_1F_2'}^2=\overrightarrow{F_1H}^2+\overrightarrow{HF_2'}^2=(d_1+d_2)^2+h^2\\&4c^2=\overrightarrow{F_1'F_2'}^2=\overrightarrow{F_1'H}^2+\overrightarrow{HF_2'}^2=(d_1-d_2)^2+h^2\\&\Rightarrow\ 4b^2=4a^2-4c^2=4d_1d_2\ \Rightarrow\ d_1d_2=b^2\end{aligned}\tag{7}$$

由此可见：

$$v=\frac{2\pi ab}{d_1T}=\frac{2\pi a}{bT}\overrightarrow{F_2M_2}=\frac{\pi a}{bT}\overrightarrow{F_2F_2'}\tag{8}$$

再者，显然有

$$\overrightarrow{F_2F_2'}=\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_1F_2'},\quad \overrightarrow{F_1F_2'}=(2a\cos\theta,2a\sin\theta)\tag{9}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_1F_2'}=\left(2a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),2a\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)\cdot\omega$$

而 $\overrightarrow{F_2F_2'}$ 和 $\vec{v}$ 之间的关系是后者的方向要比前者多加 $\pi/2$，而后者的长途则是前者的 $\frac{\pi a}{bT}$ 倍。由此易见，$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}$ 乃是 $\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}$ 的 $\frac{\pi a}{bT}$ 倍再转 $\pi/2$ 度，即

$$\vec{a}=\frac{2\pi a^2}{bT}(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta))\omega=\frac{4\pi a^3}{T^2}\frac{1}{\lambda^2}(-\cos\theta,-\sin\theta)\tag{10}$$

亦即 $\vec{a}$ 向心而且其大小为 $\frac{4\pi a^3}{T^2}\frac{1}{\lambda^2}$。□

(6.2) 重访命题 3 的证明（开普勒逆的问题）

由所设，存在常数 K，使得向心（或离心）加速度

$$\vec{a}=\frac{K}{\lambda^2}(-\cos\theta,-\sin\theta),\quad K>0\ （或<0）$$

由于加速度和 $\overrightarrow{OP}$ 反向（或同向），还有另一常数 k 使得 $\lambda^2\omega=2k$。亦即

$$\begin{aligned}&\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{K}{\lambda^2}(-\cos\theta,-\sin\theta)=\frac{d}{d\theta}\vec{v}\cdot\omega\\&\Rightarrow\frac{d\vec{v}}{d\theta}=\frac{\vec{a}}{\omega}=\frac{K}{\lambda^2\omega}(-\cos\theta,-\sin\theta)=\frac{K}{2k}(-\cos\theta,-\sin\theta)\\&\Rightarrow\frac{d}{d\theta}\left(\vec{v}-\frac{K}{2k}(-\sin\theta,\cos\theta)\right)\equiv 0\end{aligned}\tag{11}$$

亦即存在一个常向量 $\vec{c}$ 使得

$$\vec{v}=\frac{K}{2k}(-\sin\theta,\cos\theta)+\vec{c}\quad（不妨设\ \frac{K}{2k}>0）\tag{11'}$$

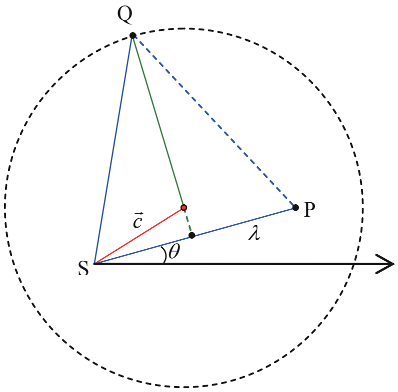


图 -14

如图 -14 所示，S 为原点，$\overrightarrow{SP}=(\lambda\cos\theta,\ \lambda\sin\theta)$，圆心是 $\vec{c}$ 的终点，半径为 $K/(2k)$。

因为 $(-\sin\theta,\cos\theta)$ 和 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 垂直，所以 ΔSPQ 的高为

$$\frac{K}{2k}+\vec{c}(-\sin\theta,\cos\theta)$$

其面积为

$$\frac{1}{2}\lambda\left\{\frac{K}{2k}+\vec{c}(-\sin\theta,\cos\theta)\right\}=k \quad 亦即： \qquad (12)$$

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{K}{(2k)^2}\left\{1+\frac{2k}{K}\vec{c}(-\sin\theta,\cos\theta)\right\} \qquad (12')$$

它是一个离心率等于 $(2k|\vec{c}|)/K$ 的锥线的极坐标方程。□

〔注〕：这也就是《原理》命题 17 未能完成者，也是当年哈雷、虎克和雷恩 (Wren) 所困惑并求教于牛顿的著名问题。由上述简朴的证明，可见只要直截了当地用两次面积律就可以简洁完整地解答逆问题。其实，这种善用面积律的本质在于善用空间的对称性。

（6.3）重访命题 4（亦即原理之命题 71）的证明：

设 Ω 是一个半径为 R 的球形薄壳，其单位面积之密度为 ρ。P 是其外一个质点，其质量为 m，令 P' 是 $\overline{OP}$ 上使得 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=R^2$ 之点。Ω_0 是以 P' 为心的单位球面（不访设 $R>2$），Π 是一个以直线 OP 为其边的半平面，$\{\Gamma,\Gamma_0\}$ 分别是 $\{\Omega,\Omega_0\}$ 和 Π 交截之半圆，而 $\{\Omega,\Omega_0\}$ 则分别是 $\{\Gamma,\Gamma_0\}$ 绕 OP 轴旋转而得的旋转面。如图 -15 所示，ΔOPQ_1 和 $\Delta O_1Q_1P'$ 满

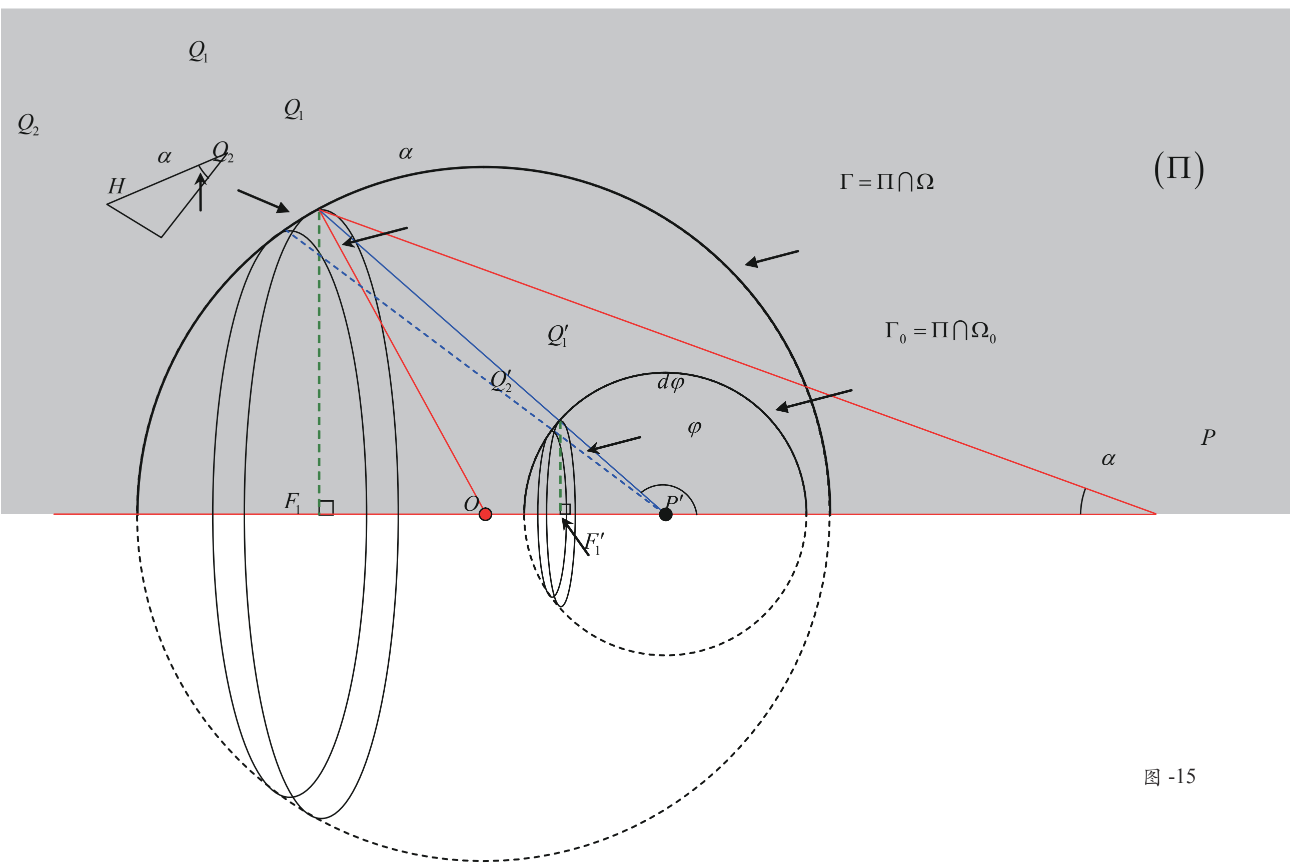


图 -15

足边角边的相似三角形条件，所以

(13) $\angle OPQ_1 = \angle OQ_1P'\ (:=\alpha)$，$\overline{Q_1P'} : \overline{Q_1P} = R : \overline{OP}$

设 $\widehat{Q_1Q_2}$ 是 Γ 上的微小弧段，它在 P' 所张之角为 $d\varphi$，则有它在 Γ_0 和半径为 $\overline{Q_1P'}$ 的半圆上的投影

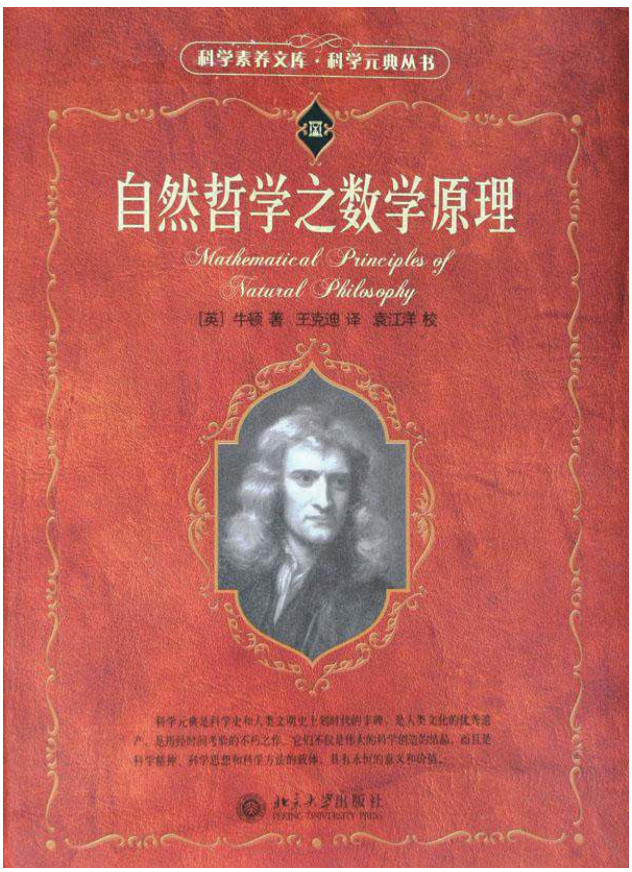
(14) $\widehat{Q_1'Q_2'} = d\varphi$，$\widehat{Q_1H} = \overline{Q_1P'}d\varphi$

而微小弧段所成的微小 ΔQ_1Q_2H 在 Q_1 的角度也是 α。所以有

(15) $\widehat{Q_1Q_2} \doteq \sec\alpha\,\widehat{Q_1H} = \sec\alpha\,\overline{Q_1P'}\,d\varphi$

令 $S(\widehat{Q_1Q_2})$ 和 $S(\widehat{Q_1'Q_2'})$ 分别是微段 $\widehat{Q_1Q_2}$ 和 $\widehat{Q_1'Q_2'}$ 在绕 OP 轴旋转所生成的环形窄条，则有下述面积公式：

(16)
$$\left|S(\widehat{Q_1Q_2})\right| \doteq 2\pi\overline{Q_1F_1}\cdot\widehat{Q_1Q_2}$$
$$= 2\pi\overline{Q_1P'}\sin\varphi\cdot\sec\alpha\,\overline{Q_1P'}d\varphi$$
$$= \sec\alpha\,\overline{Q_1P'}^2\,2\pi\sin\varphi\,d\varphi$$
$$= \sec\alpha\,\overline{Q_1P'}^2\cdot\left|S(\widehat{Q_1'Q_2'})\right|$$



《原理》，牛顿的辉煌巨著

因此 $S(\widehat{Q_1Q_2})$ 所施于质点 P 的总引力为

(17)
$$\cos\alpha\cdot G\cdot\frac{\left|S(\widehat{Q_1Q_2})\right|\cdot\rho\cdot m}{\overline{Q_1P}^2}$$
$$= G\rho m\cdot\frac{\overline{Q_1P'}^2\left|S(\widehat{Q_1'Q_2'})\right|}{\overline{Q_1P}^2} = G\rho m\cdot\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\left|S(\widehat{Q_1'Q_2'})\right|$$

由此易见球面 Ω 施于质点的总引力为

(18)
$$\sum\cos\alpha\,G\frac{\left|S(\widehat{Q_1Q_2})\right|\cdot\rho\cdot m}{\overline{Q_1P}^2}$$
$$= G\rho m\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\sum\left|S(\widehat{Q_1'Q_2'})\right| = G\frac{4\pi R^2\rho\cdot m}{\overline{OP}^2}$$
$$= G\frac{M\cdot m}{\overline{OP}^2},\quad M = 4\pi R^2\rho\ (\Omega \text{ 的总质量})$$

〔注〕：上述证明和两千多年前阿基米德对于球面面积等于 $4\pi R^2$ 的证明有异曲同工之妙，充分展现有关于球面的积分求和之艺术。再者，上述论证不但初等简洁，而且也明确展现了球对称和平方反比律之间的如何密切配合。

§7. 结语

从毕氏学派到牛顿《原理》，理性文明世代相承精益求精经历了两千多年的进化历程；而几何学、天文学和物理学则是其中的主轴与主角，研究和地球同为太阳系行星的运行的“千古之谜”则又是贯串全局的核心议题。纵观全局，古希腊几何基础论开普勒的《新天文学》和牛顿的《原理》乃是分别在几何学、天文学和物理学上重大突破，是理性文明两千年的三个伟大里程碑。本文对于三者各作简朴扼要的重访。读者可以从它们的概述与重访中看到，几何学、天文学和物理学密切相连，相辅相成；而且上述三个重大突破都经历了迷途知返才脱胎换骨，得建辉煌；几何基础初论在可公度性上的误判，天文学上误入地心论之歧途两千年和物理学上亚里斯多德误导两千年，此事值得我们深刻反思。两千多年的理性文明发展史是一个极大课题。其中富有启发，值得深思之处极多，这篇短文以及我们合写的小册子（《千古之谜与几何天文物理两千年》），仅仅是概述其中之一、二，意在抛砖引玉。在此且以下述几点注记作结：

(1) 几何学因为量天的要求而立论严格，虽经挫折但能迷途而返，浴火重生，得见精深（希伯克斯，欧都克斯）。

天文学上的量天巨梦所致力者就是要从行星的视运动（亦即它们在星际的行踪）的实测数据去理解太阳系永恒之舞的规律何在？此事一直到哥伯尼、第谷、开普勒各尽具毕生之力的巨棒三接力，才圆了量天巨梦。如今回顾反思，其实几何学也只有在研究太阳系永恒之舞上才真正有用武之地。因为太阳系之外的天体和地球的距离都极为遥远，其视运动几乎就是不动之点！

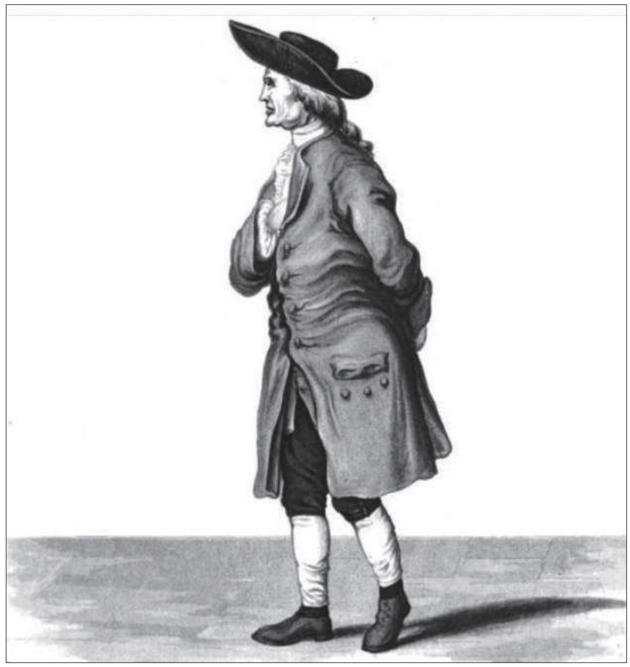
若改用物理学的观点来看，太阳系永恒之舞，其实是大自然一直在展现着一个“大实验”。我们所要研究探讨者是其中蕴含的本质 (physical causes)。其实古代的物理学家（例如亚里斯多德）想要研究者主要是“天文之理”，但是在其规律还是“千古之谜”的实况下，就只能泛泛空谈地形而上一番。如今回顾反思，物理学要等到千古之谜得解（开氏行星律）之后，才真正上路，实非偶然。再者，也只有把行星定律再精益求精到至精至简的万有引力定律，理性文明才能够真正跨出太阳系，拓展到几何观察力所不及的太空。

(2) 面积律：在开普勒的探索历程中，地球面积律是首先被发现者，而且它又是他往后继续发现火星的面积律、椭圆律以及整个体系的坚实基础。同样的，在牛顿的工作中，对于面积律的数理内涵乃是其力向心也是他得窥精深的首要突破点。如今回顾反思，它就是力学中极为简朴的角动量守恒律 (conservation of angular momentum)，它是运动和绕中心旋转对称性相互作用的产物。

(3) 从量天有术到秤地（以及太阳）有法：开普勒行星定律是量天有术的辉煌成果。由此精益求精而得万有引力定律，则使得我们能够估算地球（以及太阳）的质量，亦即秤地（以及太阳）有法了！为什么呢？由地心引力公式

$$|\vec{F}| = G\frac{Mm}{R^2} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = G\frac{M}{R^2} = 9.8\text{米}/\text{秒}^2$$



考文迪什，(Henry Cavendish，1731-1810)，英国物理学家和化学家；精确测量了地球的密度。被认为是牛顿之后英国最伟大的科学家之一。

其中 G 是（万有）引力常数，R 是地球之半径，M 则是地球之总质量。所以若能用实验测得 G 之值，即可用下式推算地球之重：

$$M = |\vec{a}| \cdot \frac{R^2}{G}$$

这就是著名的凯文迪希 (Cavendish) 实验所测定者，他也就被尊称为第一位秤地球的科学家。

再者，只要再测算地球绕日在近日点的向心加速度，则又可以用上述 G 之值推算太阳的质量。归根究底，这多是精益求精的数理分析之功，其简朴有力，引人入胜之妙，于此可见一斑。一如毕氏远在两千五百年前创导的卓见：基础数学一直在理性文明中扮演着核心的角色，数学与文明，水乳交融，平实近人，引人入胜！

作者介绍：

项武义，台湾大学本科毕业，普林斯顿大学博士，著名数学家，美国伯克利加州大学教授。研究领域为微分几何。除学术成就外，在数学教学法上也颇有建树。经常于两岸三地讲学与交流。教学心得包括在《基础数学讲义》的三卷本《基础代数学》、《基础几何学》与《基础分析学》等。