Mathematical Culture

数学文化

从哥德巴赫说开去

2010 / 第 1 卷第 4 期
ISSN：2070－545X

历史照片

苏步青（右 2）和陈建功（右 3）等于 1938 年合影

1961 年，毛泽东接见苏步青；中为著名京剧表演家周信芳。

从左至右：庄歌，罗懋康，贾朝华，汤涛，项武义，刘建亚，邓明立，张英伯，付晓青

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

主　编　刘建亚（山东大学）
汤　涛（香港浸会大学）

编　委　蔡天新（浙江大学）　张海潮（台湾大学）
邓明立（河北师范大学）　项武义（加州大学）
贾朝华（中国科学院）　罗懋康（四川大学）
张英伯（北京师范大学）　顾　沛（南开大学）
张智民（Wayne State 大学）　宗传明（北京大学）

美术编辑　庄　歌　董　昊　黄潇逸　李敏春

文字编辑　付晓青

推广顾问　郝志峰　陈金如　李辉来

特约撰稿人　丁　玖　李尚志　姚　楠　游志平
木　遥　于　品　蒋　迅　萨　苏　卢昌海

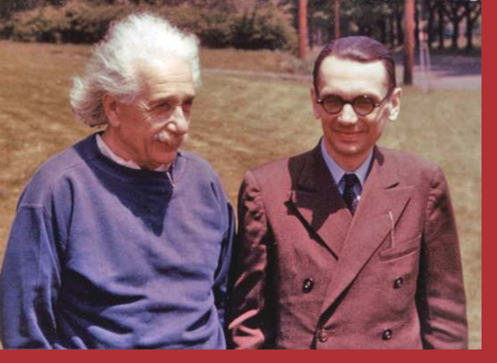
《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者。

本期刊欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com; 或mc@global-sci.org

本刊欢迎订阅
订阅联络代理：北京中科进出口有限责任公司
电话：010-84039343转633；传真：010-84038202
电邮：periodical@bjzhongke.com.cn (中国)
info@global-sci.org (海外)
开户账号：中国银行金宝街支行
银行账户：810907911408091001

本期刊欢迎教育界，出版界，科技界的广告
本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2010年12月

Contents | 目录



从哥德巴赫说开去

贾朝华

很多中国人是从徐迟的一篇报告文学中知道哥德巴赫这个名字的。在这篇文章里，徐迟讲述了数学家陈景润刻苦钻研，终于在哥德巴赫猜想研究上取得重大突破的真实故事。文章最初刊登在《人民文学》杂志1978年第1期上，标题就是“哥德巴赫猜想”，《人民日报》和《光明日报》随即转载，一时间传遍全国。

从那以后，人们对于陈景润的故事津津乐道，也常用“哥德巴赫猜想”来形容极其困难的问题或难以企及的目标。然而，大家对于哥德巴赫本人却了解甚少。本文我们就来说说哥德巴赫和他那个时代的一些事情。

小城故事

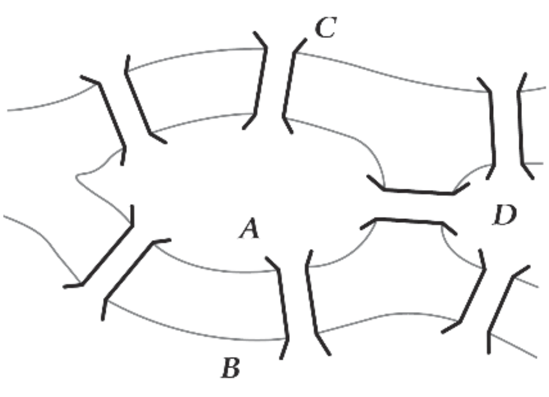
哥德巴赫（Christian Goldbach），1690 年 3 月 18 日出生于普鲁士的哥尼斯堡，生长在一个官员家庭。

普鲁士是德意志的一个邦国。当时的德意志虽然称为“德意志神圣罗马帝国”，但诸侯争霸，邦国林立，皇帝的控制力有限。而且皇帝不是世袭的，是由一些诸侯选举出德意志国王，经罗马教皇加冕后才成为皇帝，那些有资格选举国王的诸侯称为“选帝侯”。

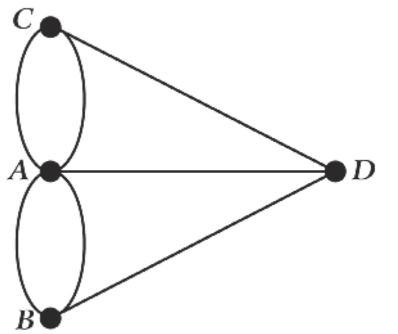
勃兰登堡选帝侯兼普鲁士公爵腓特烈三世因积极支持皇帝对法国宣战，被授予普鲁士国王称号。1701 年，他在哥尼斯堡加冕为王，开启了普鲁士王国的基业。此后，普鲁士迅速崛起，通过战争和政治手段，终于在 1871 年，由国王威廉一世和“铁血宰相”俾斯麦完成了德意志的统一。

哥尼斯堡（Konigsberg）是一座历史名城，德国的很多重要历史事件在这里发生。第二次世界大战德国战败后，根据“波茨坦协定”，哥尼斯堡划归苏联，改名为加里宁格勒。加里宁去世前是苏联名义上的国家首脑，也是一位教育家，他曾说过：“很多教师常常忘记他们应该是教育家，而教育家也就是人类灵魂的工程师”，后来人们就经常说“教师是人类灵魂的工程师”。

在秀丽的小城哥尼斯堡，普雷格尔河贯穿全城，给城市带来了灵气。这条河有两条支流，它们环绕着一个小岛，在这两条支流上有七座桥，见下图。城里的居民常到这里散步，久而久之，人们就有了这样一个问题：能不能既不重复又不遗漏地一次走遍这七座桥？这就是有名的“哥尼斯堡七桥问题”。



哥尼斯堡七桥



哥尼斯堡七桥的抽象图

在俄国圣彼得堡的大数学家欧拉知道这个问题之后，就进行了研究。他将陆地和小岛用点表示，而将七座桥用线表示，得到了一个用七条线组成的图形，见上图。于是，七桥问题就变成了能否一笔画出这个图形的问题。1736 年，欧拉用严格的数学方法证明了这种画法是不存在的，就是说不可能既不重复又不遗漏地一次走遍这七座桥。对于类似的更一般的图形，欧拉也找到了一个简便的原则，可以判定它能否一笔画出，这就是“一笔画定理”。欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的研究，推动了一个重要的数学分支的产生，这个分支叫做拓扑学。

哥德巴赫在家乡的哥尼斯堡大学学习数学和医学。因为数学这种理论学科，工作机会相对少，所以要学一门像医学这样的实用学科。当时的一些数学家，如约翰 • 伯努利和丹尼尔 • 伯努利都获得过医学博士学位，这有点像今天有些人同时学习数学和计算机科学一样。

哥德巴赫 20 岁大学毕业，和大多数这个年龄的青年人一样，渴望出去看看外面的世界。加上家庭状况不错，于是，1710 年之后，哥德巴赫就云游欧洲，结识了不少当时欧洲的数学名家。

外面的世界

哥德巴赫首先去莱比锡，拜访了大数学家莱布尼茨。当时莱比锡在萨克森选帝侯腓特烈 • 奥古斯特一世的治下，不属于普鲁士王国，因此，从哥尼斯堡到莱比锡就算是出国了。

莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646-1716）对于数学的最大贡献是发明了微积分，微积分在自然科学、社会科学和日常生活中都有广泛的应用，它的发明也给数学的发展带来了繁荣的

莱布尼茨 (1646-1716) 与牛顿相互独立地发明了微积分

局面，意义之大无法估量。由于莱布尼茨与牛顿对于微积分发明的优先权问题，导致了欧洲大陆数学家与英国数学家一个多世纪的争论，最终人们公认，莱布尼茨与牛顿相互独立地发明了微积分。

莱布尼茨还发明了二进位制，就是用 0 和 1 来表出所有的正整数，这和我们平常用的十进位制不同。电子计算机都是用二进位制的，这是因为电流的状态只有两种——断电和通电，它们分别对应于 0 和 1。莱布尼茨对于中国北宋时期邵雍的“伏羲六十四卦图”很感兴趣，他用二进位制合理地解释了“六十四卦图”。此后，在世界范围内兴起了对于易学的研究，人们对于中国的这门古老学问兴趣日增。邵雍是我国北宋时期的哲学家，一代易学大师，他对于天地运化、阴阳消长有着独到的见解。虽然现在很少有人知道邵雍了，但他说过的“一年之计在于春，一天之计在于晨，一生之计在于勤”成了很多人的座右铭。

作为一位哲学家，莱布尼茨在哲学史上享有崇高的地位，他的科学思想与哲学思想往往是相互联系和促进的。莱布尼茨开创了德国的自然哲学，他的学说和其弟子沃尔夫的理论相结合，形成了莱布尼茨 - 沃尔夫理论体系，极大地影响了德国哲学的发展，尤其是影响了康德、黑格尔等人的哲学思想。

此外，莱布尼茨在数理逻辑、物理、化学、光学、地质学和生物学等诸多方面都有杰出贡献，无疑是他那个时代最为博学的人。英国哲学家、数学家和逻辑学家罗素在他的《西方哲学史》一书中，称莱布尼茨是“一个千古绝伦的大智者”。

在现实生活中，莱布尼茨是积极入世的。他大力推动柏林科学院的建立，并于 1700 年出任首任院长。1711 年至 1716 年期间，俄国的彼得大帝几次听取莱布尼茨关于建立科学院的建议，并授予他带薪的数学和科学宫廷顾问头衔。据说莱布尼茨还写信给中国清朝的康熙皇帝，建议成立北京科学院，可惜未被采纳。

莱布尼茨晚年主要效力于汉诺威王室，然而新上台的选帝侯乔治 • 路德维希对他不太感兴趣，使得莱布尼茨感到政治上有些失意。另外，莱布尼茨终生未婚，不教书，也从不进教堂，行为举止和当时上流社会的规范不太合拍，因而门庭有些冷落。

哥德巴赫的到来，使莱布尼茨感到很高兴，对于这位朝气蓬勃的晚辈，莱布尼茨少不了给予指点和教诲。莱布尼茨广博的学识和高屋建瓴的观点，也使哥德巴赫终身受益。

接着，哥德巴赫又到伦敦访问棣莫弗。棣莫弗（De Moivre，1667-1754）是法国人，因躲避宗教迫害移居英国，以后就一直生活在英国。

棣莫弗最擅长的研究领域是概率论，并对此做出了很大的贡献。牛顿对棣莫弗的著作《机会的学说》很欣赏，当学生向他请教概率论问题时，牛顿常常介绍他们去找棣莫弗，他认为棣莫弗在这方面比他强得多。

概率论是研究偶然性（或者随机现象）的数学分支，它的起源与掷骰子赌博的输赢问题有关。16 世纪意大利文艺复兴时期的学者卡尔达诺对此就有研究，并著有《论赌博游戏》一书。17 世纪中叶，法国宫廷贵族中盛行掷骰子游戏，他们常就一些输赢概率的问题请教数学家帕斯卡尔。帕斯卡尔

哥德巴赫的到来，使莱布尼茨感到很高兴，对于这位朝气蓬勃的晚辈，莱布尼茨少不了给予指点和教诲。莱布尼茨广博的学识和高屋建瓴的观点，也使哥德巴赫终身受益。


闻名于世的伯努利家族在风景如画的瑞士繁衍生息

在与费尔马的通信里，常常讨论这类问题。当时旅居巴黎的荷兰数学家惠更斯，知道这些问题后也很感兴趣，还为此写了专著。后人认为，帕斯卡尔、费尔马和惠更斯是概率论的创始人。

第一个对概率论做出重大理论贡献的是雅各布•伯努利，他证明了“大数定律”，棣莫弗将它精细化为“中心极限定理”。这类定理的大致意思是说：如果只做一次试验，某种现象的出现会是偶然的；但如果是做大量重复试验的话，那么这种现象出现的次数在总试验次数中所占的比例相当稳定，呈现出一种必然性。正如棣莫弗在《机会的学说》一书中所指出的那样：尽管机会具有不规则性，但由于机会无限多，随着时间的推移，不规则性与秩序相比将显得微不足道。

棣莫弗积极推动概率论在社会科学中的应用，他还参与研究保险业中的实际问题并写有专著，为保险业合理处理有关问题提供了依据，书中的一些内容被后人奉为经典。

复数理论中有棣莫弗定理，它的表述是这样的：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

其中 $i=\sqrt{-1}$ ，n 是正整数。这个定理的一般形式和完整证明，后来由欧拉给出。我们取 $n=2$ ，得到

$$\begin{aligned}&\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta,\\&= \cos 2\theta + i\sin 2\theta,\end{aligned}$$

比较等式两边的实数部分和虚数部分，可得

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta,\\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta,\end{aligned}$$

这是三角学中关于余弦函数和正弦函数的倍角公式。如果取 $n=3, 4, \cdots$，可以得到更复杂的倍角公式。有了棣莫弗公式，只要通过简单的推导，我们就可以得到这些倍角公式，而不必去死记硬背它们。

在那个时代，数学的分科远没有现在这样细，数学家的兴趣和知识面都比较广泛。哥德巴赫对于理论研究和实际问题都很有兴趣，据记载，他还和炮兵司令一起研究过弹道学的问题，因而，哥德巴赫会和棣莫弗谈得来。

后来，哥德巴赫去了欧洲其它一些城市，分别见到伯努利家族的几位成员，其中丹尼尔•伯努利和哥德巴赫关系密切，他们之间有比较频繁的通信，一直持续到了1730年。

16世纪末，伯努利家族的祖辈为躲避宗教迫害，从比利时的安特卫普辗转来到瑞士的巴塞尔，在那里繁衍生息。这个家族以经商为传统，也有个别人行医，似乎都和数学沾不上边。但在一个世纪之后，却在三代人中出现了八位数学家，其中几位有相当大的成就。提起伯努利家族，人们在谈论他们的数学的同时，还会讨论关于天才与遗传之类的话题，这些话题往往比数学更吸引人。

上面说到的雅各布•伯努利（Jakob Bernoulli，1654-1705）是这个家族的第一位数学家，他除了在概率论上做出重大贡献外，还在解析几何、无穷级数、微分方程和变分法等诸多方面均有杰出的工作，数论里重要的“伯努利数”和“伯努利多项式”是他的创造。解析几何中的“伯努利双纽线”是雅各布提出来的，但他更钟爱对数螺线，这种曲线经过多种几何变换，依旧还是它本身，性质非常奇妙。在雅各布的墓碑上，就刻有对数螺线，并有这样的铭文——“纵然变化，依旧故我”，这也许寓意着来世还当数学家。

因为雅各布去世较早，所以哥德巴赫没有机会向他请教。但雅各布还有两个弟弟，尼古拉•伯努利一世（Nicolaus Bernoulli I，1662-1716）和约翰•伯努利（Johann Bernoulli，1667-1748），也都是出色的数学家，其中约翰比雅各布的研究范围更广泛且更加多产。

约翰不仅在数学上作了大量的工作，他还解释了力学中的虚位移原理，写了关于潮汐和航行以及行星轨道的数学原理的文章，提出了光学中的焦散面理论等。他的最流行的成果，当属大学微积分教程里总要讲到的“洛必塔法则”。当时，约翰的学生洛必塔编写了一本有影响的书《无穷小分析》，把约翰的这个结果收了进去，后世就误称为“洛必塔法则”。这里面还有一段故事，在《数学文化》创刊号中，万精油先生在“数学史上的一桩错案”一文里有详细的讲述，说起来都是银子惹的祸。

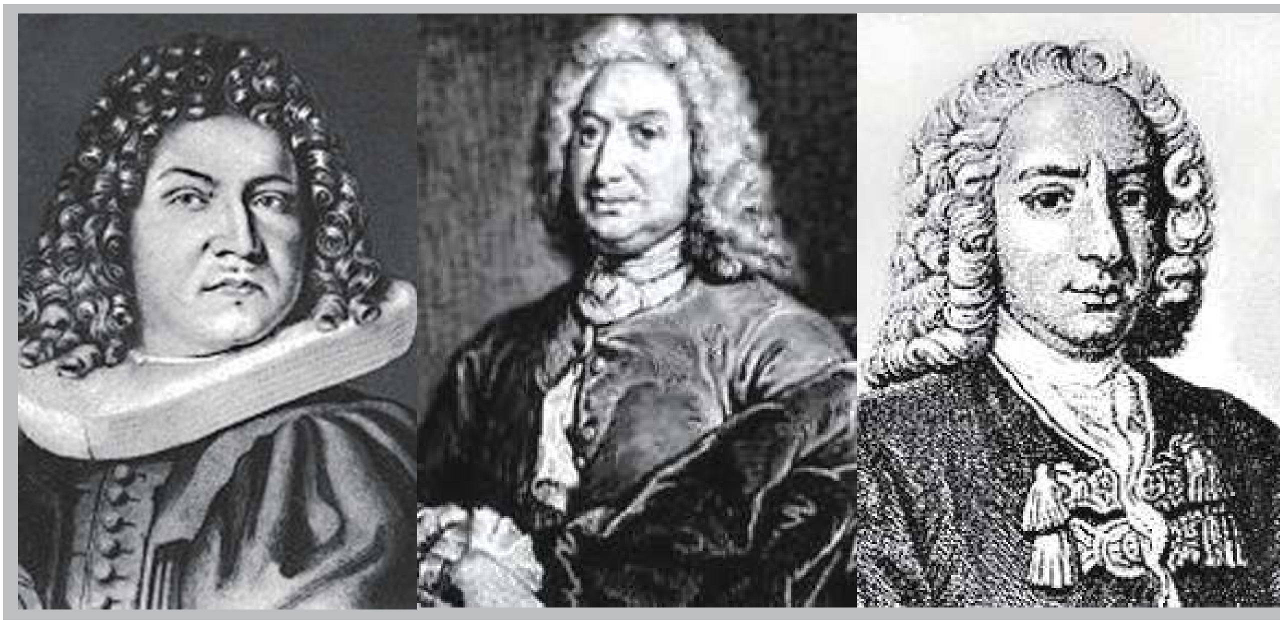
约翰有三个儿子，都是优秀的数学家，其中丹尼尔•伯努利（Daniel Bernoulli，1700-1782）被认为是伯努利家族中最杰出的。此外，约翰还培养出了一位非凡的学生欧拉，这是很值得他骄傲的。

丹尼尔从小受到家庭的熏陶，在研究风格上继承了约翰的传统。他一生著述丰富，还因天文学、地球引力、潮汐、磁学、船舶航行的稳定性以及振动理论等多方面的研究成果，先后十多次获得巴黎科学院的奖赏，他的获奖次数可以和欧拉相比，因而具有了广泛的知名度。

据记载，丹尼尔聪慧过人，富有想象力。现存画像上的丹尼尔，明目慧瞳，俊朗飘逸，一表人才。丹尼尔曾被人误认为是个公子哥儿，因而流传下来了一段故事。究其原因，大概是在公众的眼里，大学者都得像老树般的苍劲。

伯努利家族后面的成员在数学上不那么突出，这会让人以为这个家族的基因有所衰退。其实不然，有人根据家系查询过，这个家族后来至少有120多位成员，在神学、法学、医学、文学、艺术、管理和科学的其它门类中取得了成功，有的还卓有成就，伯努利家族的香火相当旺盛。

欧洲的旅行，使哥德巴赫不断开阔眼界，增长学识，还在



从左至右：雅各布·伯努利，约翰·伯努利， 丹尼尔·伯努利

学术圈里交了不少朋友，收获颇丰。当然，他难免有一点思乡，想念故乡的亲人朋友和美景美食。

说起德国料理，我们能想到的无非是香肠和马铃薯（俗称土豆）之类，可称道的不多。但有一样东西还是值得推荐的，就是德国咸猪手。先将猪的前蹄用百里香、月桂叶、胡椒粉和精盐腌制，再用笼屉去蒸，然后经过炉火的长时间烘烤，出炉后的咸猪手，表皮金黄诱人、酥香可口，里面色泽枣红、清香弹牙。佐以德国特有的甘蓝泡菜，酸度适中，甜爽去腻。配酒最好是全麦啤酒，口味醇厚，麦香浓郁，与咸猪手十分相宜。餐后再来一块美味的黑森林蛋糕，香浓的巧克力味道漫溢口中，很难用文字去描述了。

新奇的土地

1724年，哥德巴赫回到了故乡哥尼斯堡，又见到亲人和朋友，自然是十分的高兴。空闲时到普雷格尔河畔走走，呼吸清新的空气，看看熟悉的景色，很快就从旅途的疲惫中恢复过来了。

此时的哥德巴赫已经34岁，过了而立之年，该看的人都看了，该见的世面也见过了，是到好好规划一下未来的时候了。

事也凑巧，就在哥德巴赫回家后不久，正好有两位学者路过哥尼斯堡，他们是去圣彼得堡参与圣彼得堡科学院筹建工作的。在与他们的言谈中，哥德巴赫了解到一些基本情况，感觉正对心思。再说他从未去过俄罗斯，那里对他来讲是一个新奇的地方。于是，哥德巴赫精心准备了一份学识证明人名单，在第二年圣彼得堡科学院正式成立之后，就将申请材料寄了过去。

彼得大帝几次听取莱布尼茨的建议之后，终于在1724年1月颁布谕旨，决定成立圣彼得堡科学院。彼得大帝拟定了科学院章程，其中强调，科学院的理论研究应对与国家实际利益密切相关的问题做出贡献。章程中的重要一条是，邀请国外的一些知名学者到科学院工作，以带动俄罗斯科学的发展。彼得大帝于1725年2月逝世，圣彼得堡科学院的正式建立是由他的妻子、继任沙皇叶卡捷琳娜一世完成的。

“沙皇”是俄国皇帝的称谓，俄语中的“沙”是拉丁语“凯撒”的转音，“沙皇”的中文译名是采取一半音译、一半意译的方式。

彼得一世（1672 -1725）是俄国罗曼诺夫王朝的第四代沙皇，被公认为是俄国历史上最杰出的皇帝。他一生励精图治，锐意改革，把俄国从落后的封建国家变成了欧洲的一个

此时的哥德巴赫已经34岁，过了而立之年，该看的人都看了，该见的世面也见过了，是到好好规划一下未来的时候了。

强国。1721 年，在俄国打败北方强国瑞典之后，俄国枢密院授予彼得一世“全俄罗斯皇帝”和“祖国之父”称号，后世尊称他为彼得大帝。

彼得大帝（Peter the Great，1682-1725 在位）身高 2.05 米，仪表非凡，精力充沛。他除了在政治和军事方面极有天赋之外，还喜欢做木工、车工等手艺活儿，而且相当专业。但彼得更喜欢的是航海和造船，为此在 1697-1698 年间，他专门组织了一个约 250 人的大考察团，到荷兰和英国学习。彼得隐姓埋名，混在考察团中，对外身份是“炮手米哈伊洛夫”。在荷兰期间，彼得和同伴们在专家的指导下，成功制成一艘三桅巡洋舰。在彼得的毕业证书上有这样的评语：米哈伊洛夫聪明勤奋，已经学会了造船专家的各项业务。到了英国后，彼得除了学习造船外，还参观了牛津大学、格林威治天文台和造币厂等。彼得大帝的这次出行，对他日后制定各项政策有很大的影响。

俄国大诗人普希金这样评述彼得大帝：他“时而是学者，时而是英雄，时而是航海家，时而是木匠”。不仅如此，彼得还身体力行，努力学习西欧的生活方式，革除俄罗斯的传统陋习。例如，他明文规定，要用德国或法国式服装，代替俄罗斯传统不灵便的服装；他亲手剪掉了一些贵族的胡须，并对蓄胡者课以重税；他经常举办法国式的大舞会，亲自做示范表演；他还指示编写《青年守则》，用以教导贵族子弟的行为规范。经过几十年的教化，俄国上流社会的礼仪风范就与西欧没什么差别了。

彼得大帝的改革，也遇到了很大的阻力，有时充满了血雨腥风。就在他随考察团出国期间，国内发生了近卫军兵变，彼得立即匆匆赶回，镇压了兵变。俄国著名画家苏里科夫，在他的历史画“近卫军临刑的早晨”里反映了这一事件。画中的背景是莫斯科克里姆林宫外墙和瓦西里大教堂的圆屋顶，近景挤满杂乱的人群，是悲哀的近卫军和痛哭的家属，远处身穿海蓝色军装的彼得大帝骑在马上，他的背后是森严的行刑队和一排绞刑架。画面的气氛相当凝重，充满悲剧色彩。

彼得大帝的儿子阿列克谢也反对改革，还企图举兵篡位，被彼得送进监狱，死在那里。另外，4 岁的王储也早早夭折。

彼得大帝 (1672-1725)

叶卡捷琳娜一世 (1684-1727)

1733 年安娜女沙皇时期的 1 卢布银币

彼得因而忧郁成疾，于 1725 年 2 月去世，死时不到 53 岁。

继任女沙皇叶卡捷琳娜一世（1684-1727）和历史上的叶卡捷琳娜大帝不是一个人，她的本名叫玛尔塔。玛尔塔是农夫的女儿，嫁给了一个瑞典骑兵，在俄国与瑞典的战争中被抓，后来被送给了彼得的重臣缅希科夫。彼得在缅希科夫家里遇到玛尔塔，两人一见倾心，结下了不解之缘。玛尔塔相貌出众，妩媚动人，而且温柔有礼，因而俘获了彼得的心。

叶卡捷琳娜一世（1725-1727 在位）文化水平不高，执政能力有限，朝廷大事基本上交给她的老东家缅希科夫打理。虽然叶卡捷琳娜一世政绩平平，但她对于执行彼得大帝的遗愿确是全心全意的，圣彼得堡科学院的正式建立是她政治生涯中最光辉的一笔。圣彼得堡科学院是苏联科学院和俄罗斯科学院的前身，它的建立开启了俄罗斯近 300 年的科学传统，意义非常深远。

哥德巴赫向圣彼得堡科学院递交申请之后，不久便被聘为科学院的数学教授和记录秘书。1725 年，哥德巴赫踏上俄罗斯这片新奇的土地，从此他的命运就和俄罗斯紧密地联系在一起了。

哥德巴赫向圣彼得堡科学院递交申请之后，小费了一点周折，不久便被聘为科学院的数学教授和记录秘书。1725 年，哥德巴赫踏上俄罗斯这片新奇的土地，从此他的命运就和俄罗斯紧密地联系在一起了。

哥德巴赫当时的年薪为 600 卢布，合月薪 50 卢布。上图是 1733 年安娜女沙皇时期的 1 卢布银币，正面是女皇头像，反面是俄罗斯国徽双头鹰图案，银币重 25.6 克，这和中华民国初期 1 银元的分量差不多，叶卡捷琳娜一世时期的卢布可能大致相同。哥德巴赫到俄国后，生活应该是比较宽裕的，在学术研究之余，还做点行政工作。

在牛顿和莱布尼茨发明了微积分之后，伯努利家族和欧拉等一些数学家又进一步推动微积分理论和技巧的发展，从中产生出了像无穷级数、常微分方程、偏微分方程、微分几何和变分法等一些重要的数学分支，这些分支合起来，形成一个被称为“分析”的数学研究领域，这个领域与几何、代数等领域一起，构成了理论数学的核心部分。对于当时正在蓬勃发展的这些数学分支，哥德巴赫都很关注和感兴趣，他自己也写过若干篇关于无穷级数和微分方程的论文，并在圣彼得堡科学院宣读。虽然这些论文有一定水平，但确实没有传世价值，后来也就被人们遗忘了。

圣彼得堡（Saint Petersburg）是彼得大帝于 1703 年下令修建的，它的名字来源于耶稣的弟子圣徒彼得，1924 年改名为列宁格勒，1991 年苏联解体后，经市民投票，恢复了圣彼得堡的原名。

圣彼得堡位于波罗的海芬兰湾的东岸，涅瓦河的河口，当初这里只是一片沼泽，彼得大帝先在这里建军事要塞，后

丹尼尔·伯努利也于1725年来到了圣彼得堡科学院，哥德巴赫就有了共同研究的伙伴，他们时常徜徉在涅瓦河畔，切磋讨论数学问题。

扩建为城市。1712年，彼得大帝将首都从莫斯科迁到圣彼得堡。迁都的目的，是为了更顺利地推行他的改革政策，也是为俄国争取出海口，沟通与西欧的海上联系。当时，圣彼得堡紧挨着瑞典的领土（如今这块地方属于芬兰），瑞典人经过1704年和1705年两次失败的进攻之后，未再试图夺取圣彼得堡。

涅瓦河的流量排在伏尔加河与多瑙河之后，是欧洲第三大河，它经过圣彼得堡，流入芬兰湾。在圣彼得堡，涅瓦河分支遍布，河面上有几百座桥梁，把岛屿和陆地相连，自然风光十分秀丽，因此这座城市也有“北方威尼斯”之称。俄国著名诗人丘特切夫的“在涅瓦河上”一诗中，有这样的句子：

在涅瓦河的轻波间
夜晚的星把自己投落，
爱情又把自己神秘的小舟
寄托给任性的波浪。
…… ……
涅瓦河啊，你的波涛
广阔无限，柔和而美丽，
请以你自由的空间
荫护这小舟的秘密！

圣彼得堡还是世界上少数具有白夜的城市，白夜时漫步在涅瓦河畔，遥望蔚蓝天空的北极光，感觉在梦幻中一样。

对于建造圣彼得堡，彼得大帝花费了很大的心血。他从法国、意大利等国请来了一大批著名建筑师，这些人设计出很多经典建筑，为俄罗斯带来了巴洛克风格。在17世纪初至18世纪上半叶，巴洛克是流行于欧洲的主要艺术风格，它的特点是装饰繁复、富丽堂皇、极具动感。彼得宫（也称为“夏宫”）是巴洛克建筑风格的一个典范，整个宫殿豪华壮丽，装饰精巧，被誉为“俄罗斯的凡尔赛宫”。宫殿下的大阶梯由37座金色雕像、64座喷泉和许多雕塑环绕点缀，一条水渠将大阶梯与波罗的海相连。圣彼得堡被认为是欧洲最美丽的城市之一，它的建成是彼得大帝的一个伟大功绩。

丹尼尔·伯努利也于1725年来到了圣彼得堡科学院，哥德巴赫就有了共同研究的伙伴，他们时常徜徉在涅瓦河畔，切磋讨论数学问题，蓝天之下的花园、宫殿、教堂、喷泉和雕塑，让人心旷神怡。

政治风云

轻松的日子过得快，转眼就过去了一年多。比起他的数学才能来，哥德巴赫与人打交道的能力要更突出一些，因而，在1726年，圣彼得堡科学院院长就向朝廷推荐哥德巴赫，想让他担任彼得·阿列克谢耶维奇·罗曼诺夫（1715-1730）的家庭教师。

小彼得是阿列克谢的独生子，也就是彼得大帝的孙子。他此时11岁，是罗曼诺夫王朝唯一的男性继承人，因此对于他的影响是一件很重要的事情。当时把持朝政的缅希科夫自然不会放过这样的机会，他指派他的亲信担任小彼得的家庭教师，因而科学院的推荐没有成功。

提到缅希科夫（1673-1729），可以说是一位奇才。他少年时在莫斯科街头以卖馅饼为生，偶遇彼得一世，他的机灵乖巧很讨彼得的喜欢，因而被彼得收作了勤务兵。缅希科夫随彼得大帝东征西战，由于他的忠诚而深得彼得的信任，因此得以步步高升。虽然缅希科夫没受过多少教育，但却具有罕见的军事能力和行政才干。他曾在多次著名战役中指挥军队，取得辉煌胜利，后来成为第一位俄国大元帅。缅希科夫负责过圣彼得堡的工程建设，他还创办了砖瓦厂、木材加工厂、盐场、渔场和酿酒厂等诸多企业。

1727年5月，叶卡捷琳娜一世去世，12岁的小彼得继位，称彼得二世（1727-1730在位）。此时的朝政大权仍由缅希科夫把持，但他对于金钱和权力的过分贪婪，招致了很多贵族的极度不满。贵族们策动近卫军，逮捕了缅希科夫，将他全家流放到西伯利亚的偏僻小镇别留佐夫。两年后，缅希科夫在那里郁闷地死去。苏里科夫的历史画“缅希科夫在别留佐夫镇”，描绘了在西伯利亚的小木屋里，落寞的政治家在烛光下，和儿女们一起读圣经的场面。苏里科夫的“近卫军临刑的早晨”、“缅希科夫在别留佐夫镇”和“女贵族莫洛卓娃”，被称为他的历史画三部曲，都是令人震撼的杰作。

缅希科夫一倒台，他指派的家庭教师只得走人。1727年底，哥德巴赫再次被推荐，当上了彼得二世的家庭教师。这样，哥德巴赫的宁静日子就已成过去，他也要经常关心俄国的政治风云了。

就在叶卡捷琳娜一世去世的那一天，欧拉来到了圣彼得堡。此时的欧拉是一位20岁的青年，他是约翰·伯努利的学生，


欧拉(1707-1783)，最伟大的数学家之一

也是约翰的儿子丹尼尔的好朋友。丹尼尔得知圣彼得堡科学院医学部可能还有职位，就马上写信告诉了欧拉。于是，欧拉一面与科学院联系，一面突击学习生理学，并在巴塞尔大学旁听了医学讲座。接到了去圣彼得堡的邀请后，欧拉马上动身，谁知正赶上女沙皇去世，情况有变，医学部的职位没了着落。欧拉感到很绝望，束手无策，幸亏有丹尼尔等人的帮助，欧拉才进了数学部，给丹尼尔当助手。这样，欧拉有了固定的职位和稳定的收入，就能安下心来做数学研究了。

欧拉（Leonhard Euler，1707-1783）是瑞士巴塞尔人，他的父亲是基督教加尔文教派的牧师，曾经听过雅各布•伯努利的课。当时教会势力很大，牧师的社会地位普遍要比科学家高，这和现代的情况很不相同。因此，欧拉的父亲希望欧拉将来作一名牧师，也是顺理成章的事情。

欧拉遵从父亲的意见，进了巴塞尔大学，学习神学和希伯来语等。然而他在数学课上的卓越表现引起了约翰•伯努利的注意，于是约翰慷慨地每周给欧拉单独辅导一次，在此过程中欧拉也和丹尼尔有了交往，彼此成了要好的朋友。欧拉17岁取得硕士学位后，约翰和丹尼尔说服欧拉的父亲，没有让欧拉去作牧师，这实在是数学界的一件幸事。

在数学的历史上，人们常常将欧拉与阿基米德、牛顿、高斯并列为最伟大的数学家。在欧拉到达圣彼得堡之前的两个月，牛顿在伦敦逝世。按照法国启蒙运动思想家伏尔泰所说，英国的大人物们争相扛抬牛顿的灵柩，英国人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的国王。诗人亚历山大•波普在牛顿的墓志铭上这样写道：“自然和自然定律隐藏在茫茫黑夜之中。上帝说：‘让牛顿出世！’于是一切都豁然明朗。”牛顿时代一过去，欧拉时代马上来临。伟大的无产阶级革命导师马克思在“1848年至1850年的法兰西阶级斗争”一文中，援引18世纪法国唯物主义哲学家爱尔维修的话说，“每一个社会时代都需要有自己的伟大人物，如果没有这样的人物，它就要创造出这样的人物来。”按照唯物主义历史观，欧拉的出现具有某种历史的必然性。

由于丹尼尔的关系，哥德巴赫和欧拉很快就熟悉起来了，涅瓦河畔散步又多了一个伙伴。哥德巴赫比欧拉年长17岁，在那个时代几乎是一代人的差距，哥德巴赫欣赏欧拉的聪明和勤奋，欧拉钦佩哥德巴赫的见多识广，他们之间是一种忘年之交。

彼得二世上台后不久，缅希科夫就被流放到了西伯利亚，朝政由一些保守派势力把持。1728年2月初，彼得二世将朝廷从圣彼得堡迁回莫斯科，这是保守派卷土重来的一个标志。2月底，彼得二世在克里姆林宫举行加冕大典。此时的圣彼得堡只是名义上的首都，科学院仍在运行，但多少有些冷清。

哥德巴赫作为彼得二世的家庭教师，也跟着来到了莫斯科。加冕后的彼得二世，还只是个13岁的少年，十分贪玩，不爱学习，也没有能力管理朝政。彼得二世经常带着比他大6岁的姑姑伊丽莎白和一些青年贵族外出郊游和打猎，读书只是一个点缀。莫斯科郊外有大片的白桦林，在湛蓝的天空下骑马飞驰，是他们十分开心的事情。

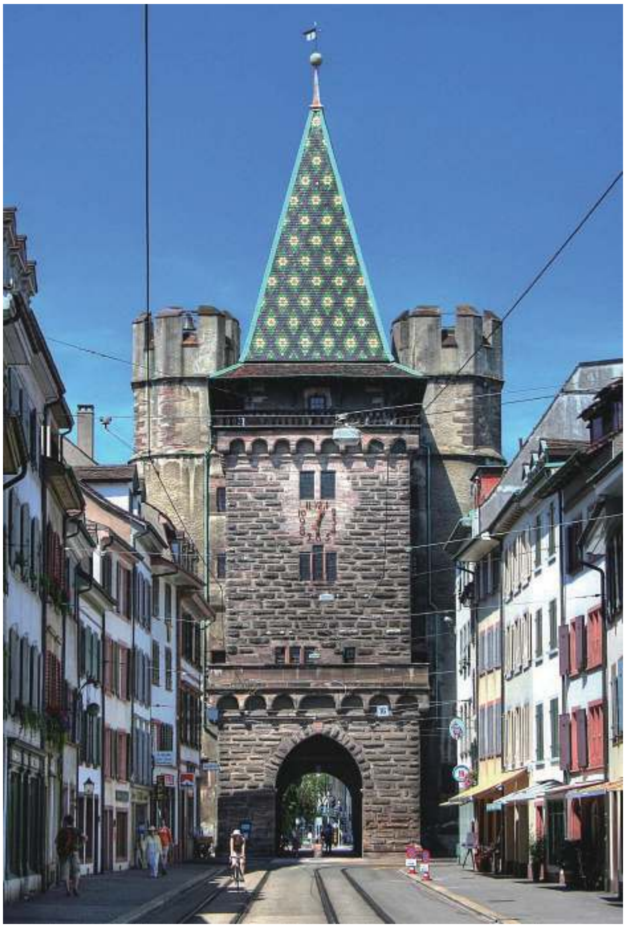
哥德巴赫比欧拉年长17岁，在那个时代几乎是一代人的差距，哥德巴赫欣赏欧拉的聪明和勤奋，欧拉钦佩哥德巴赫的见多识广，他们之间是一种忘年之交。

据记载，哥德巴赫还教过彼得二世的一个姑姑，应该就是伊丽莎白，因为彼得二世的姑姑安娜一直在她自己的属地，别的姑姑都远嫁到了国外。哥德巴赫的教学任务不重，所以他有时间思考数

学，并且与丹尼尔和欧拉通信讨论问题。哥德巴赫与欧拉的通信从 1729 年开始，一直持续到 1763 年，就是哥德巴赫去世的前一年。

由于彼得二世年纪小，又无得力的大臣辅佐，朝政比较混乱。这种情况持续了两年多，1730 年初，彼得二世得了天花，这在当时是不治之症，因而他很快就病逝了。彼得二世没有后代，这样罗曼诺夫家族的男性继承人就断绝了。

最高秘密委员会随即举行会议，经过种种考虑，最后选定彼得大帝的侄女安娜•伊凡诺夫娜（1693-1740）作为新沙皇。此时安娜正在库尔兰做公爵，她统治的库尔兰公国位于现在拉脱维亚的西部，面积很小，但其战略位置却相当重要。当年彼得大帝将安娜嫁给了库尔兰的威廉公爵，婚后不久威廉病逝。安娜继任公爵后，一直住在库尔兰，对于俄罗斯发生的重大事情，安娜很少知道。



瑞士的巴塞尔也是欧拉的出生地

安娜突然接到让她当沙皇的通知后，顿感喜从天降。最高秘密委员会还让特使带去一份协议书，里面对沙皇的权利作了种种限制，使得沙皇形同虚设，但安娜照签不误。然而，安娜到了莫斯科登上皇位后，立即联络一些贵族大臣，策动近卫军，逼迫最高秘密委员会放弃了已签订的协议，从此安娜女皇（1730-1740 在位）大权独揽。

哥德巴赫的教学任务不重，所以他有时间思考数学，并且与丹尼尔和欧拉通信讨论问题。哥德巴赫与欧拉的通信从 1729 年开始，一直持续到 1763 年，就是哥德巴赫去世的前一年。

随后，安娜对莫斯科的贵族们进行了大清洗，因为担心有人报复，1732 年，安娜又将朝廷迁回到圣彼得堡。安娜主要依靠她的情夫比龙来管理朝政，比龙是生长在库尔兰的德国人。

由于哥德巴赫的为人处世深得皇家的信任，在彼得二世病逝后，哥德巴赫被挽留在宫中，继续为安娜女皇做事。当朝廷迁到圣彼得堡之后，哥德巴赫非常怀念科学院宁静的生活，于是他又回到了圣彼得堡科学院，并被任命为通信秘书。这种秘书不是做抄抄写写的工作，而是有管理职权的。1737 年，哥德巴赫升任，负责科学院的管理工作。

在这期间，哥德巴赫的朋友圈里有些变化。丹尼尔由于不太适应圣彼得堡的严寒气候等原因，于 1733 年回到了温暖的家乡巴塞尔，欧拉接替了丹尼尔的位置。在巴塞尔，丹尼尔先是担任解剖学和植物学教授，之后成为生理学教授，后来又成为物理学教授，他的兴趣更集中在数学的应用方面。丹尼尔回到巴塞尔后，和欧拉进行了长达 40 多年的学术通信。在通信中，丹尼尔向欧拉提供重要的科学信息，而欧拉则用杰出的分析才能和推理能力，给予迅速的帮助。而哥德巴赫与丹尼尔之间则没有进行类似的学术通信，其原因是哥德巴赫把主要精力用在了管理工作和社会活动上，余下的时间思考一些比较纯粹的数学理论问题，和丹尼尔的兴趣相去较远。

大师风采

当时接替丹尼尔的欧拉只有 26 岁，却已初显大师风采，他在数学的理论和应用两方面都做出了很大贡献。在大学微积分教程中，我们常会看到欧拉变换、欧拉公式和欧拉方程等。欧拉引进的一些记号，如用 $f(x)$ 表示函数，Σ 表示求和，i 表示虚数 $\sqrt{-1}$ 等，现在一直沿用。欧拉证明了，极限

世界各国发行的纪念欧拉的邮票与钱币

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

存在，并将它记作 e ，这个数在分析及其应用中都是很重要的。以 e 为底的对数称为自然对数，在理论研究中经常用到。

欧拉还将 e 的复数次幂与三角函数联系起来，建立了欧拉公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

其中 $i=\sqrt{-1}$ ， x 是实数。这个公式是棣莫弗定理的一个发展，由它可得

$$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y)$$

以及

$$\begin{aligned}e^{i(x+y)}&=e^{ix}\cdot e^{iy}\\&=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\&=\cos x\cos y-\sin x\sin y\\&+i(\cos x\sin y+\sin x\cos y),\end{aligned}$$

比较两式的实数部分和虚数部分，得到

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\sin(x+y)=\cos x\sin y+\sin x\cos y,$$

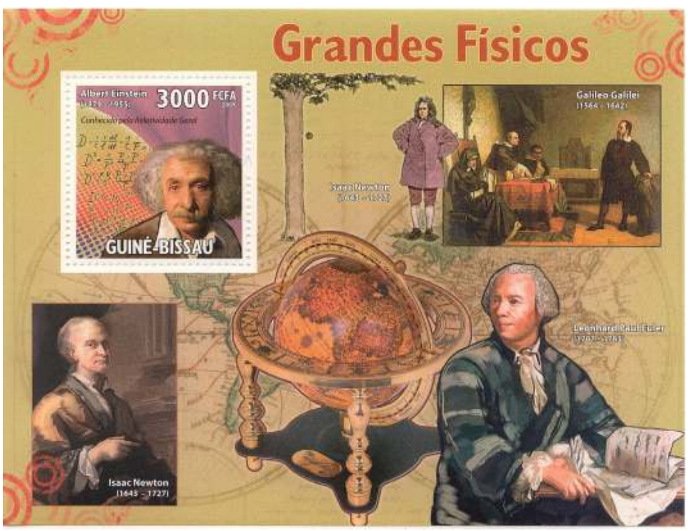
这就是三角学中的和差化积公式。

早在欧拉 19 岁的时候，他就以一篇研究船桅最佳布置问题的论文，参加巴黎科学院的有奖征文活动，获得了荣誉提名。从 1730 年代中期开始，欧拉以很大的精力来研究航海和船舶建造问题，这些问题对于俄国的海军建设是有现实意义的。后来，欧拉还根据这些积累的经验，写成两卷本的《航海学》出版，书中讲述了浮体平衡的一般理论以及如何将流体力学用于船舶建造。

由于航海学的需要，欧拉研究了太阳、月亮和地球在相互间的万有引力作用之下所产生的运动，特别是月亮的运动规律。欧拉提出了关于月亮运动的一种新理论，根据这种理论，天文学家制成了一张月亮运行表，它对于舰船导航很有价值。欧拉还写过许多关于彗星和行星运动的论著，在他临去世之前，仍在考虑天王星的轨道计算。此外，他常常为解决物理学、地理学、弹道学、保险业和人口统计学中的问题提供数学方法。总而言之，应用问题始终是欧拉研究数学理论的源泉和动力。

在接替了丹尼尔的位置之后，欧拉就打算在俄罗斯安家了，1733 年冬天，他和一位瑞士画师的女儿结了婚。欧拉很享受婚后安逸的生活，灵感泉水般涌现，下笔如有神助，就像法国物理学家弗朗索瓦 • 阿拉戈所说，“欧拉计算时毫不费力，就像人在呼吸，或鹰在翱翔一样轻松。”从婚后第二年起，欧拉的 13 位子女陆续降生，可惜只活下来 5 位，其余都在幼年时夭折。欧拉很喜欢孩子，他常常是抱着一个婴儿写作他的论文，而大一点的孩子们在他周围玩耍嬉戏，欧拉在工作的同时尽享天伦之乐。

欧拉很喜欢孩子，他常常是抱着一个婴儿写作他的论文，而大一点的孩子们在他周围玩耍嬉戏，欧拉在工作的同时尽享天伦之乐。



三大科学巨匠：欧拉、牛顿、爱因斯坦

虽然俄罗斯的政治风云时常变幻，但科学院里并没有科学家受到政治上的迫害。这主要是因为，俄国的统治阶层迫切需要科学家们来提高俄国的综合国力，而当时欧洲各国对于科学人才是处于一种开放和竞争的状态。欧拉得到的薪水和奖金，足够保障一大家子人过上富足的生活，另外还可以雇人来完成家务劳动，否则这么多家务做下来，别说像鹰一样翱翔，能赶上乌龟就很欣慰了。欧拉后来也说过：“我和所有其他有幸在俄罗斯帝国科学院工作过一段时间的人都不能不承认，我们应把所获得的一切和所掌握的一切归功于我们在那儿拥有的有利条件。”他说的条件既包括学术氛围，也包括生活条件。

1740 年 10 月，安娜女皇去世。她生前指定她外甥女的儿子伊凡继承皇位，称伊凡六世（1740-1741 在位），由比龙摄政。这时的伊凡六世只是两个月大的婴儿，他的父亲是不伦瑞克公爵，不伦瑞克是德意志的一个小邦国。伊凡六世上台后，不伦瑞克的贵族们纷纷涌向俄罗斯，争先恐后地占据了朝廷中的重要位置。本来一个比龙已经够让俄国人烦的了，现在又来了一帮不伦瑞克人，俄国人的心情可想而知。此时，俄罗斯的贵族们强烈希望一个人能出来收拾局面，这个人就是伊丽莎白。

伊丽莎白 • 彼得罗芙娜（1709-1762）是彼得大帝和叶卡捷琳娜一世的小女儿，血统非常高贵，只可惜叶卡捷琳娜生她时还只是彼得大帝的情妇，因此，伊丽莎白是个私生女，名分不正，这对她的前程产生了很大的影响。

伊丽莎白自幼就长得花容月貌，被彼得大帝夫妇视为掌上明珠，叶卡捷琳娜一世曾想把她嫁给法国国王路易十五，因为名分不正遭到法国人的婉拒。由于没有合适的对象，伊丽莎白一直待字闺中，经常随彼得二世出外骑马打猎，也曾受教于哥德巴赫。彼得二世去世后，伊丽莎白还是因为名分不正，没做成沙皇。但 1741 年的政治形势大不相同，此时俄罗斯贵族急于驱除德国势力，也就顾不上再考虑伊丽莎白的名分问题了。

欧拉所处的时代被称作是数学上的分析时代，他在其中做出了最杰出的贡献。约翰·伯努利在给欧拉的信中写道：“在我介绍高等分析的时候，它还是一个孩子，而你正在将它带大成人。”

1741 年年底的一天，伊丽莎白乘一架雪橇来到近卫军的营房前，她用富有感召力的声音召来了 300 多名士兵，跟她一起来到皇宫，轻松地将小沙皇请下皇位。就这样完成了皇位的更迭，整个过程一滴血没流，不愧是彼得大帝的女儿，玩政变如烹小鲜。

1740 年 5 月，28 岁的普鲁士新国王腓特烈二世（1740-1786 在位）登基。他一上台，就锐意进行法律、经济、教育和军事等方面的改革，致力于建立廉洁高效的政府机构，自称是“国家的第一仆人”，同时积极强化军队建设。在腓特烈二世的统治下，普鲁士的领土充分扩张，经济迅速发展，国力日益昌盛，为德意志的最终统一打下了坚实基础，因此后世称他为腓特烈大帝。

柏林科学院成立于 1700 年，到了 1740 年已经有一些衰落的趋势。为了重振柏林科学院，腓特烈大帝热情地邀请欧拉去柏林工作。1741 年 7 月，欧拉来到柏林，他一直在柏林呆了 25 年。欧拉并不是只会在书斋里写文章，他是一个有抱负、有管理才干的人，为了寻求更大的施展空间来到了柏林，而当时的俄国正处在乱糟糟的状态，让人对未来无法预料。

欧拉担任了柏林科学院的数学部主任，他还参与了其它许多行政事务，如提出人事安排，监督财务，管理天文台、图书馆和植物园，以及出版历书和地图等。欧拉鼎力协助科学院院长莫佩蒂，在恢复和发展柏林科学院的过程中发挥了重大作用。在莫佩蒂外出期间，由欧拉代理院长。1759 年莫佩蒂逝世后，欧拉虽然未被正式任命为院长，但他一直是科学院的实际领导者。

欧拉还担任过普鲁士政府关于安全保险、退休金和抚恤金问题的顾问，并为腓特烈大帝了解火炮方面的最新成果，设计改造运河，也曾主管过普鲁士皇家别墅水利系统的一些设计工作。

在柏林期间，欧拉的研究工作依然非常活跃。他提出了理想流体模型，建立了流体运动的基本方程，从而奠定了流体动力学的基础。他和克莱罗（A. Clairaut）、达朗贝尔（J. R. D’Alembert）一起推进了月球和行星运动理论的研究。他与丹尼尔·伯努利和达朗贝尔之间关于弦振动问题的研讨，推动了数学物理方法的发展。他还出版过《光和色彩的新理论》一书，解释了一些光学现象。

欧拉所处的时代被称作是数学上的分析时代，他在其中做出了最杰出的贡献。约翰·伯努利在给欧拉的信中写道：“在我介绍高等分析的时候，它还是一个孩子，而你正在将它带大成人。”欧拉的《无穷小分析引论》、《微分学原理》和《积分学原理》是分析学的伟大著作，同时代的人称他是“分析的化身”，后来的一些分析学教程都是他著作的翻版和再翻版。

由于受 18 世纪启蒙运动思想的影响，腓特烈大帝实行一种叫做“开明专制”的统治。“开明专制”的核心思想是，自上而下地改革或取消已经过时的封建制度，君主应当公平公正，提倡宗教宽容、鼓励科学文化、保护艺术，并且为全民族造福。1750-1754 年期间，腓特烈大帝邀请法国启蒙运动的旗手伏尔泰，到普鲁士来做宫廷教师，传播先进思想。

在腓特烈大帝的宫殿里，经常是灯火通明，高朋满座，大家兴致勃勃地讨论各种问题。作为有雄才大略的帝王，腓特烈的思维常常是天马行空，穿梭古今，他还称自己“论秉性就是个哲学家”，因而特别喜欢谈论一些哲学问题。

哲学一直是欧拉的弱项，对于那些天赋人权、自由平等、君

达朗贝尔 (1717-1783), 法国数学家

主立宪、信仰自由等等新鲜说法，一时间还找不到感觉。虽然欧拉没有当牧师，但他一生中从未放弃过对于基督教加尔文教派的信仰。正是由于这种信仰，使得欧拉在困难的时候，内心会比较平静，但另一方面，对于新的社会思想也会产生一些抵触。

欧拉与腓特烈的那个圈子渐渐有些话不投机，加上欧拉和腓特烈在科学院的管理上又产生了意见分歧，所以欧拉开始萌生去意。后来，欧拉听说腓特烈想把科学院院长的位置授予达朗贝尔，而在圣彼得堡那边，叶卡捷琳娜二世女皇一直在向欧拉招手，于是欧拉就下定了走的决心。

达朗贝尔是著名的法国数学家、物理学家和天文学家，虽然他的科学成就无法与欧拉相比，但他担任过法国第一部《百科全书》的科学副主编，这部全书对于宣传启蒙运动思想起到了很重要的作用，因而达朗贝尔更对腓特烈大帝的心思。1764 年，腓特烈大帝邀请达朗贝尔到柏林王宫住了 3 个月，想请他担任柏林科学院院长。达朗贝尔不想移居柏林，并且认为欧拉更适合院长之职。腓特烈出于他自己的一些考虑，始终没有任命欧拉为院长。

1766 年，欧拉一家回到圣彼得堡，叶卡捷琳娜二世以皇室的规格接待了他们。女皇不但为他们提供一栋配有高档家具的房子，而且还派了一位御厨专门负责他们的膳食。每到欧拉家的晚餐时间，枝形吊灯散发着温暖的光芒，橡木长条桌上摆上纯银的餐具，餐盘里盛着黄油煎大马哈鱼、烤小牛排、龙虾色拉、奶油烤杂拌等各种食物，鱼子酱抹大列巴（俄式大面包），红菜汤飘着香气，凡是女皇能够吃到的，欧拉家都能吃得到。

欧拉对于圣彼得堡科学院的工作是驾轻就熟的，因为他在柏林期间，俄国政府还一直付给他年薪，欧拉也将他的部分论文寄到俄国发表，并且给予圣彼得堡科学院很多帮助和指点。

回到俄国之后，由于白内障的缘故，欧拉的左眼不久就失明了。而欧拉的右眼早在 30 多岁时就已经失明，这主要是工作劳累过度所致。在生命的最后十几年里，欧拉凭着非凡的记忆力和心算能力，在助手们的帮助下，依然完成了许多高质量的数学研究。在欧拉的身后，留下了极其丰富的科学遗产，法国数学家拉普拉斯说过：“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师！”

在欧拉的身后，留下了极其丰富的科学遗产，法国数学家拉普拉斯说过“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师！”

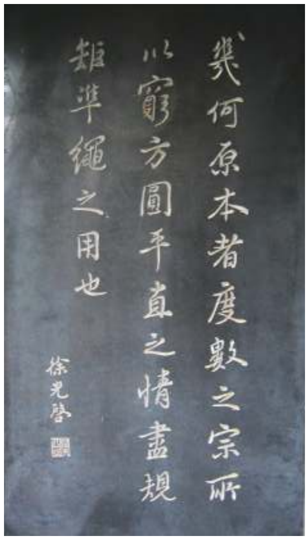
少女与玫瑰（布歇，法国）

香飘俄罗斯

让我们再回到 1741 年的俄国。伊丽莎白女皇（1741-1761 在位）上台之后，彻底驱除了宫廷中的德国势力，并且恢复了彼得大帝的所有改革措施，以及被安娜女皇解散的枢密院，用法律的形式确定了贵族特权，建立起一个能够吸收各阶层精英的文官制度。伊丽莎白女皇可以说是俄国开明专制的始创者，自她以后，俄国的各项国家制度才真正地成熟起来。

国事初定，伊丽莎白女皇心情愉悦，打算好好享受一下生活。在彼得大帝时代，作为公主的伊丽莎白就很喜欢西欧的生活方式，尤其钟爱法兰西的时尚。当上女皇之后，伊丽莎白仍然喜欢跳舞，每周至少要在宫中举行两次假面舞会，她还大量购买法国的新潮时装、香水和化妆品，从而带动了俄罗斯贵族崇尚奢华精致的风气。

当时的法国，正流行一种称为“洛可可”的艺术风格，它的特点是纤巧、精美、幽雅、华丽。洛可可风格始于 18 世纪初，经国王路易十五的情妇蓬帕杜夫人大力倡导，在法国广为流行。后来的法国王后玛丽•安托瓦内特，也非常热衷于洛可可服装，这在 2006 年上映的影片《绝代艳后》中



左图：意大利人利玛窦（左）和徐光启（右）合译了《几何原本》，这是中文版中的插图。
中图：摘自徐光启手书篆刻《几何原本》序。
右图：《几何原本》北京印刷书，藏于罗马中央国立图书馆。古希腊数学家欧几里得的这本巨著在西方是仅次于《圣经》流传最广的书籍。

有充分的展现。洛可可服装有夸张的裙撑、打褶的花边、繁复的缀饰等，十分注重整体线条和修腰的效果，印花布料上多为草绿、粉红、鹅黄等亮丽的颜色，让人感受到春夏季节的阳光明媚。

法国画家弗朗索瓦•布歇是洛可可绘画大师，他的作品多取材于神话和贵族生活，代表作有“沐浴后的月神戴安娜”、“维纳斯的凯旋”和“蓬帕杜夫人肖像”等，表现了优雅的性感和奢华的贵族生活，反映了那个时代人们的审美趣味。

1730年，法国第一家香精香料公司诞生于南方小城格拉斯。这里生长着各种花卉，有金黄色的黄绒花，紫色的熏衣草，白色的茉莉花和缤纷的玫瑰，为香水生产提供了优质原料，不断出现的香水新产品为人们的生活带来了浪漫和激情。法国的香水与时装、葡萄酒并称为三大精品产业，是法国人的骄傲。

虽说此时德国人不受欢迎，但哥德巴赫是个例外。他在俄国工作多年，已经深深扎根在这片土地，况且还做过伊丽莎白的老师，俄国人早把他看成是自己人了。

在伊丽莎白女皇的影响下，法兰西的时尚也在俄国流行，空气里似乎弥漫着优雅的芳香，到处都有和平与繁荣的气息。在圣彼得堡科学院过了多年平静生活的哥德巴赫，此时有点坐不住，又想要去政界了。人有时候很矛盾，热闹多了就想平静，而平静时间久了又想要热闹了。就性格而言，哥德巴赫是一个喜欢热闹的人。

1742年，凭借宽广的人脉和良好的工作业绩，哥德巴赫被调到俄国外交部工作，外交部设在莫斯科，哥德巴赫也就移居到了莫斯科。虽说此时德国人不受欢迎，但哥德巴赫是个例外。他在俄国工作多年，已经深深扎根在这片土地，况且还做过伊丽莎白的老师，俄国人早把他看成是自己人了，和那些来投机做官的德国人不是一类。

珍贵的通信

哥德巴赫与远在柏林的欧拉一直保持通信，讨论各种数学问题，其中关于数论问题的讨论影响最大。

数论是研究整数性质的数学分支，它的形成和发展经历了漫长的岁月。早先住在洞穴里的原始人就有自然数（或正整数）的概念，后来由于生活和生产的需要，在世界各地逐渐形成了一些独特的数字，例如，古巴比伦的楔形数字，古埃及的象形数字，中国的甲骨文数字，希腊的阿提卡数字等等。我们今天使用的阿拉伯数字实际上是由印度人发明的，12世纪时由阿拉伯人传入欧洲。而关于自然数的理论，至少可以追溯到古希腊时代，欧几里得在他的名著《几何原本》中就讲到了数论。

关于欧几里得（Euclid）生平的记录很少，只知道他在公元前300年左右，生活在埃及的亚历山大城，在那里教书授徒。他所著的《几何原本》一书，凝结了古希腊数学的许多精华，是数学历史上最著名的、流传最广的教科书。在这本书里，欧几里得从点、线、面的定义出发，用几条最基本的公理以及形式逻辑方法，建立起了欧几里得几何学这个严密的体系。

《几何原本》由13篇组成，基本上是讲几何学的，也有3篇（第7、8、9篇）是讲数论的，其中的一些数论结果今天仍然常用。比如“算术基本定理”，它是说，每个大于1的自然数n都可以分解为素数的乘积

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s,$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 是素数（即只能够被1和它自身整除的数，例如2，3，5，7，…），而且不管怎样分解，所得到的 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 都是一样的，顶多只有次序上的不同。

我们有了算术基本定理，就可以用素数这些基本材料，通过乘法搭建起正整数这座大厦，很多关于正整数的问题就可以转化成关于素数的问题。例如，要求两个数24和108的最大公因子，可先将他们分解成素数的乘积

$$24 = 2^3 \times 3, \qquad 108 = 2^2 \times 3^3,$$

在比较素数方幂的最大公因子之后，我们可以清楚地看到，24和108的最大公因子应该是 $2^2 \times 3 = 12$ 。

费尔马 (1601-1665) 猜想的雕塑

在《几何原本》中，欧几里得提出了一个快速计算最大公因子的方法，称为“欧几里得辗转相除法”。此外他还证明了，素数有无穷多个。首先，他假设只有n个不同的素数 $p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots, p_n$。因为正整数

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

不能被素数 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 中的任意一个整除，所以 a 必有一个不同于所有 p_i 的素数因子，也就是说，我们至少有了n+1个素数，这就与前面的假设发生了矛盾，因此，素数一定有无穷多个。欧几里得的这个证明，是反证法一个最经典的范例。

在数论的历史上，法国数学家费尔马（Pierre de Fermat，1601-1665）是一位里程碑式的人物。费尔马对于数论有直观的天才，他所提出的很多数论命题，极大地吸引了后来数学家们的研究兴趣。

费尔马一生基本上生活和工作在法国南部城市图卢兹，他从30岁起成为政府的文职官员，担任过晋见接待官和地方议会的议员，主要处理法律事务。费尔马是一个诚实、正直和谨慎的人，对于本职工作兢兢业业，使得各项政策能够顺利地贯彻实施。他的乐趣主要来自业余生活，他对于欧洲的主要语言和欧洲大陆的文学有很深的修养，还会熟练地用拉丁文、法文和西班牙文写诗，数学只是他的业余爱好之一，他研究数学多半是由于对数学美感的热爱。

设 x, y 分别是直角三角形两条直角边的长度，z 是斜边的长度，那么有

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

这是毕达哥拉斯（Pythagoras）定理，在中国称为勾股定理。有时碰巧 x, y, z 都是正整数，比如，

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

喜欢纯数学的人看后会感觉特别的爽，这就是所谓“数学的美感”。

另外，$(5, 12, 13)$ 也满足上面的方程，类似的数组还可以找到很多。费尔马给出了一般性的命题：如果z是形如4m+1（m是正整数）的素数的话，那么，z一定是某个边长均为正整数的直角三角形的斜边长度，而且这种直角三角形只有一个。当m=1时，z= 5，直角边x=3，y=4；而当m=3时，z=13，直角边x=5，y=12。这个命题也可以这样说：形如4m+1的素数的平方可以表示成两个正整数的平方之

和，如果不考虑两个平方数的次序的话，那么表示方式是唯一的。

欧拉在 1754-1755 年间的一篇论文里证明了：形如 4m+1 的素数可以唯一地表示成两个正整数的平方之和，这里不考虑两个平方数的次序。设 p 是形如 4m+1 的素数，由欧拉的定理知，

$$p = x^2 + y^2,$$

其中 x, y 都是正整数，而且 $x > y$。于是，就有

$$\begin{aligned} p^2 &= (x^2 + y^2)^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2, \end{aligned}$$

可见 p^2 可以表示成两个正整数的平方之和。由一个初等的讨论易知，表示方式是唯一的。因此，费尔马的命题成立。

很自然地，费尔马也考虑了高次方程

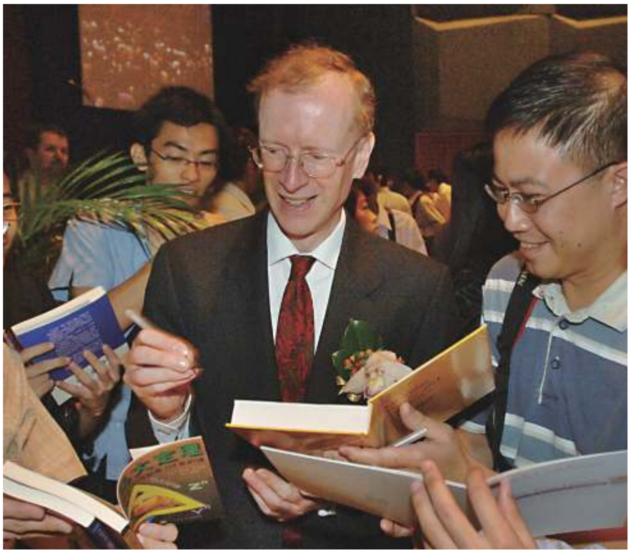
$$x^n + y^n = z^n,$$

这里 $n(\geq 3), x, y, z$ 均为正整数。他断言，这种高次方程是没有解的。他说可以证明，但没写下来，后世就称为“费尔马猜想”。费尔马自己只解决了 n=4 的情形，他给出的证明相当粗略。后来，欧拉解决了 n=3 的情形。很多优秀的数学家都对这一问题做出过重要贡献，在研究过程中，也产生出了不少新的数学概念和方法。直到 1994 年，才由英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles）彻底解决了费尔马猜想，这是 20 世纪数学最重大的成就。从猜想的提出到解决，整整跨越了 350 多年。

费尔马研究数学，只是为了享受得到新发现的乐趣，并不期望别人的承认。费尔马的很多工作散见于他给朋友们的信件，以及他阅读过的书籍的空白处，他生前也发表过几篇论文，但都是匿名的。费尔马去世之后，才由他的儿子克莱蒙特•塞缪尔等人，将他的研究成果整理成两卷本著作出版。后世的数学家和数学史家，积极搜集他的数学工作，挖掘其中的深刻内涵，并赞誉费尔马是“业余数学家之王”。

费尔马研究数学，只是为了享受得到新发现的乐趣，并不期望别人的承认。费尔马的很多工作散见于他给朋友们的信件，以及他阅读过的书籍的空白处。

哥德巴赫对于费尔马研究过的一些问题很感兴趣，例如，形如 $2^n + 1$（这里 n 为正整数）



英国数学家怀尔斯最终解决了有 350 年历史的费尔马猜想，这是他获得 2005 年邵逸夫奖时在香港的留影。

的素数问题。容易证明，如果 $2^n + 1$ 是素数，则 $n = 2^m$（这里 m 为非负整数）。令

$$F_m = 2^{2^m} + 1,$$

后人称 F_m 为费尔马数。最初的 5 个费尔马数

$$F_0 = 3,\quad F_1 = 5,\quad F_2 = 17,$$
$$F_3 = 257,\quad F_4 = 65537$$

都是素数，因此费尔马相信，所有的费尔马数都是素数。然而哥德巴赫没有那么深的功力来做这个问题，因此他就写信请欧拉试试。

欧拉回信说，F_5 就不是一个素数，这通过一个初等的证明就可以看出。令

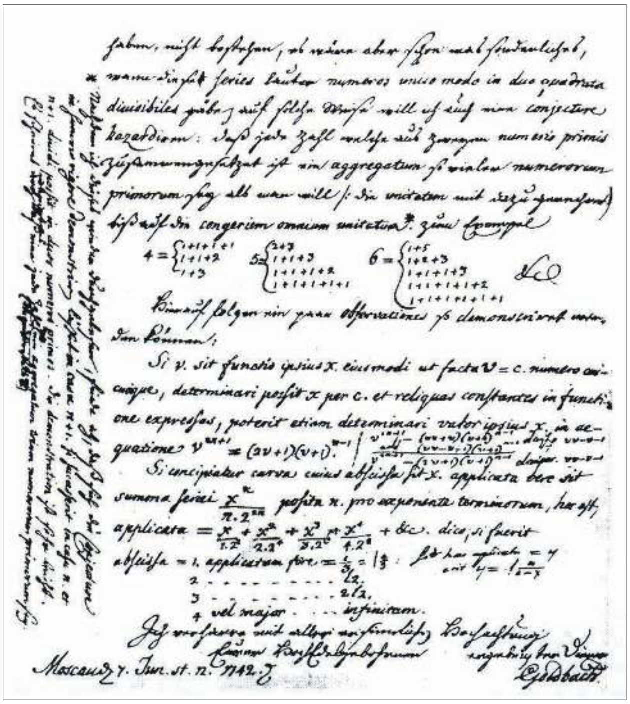
$$a = 2^7,\quad b = 5,$$

则有

$$a - b^3 = 3,\ 1 + ab - b^4 = 1 + 3b = 2^4。$$

所以，

$$\begin{aligned} F_5 &= 2^{2^5} + 1 = (2a)^4 + 1 \\ &= (1 + ab - b^4)a^4 + 1 \\ &= (1 + ab)a^4 + 1 - a^4b^4 \\ &= (1 + ab)(a^4 + (1 + a^2b^2)(1 - ab)) \\ &= 641 \times 6700417, \end{aligned}$$



哥德巴赫和欧拉于 1742 年的一封重要的通信

可见并非所有的费尔马数都是素数。

于是，我们可以进一步问，是否存在无穷多个费尔马素数，这与几何学的作图问题很有关系。1801 年，高斯（Carl Friedrich Gauss，1777-1855）证明了，对于一个正多边形，如果它的边数是一个费尔马素数，或者是几个不同费尔马素数的乘积的话，那么，这个正多边形就可以用圆规和没有刻度的直尺做出。时至今日，关于费尔马素数问题也少有进展，看来它的确是非常困难的。

下面两封信被归于数学史上最珍贵的通信之列，一封是 1742 年 6 月 7 日在莫斯科的哥德巴赫给在柏林的欧拉的信，另一封是 1742 年 6 月 30 日欧拉给哥德巴赫的回信。

哥德巴赫在信中说：“对于那些虽未切实论证但很可能是正确的命题，我不认为关注它们是一件没有意义的事情。即使以后万一证明它们是错误的，也会对于发现新的真理有帮助。正如你已经证明的那样，费尔马关于 F_m 给出一列素数的想法是不正确的，但如果能够证明 F_m 可以用唯一的方式表成两个平方数之和的话，那也是一个很了不起的结果。”

当 $m \geq 1$ 时，F_m 是形如 4n+1 的正整数。由上述费尔马的一个命题，如果 F_m 是素数的话，那么 F_m 自然就可以用唯一的方式表成两个平方数之和。哥德巴赫的意思是，在无法保证 F_m 是素数的情况下，看看能否证明弱一点的结果“F_m 可以用唯一的方式表成两个平方数之和”。

欧拉在回信中否定了哥德巴赫的想法，在经过一番推理之后，他指出

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 65536^2 + 1^2$$
$$= 62264^2 + 20449^2,$$

即 F_5 可以用至少两种方式表成两个平方数之和。

哥德巴赫在信中又说：“类似地，我也斗胆提出一个猜想：任何由两个素数所组成的数都是任意多个数之和，这些数的多少随我们的意愿而定，直到所有的数都是 1 为止。例如，

$$\begin{aligned} 4 &= 1+3 = 1+1+2 \\ &= 1+1+1+1, \\ 5 &= 2+3 = 1+1+3 \\ &= 1+1+1+2 \\ &= 1+1+1+1+1, \\ 6 &= 1+5 = 1+2+3 \\ &= 1+1+1+1+2 \\ &= 1+1+1+1+1+1, \end{aligned}$$

……。”哥德巴赫又在页边的空白处补充道：“重新读过上面的内容后，我发现，如果猜想对于 n 成立，而且 n+1 可以表成两个素数之和的话，那么，可以严格地证明猜想对于 n+1 也成立。证明是容易的。无论如何，看来每个大于二的数都是三个素数之和。”这里哥德巴赫把 1 看成了素数，下面欧拉也采用这种看法。

欧拉在回信中说：“关于‘每个可以分成两个素数之和的数又可分拆为任意多个素数之和’这一论断，可由你以前写信告诉我的一个观察（即‘每个偶数是两个素数之和’）来说明和证实。如果所考虑的数 n 是偶数的话，那么它是两个素数之和。又因为 n-2 也是两个素数之和，所以 n 是三个素数之和，同理它也是四个素数之和，如此等等。

下面两封信被归于数学史上最珍贵的通信之列，一封是 1742 年 6 月 7 日在莫斯科的哥德巴赫给在柏林的欧拉的信，另一封是 1742 年 6 月 30 日欧拉给哥德巴赫的回信。


座落在圣彼得堡的叶卡捷琳娜宫殿：雄伟的外景，富丽堂皇的内殿，和美丽的法式花园。

如果 n 是奇数的话，因为 n-1 是两个素数之和，所以 n 是三个素数之和，因此它可以分拆为任意多个素数之和。无论如何，我认为‘每个偶数是两个素数之和’是一条相当真实的定理，虽然我不能证明它。”

因为这是私人间的通信，所以其中的说法相当随意，在数学上是不严格的。但里面的要点，如“每个偶数是两个素数之和”以及“每个大于二的数都是三个素数之和”是很明确的，后人在数学上将它们严格化，并称之为“哥德巴赫猜想”。

优美的猜想

英国数学家华林（E. Waring，1736-1798），在 1770 年出版的《代数沉思录》一书中，首次提出了如下形式的哥德巴赫猜想：

1. 每个大于 2 的偶数都是两个素数之和；
2. 每个奇数或者是一个素数，或者是三个素数之和。

一个标准的现代版本是这样的：
I. 每个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和；
II. 每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和。

可以将它们写成下面的数学公式：
I. $N = p_1 + p_2$，当 $N(\geq 6)$ 是偶数；
II. $N = p_1 + p_2 + p_3$，当 $N(\geq 9)$ 是奇数，
其中 p_i 均为奇素数。

如果猜想 I 成立，那么对于奇数 N，我们可以将 N-3 表成两个奇素数之和，因此猜想 II 就成立。也就是说，猜想 II 是猜想 I 的推论。保留猜想 II 的一个原因是，可以使得猜想在形式上关于奇数和偶数都有表述。

哥德巴赫猜想的表达形式简洁明了，体现了数学的优美感觉。从乘法来看，素数是构成自然数的基本元素，在哥德巴赫猜想中，将素数放到加法的环境里，实际上是刻画了加法和乘法的某种关系，而这两种运算在数学中是最基本和最常见的。

我们再从加法的角度，来看自然数的构成。如果将 1 重复地相加，显然可以得到任何一个自然数，但这太没技术含量了。稍微复杂一点，人们会尝试将一些特殊的数（比如素数）相加，看能否得到任何一个自然数，这样就很有可能得到与哥德巴赫猜想类似的结论。据说早在哥德巴赫之前，法国哲学家和数学家笛卡儿（R. Descartes，1596-1650）在他的手稿里就有“每个偶数是至多三个素数之和”这样的叙述。


在哥德巴赫猜想产生的过程中，伟大的欧拉实实在在地当了一回配角。我们已经看到，对于费尔马数问题，欧拉表现出了精湛的数学功力，但对于哥德巴赫猜想，欧拉却没有提出任何有价值的意见。这并不意味着欧拉对此没有兴趣或没有深入思考，实际上他是深知这个问题的分量和难点所在的。

在欧拉那个时代，数学的主要工具是分析方法，主要研究对象是连续的实数直线。而正整数在实数直线上是一些离散的点，如何用处理连续对象的工具来研究离散情形，是一个非常重要的课题。1737 年，欧拉提出了著名的乘积公式：当 $x>1$时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^x}\right)^{-1},$$

其中乘积中的 p 跑遍所有的素数。欧拉乘积公式开了用分析方法研究数论的先河，对于数论的发展影响非常重大。

在欧拉乘积公式中，令 $x\to 1$ ，左边的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

是发散的，因此，右面的乘积

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

不会是一个有限的数。由此可知，所有素数的个数不可能是有限的。这样，对于欧几里得关于素数个数无限的定理，我们就有了一个分析的证明。

然而在对于素数的认识方面，当时的人们并没有比欧几里得走出多远。除了知道素数有无穷多个，再细致一点的信息就不清楚了。比如，关于不超过 x 的素数个数，即

$$\pi(x)=\sum_{p\le x}1$$

的一些基本性质，当时是很不清楚的。后来，高斯才对 $\pi(x)$ 的近似公式有了一个猜想性的结果，而证明则是 1896 年的事情了。

要弄清楚单个素数的变化，就已经如此之难，想要把两个或三个素数的变化通过加法合在一起考虑，其难度可想而知。虽然欧拉无法预料素数理论的发展，但他深知解决哥德巴赫猜想已经远远超出他的能力之外。外行人不了解其中的深浅，对于这样一个看似不太深奥的猜想，居然能使欧拉这样

优美的哥德巴赫猜想，让我们记住了香气飘逸的伊丽莎白女皇时代，而美轮美奂的叶卡捷琳娜宫，更使人对那个时代印象深刻。

的顶级数学大师一筹莫展，他们会感到很好奇。

优美的哥德巴赫猜想，让我们记住了香气飘逸的伊丽莎白女皇时代，而美轮美奂的叶卡捷琳娜宫，更使人对那个时代印象深刻。

早在1717年，彼得大帝在圣彼得堡郊外，为妻子叶卡捷琳娜修建消夏别墅，称为叶卡捷琳娜宫。1741年，伊丽莎白女皇登基后，授权俄国最优秀的建筑师，对叶卡捷琳娜宫进行了扩建和改造。改造后的宫殿长达306米，天蓝色和白色相间的外表耀眼迷人，造型丰富的镀金雕塑和凹凸有致的结构，使得整个建筑华贵而美观，宫殿上方五个圆葱头式的尖顶，在碧空下金光灿灿，很远处就能望见。宫殿内部，金碧辉煌的大厅一间挨一间，最具特色的算是琥珀厅，内部全部用光彩夺目的琥珀装修而成，被称为是世界的奇迹。花园里芳草萋萋，绿树成荫，到处弥漫着花草的清香。湖面上波光粼粼，荡漾着梦幻般的诗意。叶卡捷琳娜宫反映了俄罗斯帝国蓬勃向上的气象，多少年来，这里的湖光林色被一代又一代的俄罗斯诗人咏颂。

哥德巴赫踏上仕途之后，顺风满帆。1746年，哥德巴赫受赐封地，有了自己的庄园，虽不及皇家庄园富贵气派，却也宁静雅致，别有洞天。在俄罗斯广袤的土地上，各种庄园星罗棋布，形成赏心悦目的风景。人们会巧妙地利用庄园周围的自然资源，如河流、小溪、湖泊、山丘和森林，来营造一个景色宜人、情调浪漫的环境。庄园里都辟有花圃和草坪，湖畔河边有三两凉亭点缀其间，林荫小道，曲径通幽，漫步庄园之中，让人流连忘返。秋天的艳阳，冬天的静雪，春季的百合，夏季的紫丁香，使人品味无穷。著名的俄国小说家屠格涅夫，在《罗亭》、《贵族之家》等长篇小说中，对于俄罗斯贵族的生活有生动细致的描写。

清晨，哥德巴赫常常独自一人，信马由缰，徜徉在大自然的怀抱间。晚上，端上一杯格瓦斯（一种俄式饮料），凭窗远眺，夜色朦胧中的田园风光，更让人心旷神怡，如同丘特切夫“静静的夜晚”一诗中所写：

静静的夜晚，已不是盛夏，
天空的星斗火一般红，
田野在幽幽的星光下，
一面安睡，一面在成熟中……
啊，它的金色的麦浪，
在寂静的夜里一片沉默，
只有银色的月光
在那如梦般的波上闪烁……

粉色的月光

圣彼得堡科学院建立后，国外知名学者的引进确实带动了俄罗斯科学的发展。在伊丽莎白女皇时代，俄罗斯本土的科学家开始出现，罗蒙诺索夫是其中最杰出的一位。

罗蒙诺索夫（M. V. Lomonosov，1711-1765）出身于一个富裕的渔民家庭，从小就有强烈的求知欲。当时平民受教育的机会很少，所以他就冒充贵族子弟，考入莫斯科的斯拉夫—希腊—拉丁语学院，不久成为那里最优秀的学生。后来，罗蒙诺索夫被派到德国留学，1741年学成回国，到圣彼得堡科学院工作，1745年担任化学教授。

罗蒙诺索夫 (M. V. Lomonosov), 俄国科学家、人文学者，莫斯科大学的创建人。

十九世纪的圣彼得堡

是俄国诺贝尔奖获得者的摇篮。

俄国大诗人普希金把罗蒙诺索夫比作是“俄罗斯的第一所大学”，文学评论家别林斯基更是用诗样的语言，赞誉罗蒙诺索夫“仿佛北极光一样，在北冰洋岸发出光辉……光耀夺目，异常美丽”。

舒瓦洛夫不仅推动了莫斯科大学的创建，而且还积极倡议建立圣彼得堡美术学院。这所学院创办于1757年，培养出了列宾、苏里科夫、希施金、瓦斯涅佐夫等一大批杰出的美术大师，后世称舒瓦洛夫为著名的教育家。舒瓦洛夫年轻时是一位翩翩美少年，被伊丽莎白女皇在一次巡游中发现，女皇顿觉喜不自胜，将舒瓦洛夫收为零距离的宠臣，后来又将他升为公爵。舒瓦洛夫还和后来的叶卡捷琳娜二世女皇有过一段暧昧，他是个专门吃软饭的人，连这种人都惦着为国奉献，俄罗斯想不发达都难了。

罗蒙诺索夫通过试验，总结出了“物质不灭定律”，也就是“质量守恒定律”，这一发现比法国化学家拉瓦锡的发现要早得多。罗蒙诺索夫还创立了物理学中热的动力学说，指出热是物质本身内部的运动，从本质上解释了热的现象。他在谈到物质结构时指出，微粒是由一些元素集合而成，这已经具有了“原子—分子学说”的思想。由于当时俄国的科学还很落后，西欧对于俄国的科学成就并不重视，因此，罗蒙诺索夫的这些重要学术思想没有得到广泛的传播。

罗蒙诺索夫还是一位出色的人文学者，他著有《俄罗斯古代史》、《俄语语法》和《修辞学》等著作。他的“攻克霍亭颂”（歌颂俄国对土耳其战争的胜利）、“伊丽莎白女皇登基日颂”和“彼得大帝”等诗篇，被誉为俄国文学史上古典主义的佳作。

莫斯科大学的创建是罗蒙诺索夫的一大历史功绩。罗蒙诺索夫写信给伊凡•伊凡诺维奇•舒瓦洛夫公爵，他在信中表示要在俄罗斯建立高等教育体系，并阐述了关于莫斯科大学的构想和具体的实施方案。舒瓦洛夫利用他在宫廷中的影响力，积极推动莫斯科大学的创建。1755年1月，伊丽莎白女皇批准了罗蒙诺索夫的方案。同年5月，莫斯科大学举行了盛大的开学典礼，当时设有哲学、法律和医学三个系。1940年，莫斯科大学被冠名为“国立莫斯科罗蒙诺索夫大学”。如今莫斯科大学已经是俄国规模最大、学术水平最高的高等学府，它是世界上最著名的大学之一，也

虽然伊丽莎白女皇热衷于纸醉金迷的生活，但她有与生俱来的政治天分，处理国事举重若轻，善于化解矛盾于无形，因而，无论是和平年代还是战争时期，她都能牢牢掌控大局。

“七年战争”（1756-1763）是欧洲列强为争夺霸权而进行的一场超级大战，交战的一方为普鲁士、英国等，另一方为奥地利、法国和俄国等。普鲁士国王腓特烈二世亲率大军，驰骋疆场。在1757年的罗斯巴赫战役和洛伊滕战役中，腓特烈二世运用机动灵活的战术，以少胜多，取得了辉煌的胜利，在军事史上留下了赫赫威名。然而，伊丽莎白女皇并不示弱，她运筹帷幄，调兵遣将，屡次挫败普军。由伊丽莎白女皇、奥地利女王玛丽亚•特蕾西娅、法国国王路易十五的情妇蓬帕杜夫人订立的联盟，被腓特烈二世称作“三条裙子的联盟”，正是这个联盟使得他在政治、军事和外交上以寡敌众，在大局上逐渐转向被动。柏林一度丢失，腓特烈二世越来越招架不住，他感到很绝望，甚至携带毒药随时准备自杀。

在“七年战争”期间，作为外交官的哥德巴赫，周旋于各国

彼得三世(1728-1762)被妻子叶卡捷琳娜政变夺权

政府之间，显示了出色的外交才华，还没到战争结束，他就得到了提升。1760 年，哥德巴赫升任枢密院顾问，年薪 3000 卢布。枢密院是俄国最高咨询机构，其职责是审议重要的国务，回应沙皇的咨询，大凡担任枢密院顾问的人，都是身份特殊的重量级人物。据记载，当时沙皇赏给某位重臣的养老金是 5000 卢布，沙皇举办一次盛大的活动，花费约为 1 万多卢布，由此可见，年薪 3000 卢布是非常高的待遇。哥德巴赫担任枢密院顾问后，负责制定了俄国皇家儿童教育准则，这个准则管理俄国儿童达一个世纪之久。

1761 年 12 月，伊丽莎白女皇病逝。临终前，她指定她姐姐的儿子卡尔•彼得•乌尔里希（1728-1762）为皇位继承人，称彼得三世（1762 年在位）。彼得三世是彼得大帝的外孙，他的父亲是一位德国公爵。这位彼得从小在德国长大，在腓特烈二世的宫廷里受到过培养，对于普鲁士的军事制度和德国文化狂热崇拜，他不喜欢香喷喷的女皇、公主，就喜欢酷酷的腓特烈二世。腓特烈二世确实是个很有特点的人，他骑一匹个头不大但很善奔跑的阿拉伯马，戴一顶旧军帽，鼻烟盒不离身，打仗时常和士兵们一起风餐露宿。平时，腓特烈二世除了爱谈论哲学问题外，还喜欢吹长笛，并且写过 120 首长笛奏鸣曲，此外他还会用法文写诗。

彼得三世刚一上台，就与腓特烈二世结为同盟，他归还了俄国占领普鲁士的全部领土，并且命令俄国军队调转枪口，同昔日的盟友奥地利作战。1763 年 2 月，“七年战争”结束，普鲁士和英国成为这场战争的赢家，腓特烈二世能够成就大帝的伟业，彼得三世是帮了大忙的。然而，彼得三世的行为已经极大地损害了俄罗斯的国家利益，但他的自我感觉却十分良好，他也想干出一些流芳千古的事情来。于是，彼得三世采取了一些改善下层人民生活的措施，没收了教会的一些土地，强迫军队普鲁士化等。但是他的所作所为引起了俄国统治阶层的强烈不满，也加速了另一位历史人物的登场。

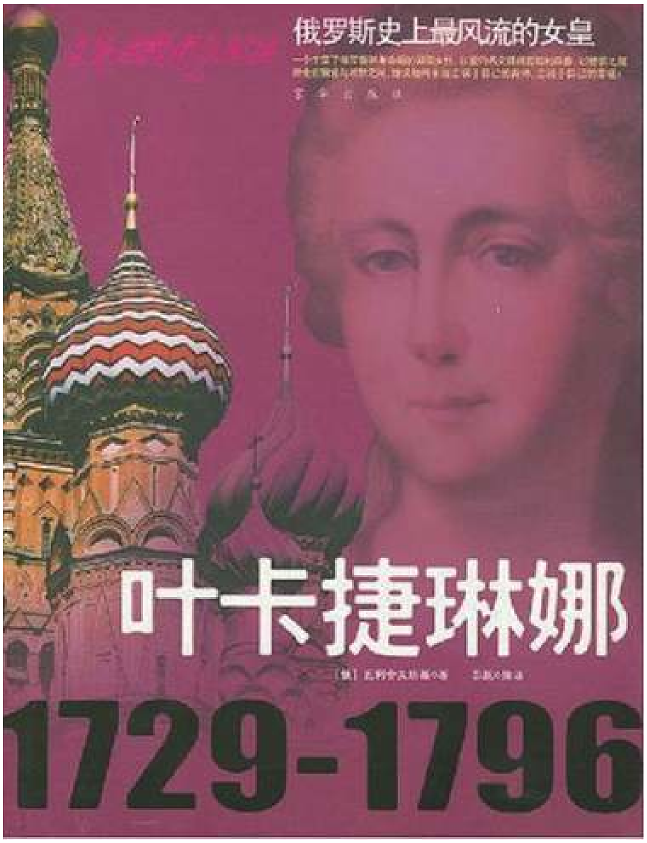
彼得三世的皇后叶卡捷琳娜•阿列克谢耶芙娜（1729-1796）是彼得的姑姑的女儿，她是一个纯粹的德国人，后来取了一个俄国名字。1745 年，叶卡捷琳娜与当时还是大公的彼得三世在圣彼得堡结婚。关于婚礼上的新娘叶卡捷琳娜，有这样的描写：她的身材修长而妙曼，淡粉色的皮肤衬托出一头浓密金发的光彩，鹅蛋形的脸庞线条分明，鼻梁高挑，两片红唇美艳而性感，碧蓝色的眼睛流露出万种风情，……。来参加婚礼的嘉宾，无不为之惊艳，令大家想不到的是，在这样美丽的容貌下面，还有一个睿智的大脑和一颗勃勃的雄心。

叶卡捷琳娜深知，她的未来将与俄罗斯紧密地联系在一起，于是，她努力学习俄语和俄国宫廷礼仪，虔诚地信仰东正教，详细研究俄国的历史、文化和风俗，并表现出发自内心的尊重。她的这些做法，赢得了俄国统治阶层的交口称赞，与彼得的做法形成了鲜明的对比。由于叶卡捷琳娜同彼得的志趣与秉性不合，导致了他们婚姻的不幸。

鲜艳的花朵容易招蜂惹蝶，而叶卡捷琳娜又不是一个甘于寂寞的角色，因此她很快就有了一些心仪的情人，多为近卫军中英俊健美的军官，其中与格里戈利•奥尔洛夫最为亲密，他在后来的政变中是出了大力的。此外，叶卡捷琳娜还广交政治盟友，积极发展自己的势力，她做足了功课，只等待一个好机会。

在“七年战争”期间，作为外交官的哥德巴赫，周旋于各国政府之间，显示了出色的外交才华，还没到战争结束，他就得到了提升。

彼得三世上台后所推行的一系列政策，遭到了俄国统治集团的强烈反对，这给了叶卡捷琳娜一个绝好的机会。1762 年 7 月的一天，趁着彼得三世去外地的时机，叶卡捷琳娜带领一



叶卡捷琳娜二世

支部队政变，其他部队纷纷倒戈，在一片“我们的小母亲叶卡捷琳娜”、“女皇万岁”的欢呼声中，她被推上沙皇的宝座，称叶卡捷琳娜二世（1762-1796 在位）。宫廷显贵、教会人士和各国公使，争先恐后地迎接新女皇。下台后的彼得三世，很快就神秘地死去了。

叶卡捷琳娜二世上台之后，一方面加强中央集权，维护和发展农奴制度；另一方面，她奉行开明专制，理顺各种关系，充分调动各方面的积极性，大力促进生产力的发展。在她当政的 34 年间，俄国手工工场大规模增加，生铁产量居世界首位，进出口贸易大幅度增长，并有巨额贸易顺差。俄国的经济实力和军事实力空前强大，帝国进入鼎盛时期。

大多数帝王都想治理好国家，即使是彼得三世，他也是想有所作为的，但能否治理好国家，要取决于政治智慧和能力。与伊丽莎白女皇不同，叶卡捷琳娜二世出身于德国的一个小公爵家庭，她的政治才能很难从血统和家传上找到原因。早年的叶卡捷琳娜，热衷于阅读法国启蒙运动思想家伏尔泰等人的著作，登基以后，她与伏尔泰有频繁的书信往来，并将启蒙运动的思想运用到政治实践中去。叶卡捷琳娜后来的一些情人中，也有像格里戈利•波将金元帅这样的政治家、军事家和外交家，无论卧榻之上，还是云雨之间，无时不在探讨治国安邦的大计。有道是热爱是最好的老师，无论对于科学还是政治，都是同样的道理。

在叶卡捷琳娜时代，俄罗斯的版图大大扩张。俄国通过两次对土耳其的战争，将曾经不可一世的奥斯曼帝国打得没了元气，实现了彼得大帝打通黑海出口的梦想。俄国还伙同普鲁士、奥地利三次瓜分波兰，并侵占了立陶宛、白俄罗斯和西乌克兰的大部分领土。在亚洲方面，俄国蚕食高加索，侵入哈萨克草原，并完全占领了西伯利亚北部，获得了丰富的森林和矿产资源。此外，俄国还占领了北美的阿拉斯加地区，并在加利福尼亚建立了一块殖民地。叶卡捷琳娜二世曾有这样的豪言：“假如我能够活到二百岁，全欧洲都将匍匐在我的脚下！”

叶卡捷琳娜二世对于俄国做出了巨大的贡献，得到了俄国人的一致称赞，后世尊称她为叶卡捷琳娜大帝。在俄国历史

哥德巴赫一直活到了辉煌的叶卡捷琳娜时代，可惜年事已高，无法有更大的作为。1764年11月20日，哥德巴赫逝世于莫斯科，享年74岁。

上，只有她和彼得一世有此殊荣。即使是反对沙皇专制的普希金，对于叶卡捷琳娜大帝还是满怀敬仰之情的。他在长诗“皇村记忆”中，称叶卡捷琳娜时代是“我们的黄金时代”，他说“想当时，在伟大女皇的权杖下，快乐的俄罗斯曾戴着荣誉的冠冕，像在寂静中盛开的花！”

哥德巴赫一直活到了辉煌的叶卡捷琳娜时代，可惜年事已高，无法有更大的作为。1764 年 11 月 20 日，哥德巴赫逝世于莫斯科，享年 74 岁，在那个时代算是高寿了。哥德巴赫安息在俄罗斯的青山绿水之间，与白桦林为伴，沐浴着女皇粉色的月光。

在叶卡捷琳娜一世之前，俄国没有女皇，而在叶卡捷琳娜二世之后，俄国再没出现过女皇，哥德巴赫恰好经历了俄国历史上全部四位女皇的朝代。也许哥德巴赫猜想折射了女皇们的光彩，所以才显得如此美艳动人，引得一代代数学家心驰神迷。

皇冠上的明珠

关于哥德巴赫的生平，文献中记载很少，即使是数学史专家，也未必十分了解。莫里斯 • 克莱因（Morris Kline）在他的名著《古今数学思想》第二册第 367 页上，称哥德巴赫是“普鲁士派往俄罗斯的一位公使”，这显然是不对的。哥德巴赫与欧拉的通信，有不少被保留下来，但信中的文字多是德文与拉丁文的混合体，读起来相当困难。其中关于哥德巴赫猜想的通信，早就被翻译整理出来，但后来的数学家谈到哥德巴赫猜想时，一般都采用标准的现代版本，很少引用原信。

然而，正如我们已经看到的那样，哥德巴赫在当时的社会中，是和各方面都有广泛联系的人物，关于他的研究会是一件有趣和有意义的事情。哥德巴赫的人生历程，对于后来者也有一定的借鉴意义。

我们已经讲了哥德巴赫和他那个时代的一些事情，关于哥德巴赫猜想后来的发展，我们再来做一点简单的介绍。

虽然数论的历史非常悠久，但它成为数学的一个独立分支却是比较晚的事情。高斯于 1801 年发表的著作《算术研究》，被认为是数论作为一门独立学科诞生的标志，这里的“算术”是指“高等算术”或“数论”。高斯对于数论特别钟爱，徐迟在报告文学“哥德巴赫猜想”中，有过“自然科学的皇后是数学，数学的皇冠是数论。哥德巴赫猜想，则是皇冠上的明珠。”这样的描述，其中采用了高斯的一些说法。

关于不超过 x 的素数个数$\pi(x)$，高斯做过这样的猜测：当$x\to\infty$时，有

$$\frac{\pi(x)}{\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)}\to 1,$$

这里 $\ln x$ 为自然对数。如果这个猜测成立，则它就叫做素数定理。

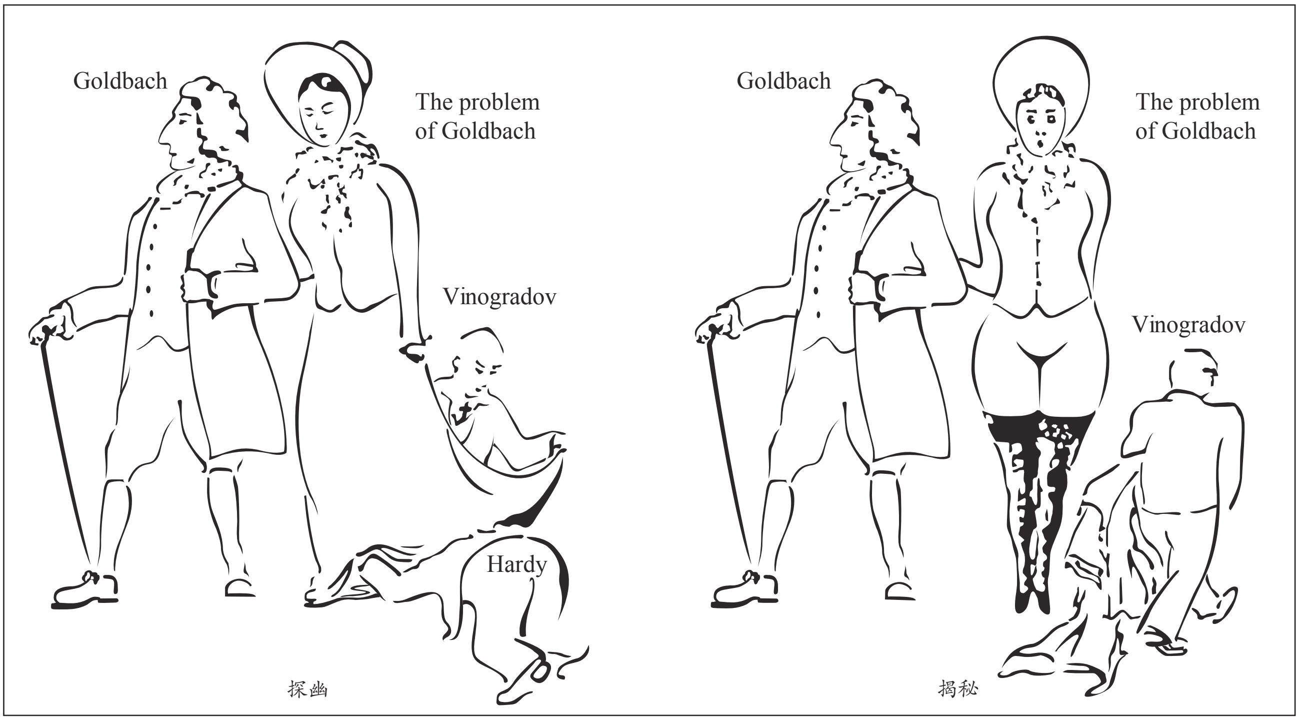
1850 年，圣彼得堡科学院的切比雪夫（P. L. Chebyshev）证明了，

$$c_1\le\frac{\pi(x)}{\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)}\le c_2,$$

其中 c_1, c_2 是正的常数。这是在欧几里得证明了素数个数无限之后，人们关于 $\pi(x)$ 第一个重要的理论结果。切比雪夫在证明中用到的工具是微积分。

革命性的变化发生在 1859 年。当时，德国数学家黎曼（G. F. B. Riemann）发表了题为“论不超过一个给定值的素数个数”的论文，其中他用复变函数的理论来研究 $\pi(x)$ 。黎曼的出

历史名城莫斯科；1764 年哥德巴赫在此去世。



这是 I. M. Vinogradov 早年创作的两张漫画，讲述自己对 Goldbach 问题研究过程的体会。漫画在所有当事人 (Hardy, Littlewood, I. M. Vinogradov) 都去世之后，才由 I. M. Vinogradov 的学生 A. A. Karatsuba 在纪念 I. M. Vinogradov 的文集里发表。文集刊于俄文期刊 Proc. Steklov Inst. Math., 有英译。
该漫画原作，现存 I. M. Vinogradov 的另一个学生 V. N. Chubarikov 处。V. N. Chubarikov 曾把该漫画复制赠送刘建亚，复制件现存山东大学数学学院图书馆。

发点，仍是欧拉乘积公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

此时的 s 可以是任意实部大于 1 的复数。黎曼将等式左边的级数看成是变量 s 的函数，称为 zeta 函数。他将 zeta 函数解析开拓到整个复数平面（s=1 是唯一的极点），在 $\pi(x)$ 和 zeta 函数的零点之间建立起了一个关系式。黎曼的研究表明，素数定理与 zeta 函数的零点分布有着密切的关系。想想关于正整数的问题，要用虚数来研究，这是多么令人惊奇的事情。在数学中，有时将局部性的问题提升到更广阔的空间里考虑，常常会收到意想不到的效果，正所谓“欲穷千里目，更上一层楼”。

虽然黎曼没有给出关于 $\pi(x)$ 的具体结果，但他为素数定理的研究指明了方向。正是沿着这个方向，1896 年，法国数学家阿达马（J. S. Hadamard）和比利时数学家普桑（Charles Jean de la Vallée Poussin）独立地证明了素数定理。至此，人们对于单个素数的变化，已经有了比较深刻的认识。

1900 年，第二届国际数学家大会在巴黎举行，大数学家希尔伯特（David Hilbert）作了题为“数学问题”的讲演。在这篇著名讲演中，他为新世纪的数学家提出了 23 个问题，这些问题对于后来的数学发展产生了深刻的影响。希尔伯特以有机统一的观点，来看待数学的整体发展，他将哥德巴赫猜想作为第 8 问题（即“素数问题”）的一部分，从此哥德巴赫猜想不再是孤立的数学难题，而成了近代数学重要的一环。后来的发展证明，希尔伯特的眼光是非常正确的。

从 1920 年开始，英国数学家哈代（G. H. Hardy）和李特尔伍德（J. E. Littlewood）发表系列文章（共 7 篇），开创与发展了一种崭新的数论方法，这种方法称为圆法。对于奇数 N，我们用圆法可将方程

$$N=p_1+p_2+p_3,\quad p_i\geq 3$$

的解的个数表示成积分

$$\int_0^1\left(\sum_{3\leq p\leq N}e^{2\pi i\alpha p}\right)^3 e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha 。$$

如果能够证明这个积分大于零，那么我们就证明了关于奇数的哥德巴赫猜想。在这个积分里，和式

$$\sum_{3\le p\le N} e^{2\pi i\alpha p}$$

称为素变量的线性指数和，关于它的研究是一件困难的事情。

哈代和李特尔伍德在一个很强的假设下证明了：对于每个充分大的奇数N，上述积分大于零，因而哥德巴赫猜想成立。因为其中的假设至今仍无法证明，所以他们得到的只是一个条件性结果。虽然如此，他们为奇数哥德巴赫猜想的研究开辟了一条正确的道路，而圆法也成了数论中最基本的方法之一。

1937 年，苏联数学家维诺格拉朵夫（I. M. Vinogradov）提出了一套处理素变量线性指数和的独创性方法，从而无条件地证明了：对于每个充分大的奇数，哥德巴赫猜想成立。维诺格拉朵夫的结果称为三素数定理，它是数学上最重要的成就之一。

由三素数定理可知，对于大于某个界限的所有奇数，哥德巴赫猜想成立，而在这个界限之内只有有限个奇数，我们逐个来验证就可以了。然而这个界限大得惊人，以目前计算机的能力还无法完成验证工作，但在数学家们看来，奇数哥德巴赫猜想算是基本上解决了。

由于技术上的原因，圆法不适用于偶数哥德巴赫猜想，人们只能另觅途径。1920 年，挪威数学家布朗（V. Brun）对筛法作了重大改进，用它来研究偶数哥德巴赫猜想。筛法是一种用来寻找素数的十分古老的方法，它是由公元前 200 多年古希腊学者埃拉托塞尼斯（Eratosthenes）所创，我们今天在制作素数表时还会用到这种方法。

由于筛法的一些局限性，用它很难一步达到偶数哥德巴赫猜想，因此只能采取逐步逼近的方式。布朗用改进后的新筛法证明了，每个充分大的偶数都可以表为两个正整数之和，其中每个正整数的素因子个数均不超过 9，这个结果称为命题（9+9）。类似地，命题（a+b）是指，每个充分大的偶数都可以表为两个正整数之和，其中一个的素因子个数不超过 a，而另一个的素因子个数不超过 b。通过不断地减小 a 和 b，

对素数理论和哥德巴赫猜想作出重要贡献的数学家，上图依次为高斯，黎曼，阿达马，普桑，下图依次为哈代，李特尔伍德，维诺格拉朵夫，布朗。

对哥德巴赫猜想作出最重要贡献的中国数学家：陈景润(中)，王元(左)，潘承洞(右)。

最终达到（1+1），就基本上解决偶数哥德巴赫猜想了。布朗之后的不少学者，正是沿着这样的路子，不断发展筛法技术，逐步减小命题中的素因子个数。而筛法的进步，也为深入研究其它重要数论问题提供了有力的工具。

1956 年，中国数学家王元证明了命题（3+4），由此开启了我国在偶数哥德巴赫猜想命题（a+b）研究上的先河。之后，王元和另一位中国数学家潘承洞又得到了若干重要的结果，使得我国在哥德巴赫猜想方面的研究达到了国际先进水平。

1965 年，苏联数学家维诺格拉朵夫（A. I. Vinogradov，不是前面提到过的 I. M. Vinogradov）和意大利数学家邦别里（E. Bombieri）各自独立地证明了命题（1+3）。1974 年，邦别里被授予菲尔兹（Fields）奖，表彰他在数论方面 [包括证明命题（1+3）] 以及在极小曲面和有限群论方面的工作。

1966 年，陈景润宣布证明了命题（1+2）。1973 年，他发表了命题（1+2）的全部证明。陈景润的工作得到了国际数学界广泛的赞誉，被公认为是筛法理论最出色的应用，是关于偶数哥德巴赫猜想研究最杰出的成果。陈景润的事迹由徐迟写成报告文学后，广泛传播，家喻户晓，这是大家所熟知的了。

陈景润先生 1996 年 3 月在北京逝世，潘承洞先生 1997 年 12 月在山东济南逝世。

王元先生刚刚度过 80 寿辰，仍然参加一些学术活动，并常作讲演。他擅长书法，为《数学文化》创刊号题写了贺词。

关于哥德巴赫猜想的通俗介绍和中国数学家数论工作的简明回顾，大家可以看文章 [4] 和 [5]。

参考文献

[1] E. T. Bell, 数学精英, 商务印书馆, 1994.
[2] 蔡天新, 难以企及的人物, 广西师范大学出版社, 2009.
[3] 陈一心, 哥德巴赫, 世界著名科学家传记 (数学家, V), 40-44, 科学出版社, 1994.
[4] 贾朝华, 哥德巴赫猜想, 10000 个科学难题 (数学卷), 101-103, 科学出版社, 2009.
[5] 宗传明, Analytic number theory in China, The Mathematical Intelligencer, 32(2010), no.1, 18-25.

作者介绍：

贾朝华，北京大学数学博士，中国科学院数学研究所研究员。研究领域为解析数论，主要研究素数理论中的一些课题。

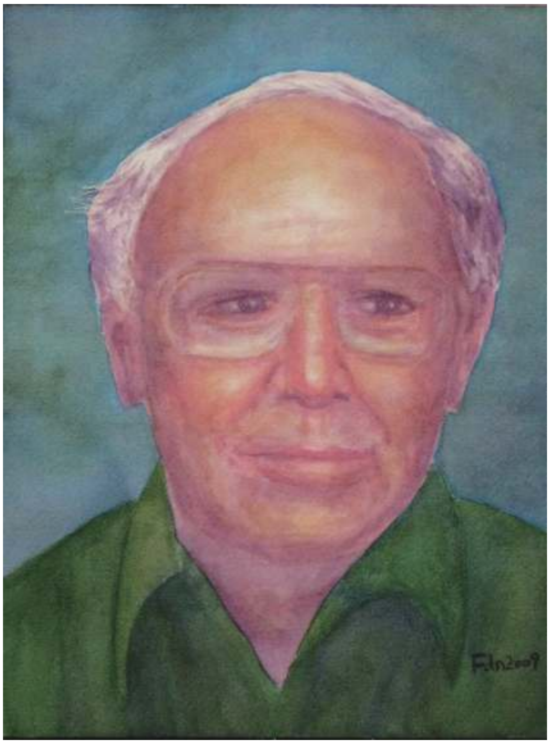
游戏人生

纪念趣味数学大师马丁•嘉德纳（1914－2010）

万精油

马丁•嘉德纳是公认的趣味数学大师。他为《科学的美国人》杂志写趣味数学专栏，一写就是二十多年，同时还写了几十本这方面的书。这些书和专栏影响了好几代人。在美国受过高等教育的人（尤其是搞自然科学的），或许没听说过费尔兹奖得主丘成桐的名字，也不一定知道证明费尔马大定理的 Andrew Wiles，但很多都知道 Martin Gardner。许多大数学家，科学家都说过他们是读着嘉德纳的专栏走向自己现有专业的。他的仰慕者（就是通常所说的ＦＡＮ）众多，从哈佛大教授到公司小职员，覆盖面很大。他的许多书被译成各种文字，影响力遍及全世界。有人甚至说他是上世纪后半叶在全世界范围内数学界最有影响力的人。著名数学家 John Conway 和他的合作者把他们的名著《取胜之道》献给嘉德纳。献词说：“献给马丁•嘉德纳，在数学上受益于他的人以百万计，远远超出其他任何人”。对我们这一代中国人来说，他那本被译成《啊哈，灵机一动！》的书很有影响力，相信不少人都读过。

让人吃惊的是，在数学界如此有影响力的嘉德纳竟然不是数学家，他甚至没有修过任何一门大学数学课。他只有本科学历，而且是哲学专业。嘉德纳从小喜欢趣味数学，喜欢魔术。读大学时本来是想到加州理工去学物理，但听说要先上两年预科，于是决定先到芝加哥大学读两年再说。没想到一去就迷上了哲学，一口气读了四年，拿了个哲学学士。用他自己的话说，搞哲学的人除了教书没有别的出路。为了谋生，他开始当自由作家，写小说，写杂文卖给杂志。二次世界大战时他当了四年海军，在甲板上构思他的小说。回来后先到芝加哥又读了两年书，然后到纽约继续当作家。主要是为一个儿童杂志 (Humpty Dumpty) 写专栏，甚至还为妇女杂志写文章。当然，他仍然没有丢掉他的业余爱好，魔术。有一次他在纽约的一个魔术爱好者聚会上听到一个折纸游戏，里面有很多数学内容。这个游戏是普林斯顿四个学生发明的（其中包括大名鼎鼎的物理学家费曼，统计学家 Tukey，计算机早期领军人物 Tuckerman）。他完全被这个游戏吸引注了。聚会完了以后他专程开车到普林斯顿找发明人中的两个人继续探讨这个问题。回来后以此为题目写了一篇文章投给《科学的美国人》杂志。文章写得很好，不但立即被接受，他还收到主编的电话问他还有没有更多的类似题目为杂志搞个趣味数学专栏。他立即回答说“有”。实际上他在这里演了一场空城计。放下电话他立即跑遍纽约各大书店买下

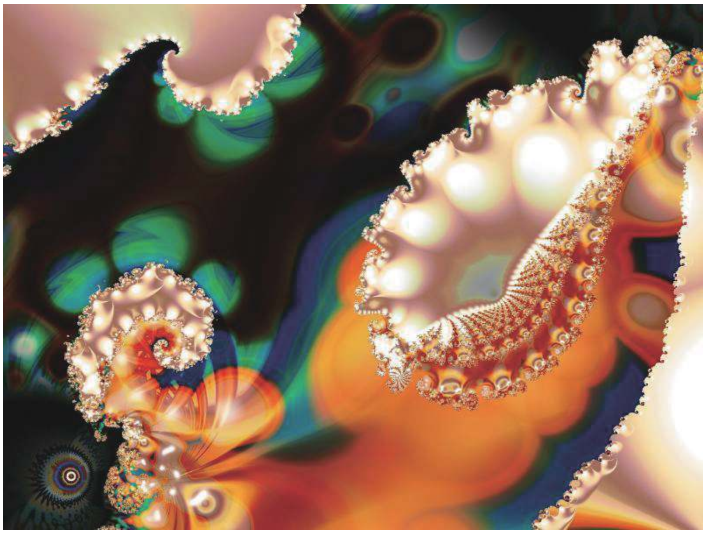


马丁•嘉德纳的画像

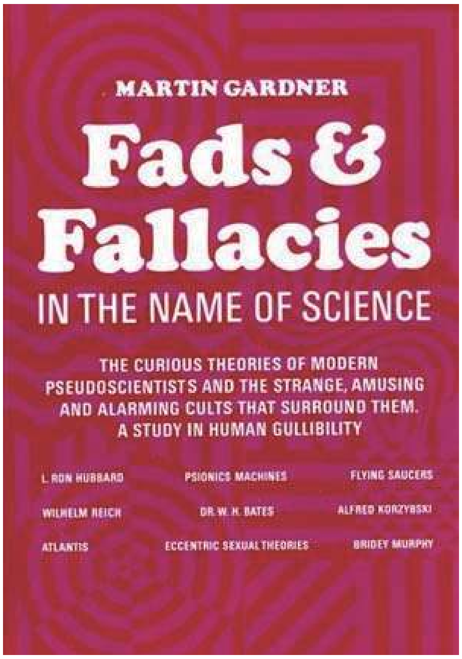
趣味数学大师马丁•嘉德纳于今年五月逝世

所有与趣味数学有关的书，从此开始了他长达四分之一个世纪的趣味数学专栏。

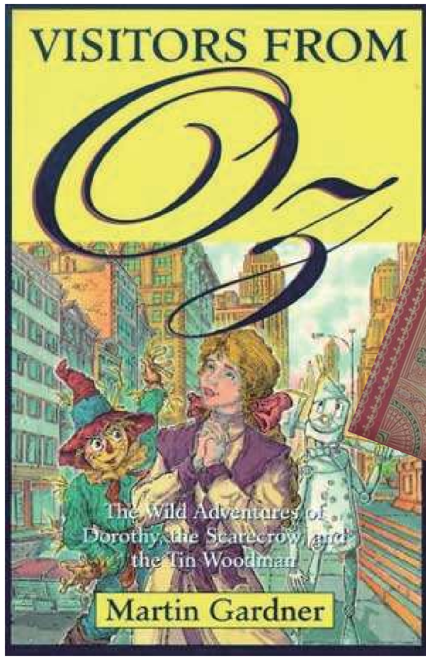
开始几期都是他自己在各种书上找题目。他不是数学家反倒成了优点，因为他首先要自己搞懂，然后再用非数学家的语言写出来。他本来就是一个很好的作家，他的思路和语言一下就得到大家的认同。许多读者用书信方式与他讨论他的专栏题目与内容。每期都要收到几百甚至上千封读者来信，在没有电子邮件的年代这可是一个不小的数。还有人给他寄题目，这下就解决了题材问题。他在专栏里对给他正确解答的人都给出姓名，工作单位。这就使更多的人愿意同他交流。这些人中有中学生，大学生，还有知名学者。比如：John Conway, Roger Penrose,Carl Sagan 等等。与这些知名学者的交流又进一步增加了他的视野，他的专栏题材也由浅到深，从初等数学进步到高等代数，到拓朴，有些甚至接近到数学研究的前沿。比如 R S A 公开密码理论就是这理论的发明者 Ron Rivest 通过嘉德纳首次公布于众的。事实上他与这些知名学者的交流是互益的。他学到了知识，知名学者也通过他把理论传给了大众。比如，John Conway 的生命游戏《Game of Life》，通过他的专栏走向了全世界。据说他那期专栏出来以后的一段时间，全世界有一半的计算机都在运行这生命程序（那时的计算机原本都是用来干正事的），Conway 也因此打响了名气。与此类似的例子还很多，好些东西在嘉德纳介绍以前没有太多人知道，一经他的专栏介绍便流行起来。比如 MC Escher 的画、魔方，



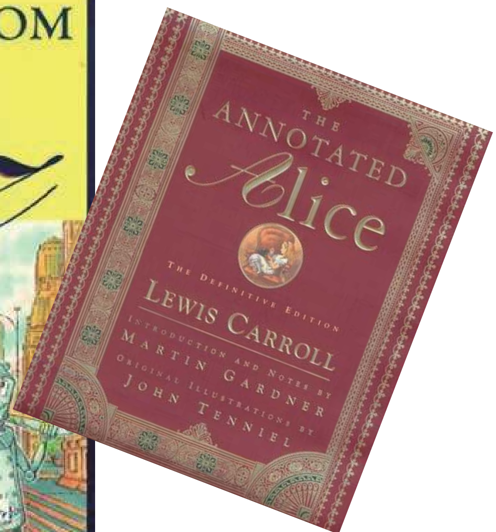
数学可以帮助人们绘出漂亮的图形



以科学的名义：半个世纪之前加德纳的评论仍然值得回味



纽约仙踪：多萝西在大都市的新冒险



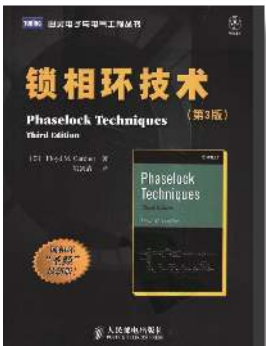
漫游奇境：一个不为人所知的嘉德纳

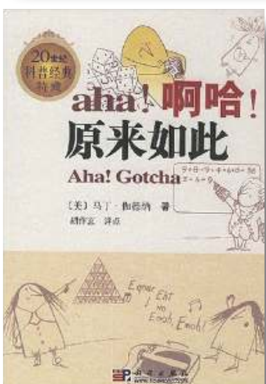
Hex 游戏等等。

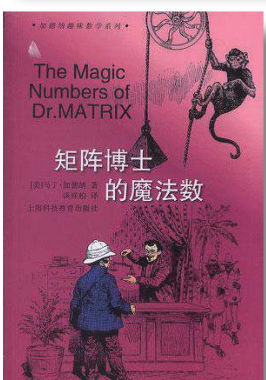
当然，他也不是只谈严肃的数学，也经常有一些趣味轻松的题目。甚至还与读者开玩笑。有一年的四月，他在专栏里提到一些新发现，比如爱因斯坦的相对论被否定，国际象棋被解决（先走第四个兵就能保证赢），四色定理有了反例，达芬奇发明了抽水马桶等等等等。这本来是他给读者开的一个愚人节玩笑。但是由于他写得很严肃，再加上读者对他的完全信任，许多读者把他的这些话当真。几千封读者来信塞满了他的信箱，其中有很多来自大学物理教授，数学家。这些人认真地向他解释他文章中关于相对论的悖论应该如何解释，相对论不可能被否定。其它的问题当然都有认真的读者来质疑。他虽然觉得这个玩笑开得不错，但考虑到读者们太容易把它当真，以后再也没有开过愚人节玩笑。

他多才多艺，写作并不只限于数学，也写小说，评论。在他写的七十多本书里，最畅销的是一本关于《阿丽丝奇游记》的点评。《阿丽丝奇游记》的作者 Lewis Carroll 是一个数学家（可以说是数学家中最著名的小说家）。Carroll 喜欢在他的小说里穿插数学游戏，也喜欢玩文字游戏。嘉德纳的点评把这些隐藏的数学与文字游戏向读者显示出来，类似于金圣叹点评水浒。点评出来后好评如潮，几十年来印了很多版，而且还被翻译成许多文字，总印数在百万以上。

他几乎一直不停地在写，一直到去世前以九十多岁的高龄都还有新书出版。有人称赞他书写得很多，他说一点不多，比起我的朋友阿西莫夫来说差太远了，他写了三百多本书。嘉德纳与阿西莫夫等二十个人有一个科普作家俱乐部，每个月聚会一次。有意思的是这个俱乐部似乎要有人退出才能有新人加入，很有秘密组织的味道。著名计算机专家 Knuth 说，嘉德纳之所以能写那么多书，是因为他没有计算机来分散他的注意力。实际上他曾经有过一台计算机。他在计算机上下国际象棋到了疯狂的地步，以至于他看什么都是棋盘。直到有一天他看见洗手池也变成了象棋盘，毅然决定戒棋，一同连计算机也一起戒了。他说计算机给人类带来很多好处，但也让一些人变得很懒，连最基本的四则运算都不会算了。他举例说有一次他的专栏出了一个简单的题目。让大家找一个包括从 1 到 9 所有数字的 9 位数，满足条件：前两位数整除 2，前三位数整除 3，……，一直到前九位数整除 9。他在专栏里说满足这些条件的数是唯一的。有几百个读者不同意他关于唯一性的结论，说可以找到两个解。有意思的是所有人给出的另一个解都是同一个数，这个数的前八位数不能被 8 整除。他后来发现这些人犯同一个错误的原因是他们都用小计算器，而小计算器在数字太多时不显示余数。他说他们只需要用手除一下就好了，但是这几百人宁肯买邮票寄信，也不愿用手验证一下。







前面说到嘉德纳被认为是全世界在大众数学中最有影响力的人物。全世界几十亿人，能有这么一个“最”已经是很了不起的事了。更了不起的是另外还有一个领域他也被认为是全世界最有影响力的领军人物。这个领域就是反特异功能，反伪科学。由他倡导成立了一个世界范围内的伪科学与特异功能调查委员会(Committee for the scientific investigation of claims of paranormal)。这个委员会还有专门的杂志，从《科学的美国人》退休后，他又开始为这个杂志写专栏。委员会由许多大科学家组成，还包括一些魔术大师。他说许多特异功能其实就是一些魔术，由于掩盖得巧妙不容易被人识破。最著名的例子是英国大物理学家泰勒，写了几十页的文章来证实他所见到的一个有特异功能的人。后来被嘉德纳他们证明他是上了大当。这让我们想起中国一个姓钱的大物理学家力挺耳朵识字功能的故事。嘉德纳把他反伪科学与特异功能的许多例子写进了一本书，书名是《以科学的名义：时尚与谬误》(In the name of Science: Fads and Fallacies)。这本书很畅销，被认为是怀疑主义的经典著作。

嘉德纳的仰慕者众多，甚至有一颗小星体以他命名。这些仰慕者每年搞一次聚会。在聚会上展开一些嘉德纳所感兴趣的活动与讲座。到如今这个聚会已经办了很多届，而且有很多大科学家参加。任何有兴趣的人都可以参加这个聚会，没有时间和精力的人至少可以到它的网页去看一看。www.g4g4.org (Gathering for Gardner)。

他的写作和生活都由他的兴趣所引导，没有固定方向。想到什么就搞什么，搞出任何东西就写出来。他好奇心强，对什么都有兴趣，写的书也包罗万象。比如，他的一篇名著题目是《亚当，夏娃有没有肚脐眼》。里面有他对从ＵＦＯ到弗洛伊德等各种事情的评论。有人说嘉德纳除了不能用锯片弹音乐，别的什么都能做。他自己在一次记者访问时说：“我一辈子都在玩，幸运的是有人出钱让我玩。”

对嘉德纳来说，生命就是游戏。

马丁•园丁
数坛耕心
育人无数
千古垂青

２０１０年８月

注：Martin Gardner 或许译成高德纳更合适。可是高德纳这个名字已经被另一个名人给占了。Donalkd Knuth 在他的主页上用的中文名就是高德纳。

陶哲轩：长大的神童

木遥

2008年11月20日出版的美国《探索》杂志上，20位40岁以下的科学家被冠以了“Best Brains（最具智慧的头脑）”的称号。他们的专业遍布各种科学分支，但排名第一的是一位数学家，而且是最没有悬念和意外的一位：今年33岁的陶哲轩。

这个名字近来在国内也渐渐开始为大众所知，部分的原因估计是他的华裔身份——虽然他自认为是澳大利亚人并且一个汉字也不会写。他的光辉事迹在网络上流传得到处都是，仅列出最主要的几项如下：

- 11岁、12岁、13岁连续三年代表澳大利亚参加国际数学奥林匹克竞赛，依次获得铜牌、银牌、金牌，是迄今最年轻的金牌获奖者（大多数获奖者年龄在15岁以上）。
- 17岁从澳大利亚并不有名的Flinders大学毕业，21岁取得普林斯顿大学博士学位，24岁获得美国加州大学的正教授职位。
- 2006年在国际数学家大会上获得菲尔兹奖，时年31岁。

需要指出的是这几项成就虽然令人叹为观止，但是单独来看都并非前无古人。德国数学家C. Reiher曾经获得过四届国际数学奥林匹克金牌外加一届铜牌（当然并非在那么小的年纪），获得过三枚金牌的数学家则为数不少。他也未尝成为美国最年轻的数学教授，他的师兄，数学家C. Fefferman于22岁就成为了芝加哥大学的数学教授。这里的师兄是字面意义上的：他们都曾经师从普林斯顿的数学大师Elias Stein门下。他当然也不是最年轻的菲尔兹奖得主，他这位师兄Fefferman在29岁就得到了菲尔兹奖，而迄今最年轻的菲尔兹奖得主是法国数学大师J. Serre，记录是28岁。但是这并不妨碍汇聚这些惊人成就于一身的陶哲轩成为新闻焦点，更不用提他年轻英俊的外表——顺便说一句，他本人在生活中显得比照片上还要年轻。可惜的是他早已名草有主了，他的妻子是一个韩裔工程师，是他在当教授时从自己的学生中认识的……跑题了。

然而公众关心和熟悉的部分恐怕也就到此为止了。是的，他很聪明，极其聪明，年纪轻轻就大奖在握，然后呢？

这里有个很微妙的问题，就是对数学家来说，聪明到底意味着什么？自然，一个笨蛋压根儿很难成为数学家，但是很多数学大师也并非以聪慧著称，例如陈省身先生就从来没当过任何意义上的神童。

数学家是个人风格之间差异巨大的群体，有的人健康开朗，例如俄国数学家柯尔莫格罗夫常常以滑雪和冬泳健将自诩；有的人潇洒浪漫，例如美国数学家斯梅尔很喜欢在海滩上一边看着夕阳一边想数学问题；也有的人内向木讷，例如众所周知的陈景润大师。不幸的是，最后一种形象似乎在公众心目中是最深入人心的……

而聪明，哪怕是像陶哲轩这样惊世骇俗的聪明，也只能说是个人特质，而并非做一个出色数学家所必需的条件。正如我们所知的那样，国际数学奥林匹克竞赛的历届获奖者

中只有一部分最终成为数学家，成为数学大师的则更少。但是和许多喜欢顺口抨击“体制问题”的人的想法不同，这其实只不过是个自然现象罢了。正如陶哲轩的同事，华人数学家陈繁昌评论过的那样，数学研究和数学竞赛所需的才能并不一样，尽管有些人（比如陶哲轩）可以同时擅长数学研究和数学竞赛。

除了智商以外，使得陶哲轩真正成为一流数学家的，也许还有他广泛的兴趣、丰富的知识储备以及深刻的洞察力。令他获得菲尔兹奖的最主要成果之一是他和另一位数学家合作证明了素数的序列中存在任意长度的等差数列，这个问题毫无疑问属于数论这一数学分支，而需要做一点背景介绍的是陶哲轩本人的专业同数论完全无关：他是一个调和分析以及偏微分方程的专家。这是典型的“陶哲轩式“的传奇故事：他能够敏锐地发现那些陌生的问题同自己擅长领域的本质联系，然后调动自己的智慧来攻克。和那些在一个数学分支里皓首穷经的大师不同，他所解决的问题已经遍历了无数看似彼此遥远的领域。这也许才是他最大的特色。正如他的师兄 Fefferman 所评价的那样，陶哲轩与其说像音乐神童莫扎特，不如说他像斯特拉文斯基。他不是只有一种风格，而是具有极其多变的风格。

另一个极好的例子是他近年来关于压缩感知 (compressed sensing) 方面的研究。这听起来不像是个传统的纯数学问题——至少和素数什么的毫无关系，事实上，这个问题完全来自于信号处理的领域。问题本身可以简单描述如下：我们都知道，在数学上，要解出几个未知数就要列出几个方程才行。用信号处理的方式来表述，就是如果要还原一个信号（声音或者图像或者其他什么数字信息），那么信号有多大，我们就要至少测量多少数据才行。这是个一般的规律。但是实践中由于种种原因我们往往无法进行充分的测量，于是就希望能用较少的测量数据还原出较多的信息。本来这是不可能的事情，但是近来人们渐渐意识到，如果事先假设信号有某些内部规律（总是有规律的，除非信号是完全的噪声），那么这种还原是有可能做到的。在这个领域里，几篇极其关键的论文就出自陶哲轩和他的合作者之手。

事实上，关于陶哲轩是如何注意到这个问题的，在圈内也有一个流传很广的八卦：话说有一个年轻应用数学家正在研究这个问题，取得了很大进展，但是有些关键的步骤所牵涉到的数学过于艰深，于是他被这些困难暂时卡住了。某一日这个数学家去幼儿园接孩子，正好遇上了也在接孩子的陶哲轩，两人攀谈的过程中他提到了自己手头的困难，于是陶哲轩也开始想这个问题，然后把剩下的困难部分解决了……（顺便提一句，由于陶哲轩和很多别的数学家的介入，压缩感知这个领域已经在这一两年来成为应用数学里最热门的领域之一，吸引了人们极大的注意。陶哲轩本人在 2007 年写过一篇极好的关于这个领域的普及性文章。）

其实人们普遍觉得，陶哲轩最令人羡慕之处，不在于他惊人的天赋和出色的成就，而在于他在坐拥这些天才和成就的同时，也能成长为一个享有健康生活的快乐的“普通人”。他是个出色的合作者和沟通者，他自己曾经说过："我喜欢与合作者一起工作，我从他们身上学到很多。实际上，我能够从调和分析领域出发，涉足其他的数学领域，都是因为在那个领域找到了一位非常优秀的合作者。我将数学看作一个统一的科目，当我将某个领域形成的想法应用到另一个领域时，我总是很开心。"

对于我们大多数人来说，成为像陶哲轩那样的天才恐怕是可望而不可即的事情。但正是像我们一样的普通人们构成了这些天才成长的土壤的一部分。在中国这样的大国里，天才的出现并不稀罕，然而如何让他们健康自由地成长起来，恐怕会是一个颇令人思量的问题。

陶哲轩获得 2008 年美国国家基金委 Alan T. Waterman 奖的 50 万美元，鼓励他继续进行世界级的数学研究。这是他获奖后为粉丝们签名。

LINK 博客链接

陶哲轩：未被神化的天才

刘小川

1987 澳大利亚数学竞赛共 38 万多学生参加，五个满分。高年级组满分者有时年 11 岁的陶哲轩。这是他从昆士兰省总督手里接过金牌。

出于我所不能够理解的原因，陶哲轩的博客一直被 Great Fire Wall 封着。而这几天，wordpress 的博客居然又可以访问了。我猜，我应该感谢今年奥运会的召开。

陶哲轩是我最尊重的大数学家之一，他学术做的好，一个人做八个数学方向。其中包含数个重要的分支，从调和分析到偏微分方程；从解析数论（这是陈景润的方向）到算术数论；无一不是数学发展中的热点。此外，他还从事工科方面的研究：照相机的压缩传感原理（调和分析在实际中的应用）。最近他又开始对几何感兴趣，不久前刚刚发表了一篇黎曼几何的论文。

陶是数学领域不世出的天才，被称为数学界的莫扎特。人们说数学是从他的身体里流出来的。他 1975 年生于澳大利亚，十几岁就开始学习微积分，13 岁获得国际数学奥赛的金牌，而且这个记录至今也没有被打破。他 21 岁取得博士学位，24 岁被评为终身教授，2002 年，世界数学家大会首次在中国召开，陶哲轩被邀请做大会报告，当时，他仅有 27 岁。四年之后，世界数学家大会再次召开，31 岁的陶获得了菲尔兹奖。

就这些成绩而言，陶足以令世人仰视。但陶哲轩的父亲在接受采访的时候却说："他真正从一个短跑运动员转变成一个长跑运动员是在普林斯顿（17 岁到 20 岁），在那里，他常常感到自己基础的不足。"

其实，真正静下心来搞科研同基于早期教育带来的

LINK 博客链接

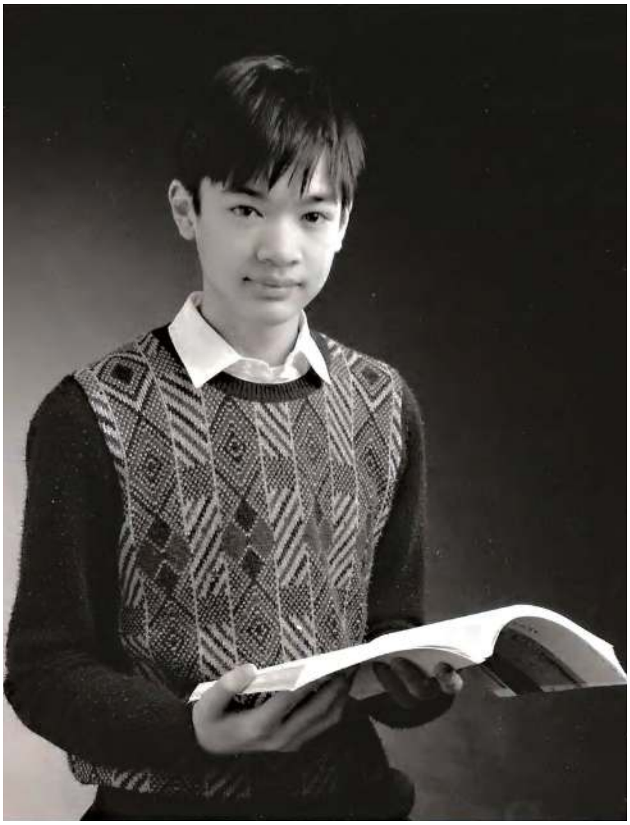
先发优势相比有着根本的差别。从一个耍小聪明的孩子一步步成为世界一流的大数学家，这期间需要付出的刻苦和勤奋才是这位天才走到今天最重要的资历。当一个人为自己一点小小的进步而自以为是的时候，常常就是被其他人迅速赶超并远远落下的时候。陶的父亲 Billy Tao 曾经拒绝一些媒体的催促，去什么培养世界最年轻的大学生。相反的，他坚持让陶学习人文课程，让他对数学的热爱随着心智的成熟而慢慢炽烈。陶的成长是一个奇迹，又是一本活生生的教材。

陶哲轩的故事如果到此为止，我可能仅仅觉得他是一个非常遥远的人物，远的像希尔伯特或是庞加莱一样。其实，我对陶的尊重同他的成就基本没有什么关系。

06 年的年末，陶哲轩在 wordpress 上开始写博客。到现在还不到两年，上面已经有了数百篇帖子。他一方面将自己各方面的科研成果写在那里，另一方面，还细心地写下了对于科研的种种体会，把各个阶段数学人该做的事情都写了下来。只消到他的网站看一眼，就会对其中丰富的材料产生深刻的印象。他会及时公布自己发表的论文，并将一些自己觉得还不够成熟的思考结果直接贴出来分享（这与许多人的科研方式相比可谓大相径庭）。他总是对其他人的帮助表示由衷的感谢，和他有科研交流的人多的让人吃惊，也许过些年也会有人统计个 Tao Number，就像 Erdos 一样。像陶这样的人，居然肯花费时间使博客如此的正规和条理化，并使得他的博客异常火爆。Google 有一个插件，可以按照某种算法统计一个网页的重要程度（当然不仅仅按照访问次数，还有访问者分布之类的统计数据做参考），叫做 Page rank，陶博客的 Page rank 是 6，跟新浪一边高。他在其博客中系统地把数学各个分支分列开来，对每一个认真阅读并提出问题的人均仔细的回答，这其中也包括我，一个不知名的中国学生。

陶哲轩在其博客主页上表示，他一年仅接受一个博士。这是他对学生负责任的表现。从 07 年开始，他就将自己给博士开的数学课（从 1999 年开始，他每学期开的课基本都不一样）的讲义贴在博客上。事实上，从半年前我已开始自学其中的一门，目前刚刚完成了一半。不客气的说，从其中学到的东西比从身边任何教授学到的都要多。是他让我见识到了当代数学的魅力，而不是一直徘徊在百年前，反复弹唱着陈旧的数学老调。

陶哲轩是我所尊重的人，首要的原因是他尊重他人。他不像国人以为的那样，似乎天才就一定要人格不健全。他有魅力而且谦逊，甚至还保持着一颗童心。在他的博客主页上他将自己最喜欢的未解决问题藏了起来，对找到的人则会给予奖励。他对数学的热爱几乎无处不在。他曾与一位年轻的美国数学家合作完成了一本数学专著，他的英文名字是 Terence Tao，另一人叫 Vu Van，于是两人作序时自称 TT 和 VV。在他主页的自我介绍中，最后一句话是这样的："But no matter how far or how wide I roam，I still call Australia home."（无论身在何处游荡，永远心怀澳洲故乡。）



时年 16 岁的陶哲轩

谈谈时间管理

On Time Management

陶哲轩 / 文　谢敏仪 / 译

受到一些网友的鼓励，我最终决定要在此谈谈我对时间管理的看法。其实我曾经想过就这个题目写点什么，不过后来发现自己在时间管理方面仍有待改善（看我堆积了很多论文未写便知）。况且，至今我仍未在这个课题上悟出简单而有效的道理（除非要我谈谈写论文的心得，像我在网上有一篇文章，介绍“快速成型法”——“rapid prototyping”）。因此，我只能跟大家分享一下个人经验，但未必适用于所有人和所有工作状况。当然，欢迎读者留言告知你们的想法、经验或其它建议（不得不承认，有时因为种种原因，就连我自己也不能沿用自己提出的经验与方法，对此我很遗憾）。

也许，我可以先发表一些零碎的意见。首先，我很庆幸，许多优秀的研究伙伴都在我们合作的工作中付出了大量的心血。例如最近在博客上刊登的好些论文，有很大部分都是合著者努力的成果。纵使合著比独撰论文要花上更多时间，却大大减轻了每位作者的工作负担，有助提升写作质量。我可以同时撰写几篇合著论文（因为在撰写过程中，有时论文在合著者手中，有时则尚待某些新进展），但如果是独撰的话，却只可以写一篇而已。

为配合校历安排，很多论文会在夏季完成，而其中不少项目更已构思了好一段时间（例如有篇即将发表的合著论文，

Prodded by several comments, I have finally decided to write up some my thoughts on time management here. I actually have been drafting something about this subject for a while, but I soon realised that my own experience with time management is still very much a work in progress (you should see my backlog of papers that need writing up) and I don’t yet have a coherent or definitive philosophy on this topic (other than my advice on writing papers, for instance my page on rapid prototyping). Also, I can only talk about my own personal experiences, which probably do not generalise to all personality types or work situations, though perhaps readers may wish to contribute their own thoughts, experiences, or suggestions in the comments here. [I should also add that I don't always follow my own advice on these matters, often to my own regret.]

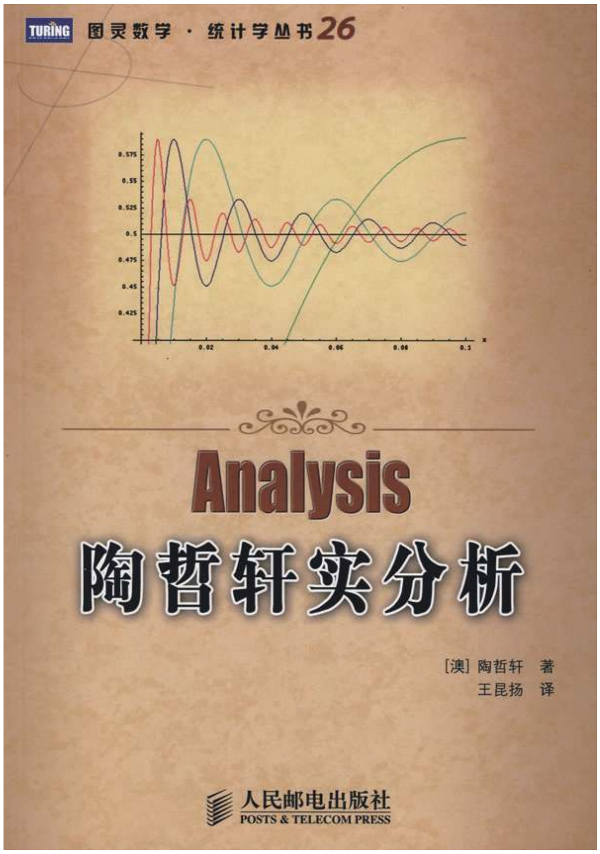
I can maybe make some unorganised comments, though. Firstly, I am very lucky to have some excellent collaborators who put a lot of effort into our joint papers; many of the papers appearing recently on this blog, for instance, were to a large extent handled by co-authors. Generally, I find that papers written in collaboration take longer than singly-authored papers, but the net effort expended per author is significantly less (and the quality of writing higher). Also, I find that I can work on many joint papers in parallel (since the ball is often in another co-author’s court, or is pending some other development), but only on one single-authored paper at a time.

我们花了三、四年时间才把它完成；自2000年以来，我一直断断续续地思考——尽管通常都没什么灵感——wave maps的global regularity问题）。因此，每星期可以发表一篇论文并不等于构思和撰写所用的时间就只有短短一个星期，而事实刚好相反，要把论文写好，往往要经历很漫长的时间，这是成功背后鲜为人知的一面。

此外，我处理复杂数学问题的能耐基本上每天都不同：有时可以用整整一个小时费尽心思去想某个问题；有时会把我与合著者之前写下的详细手稿整理一下，再打出来；不过有时候我只想回复电邮，做点琐碎事，或到外面走走，甚至去睡午觉。根据自己的精神状态来分配时间是很有效的。比方说，如果我某天下午有空，只要有灵感，便会把办公室的门关起来，让计算机保持离线状态，开始动手写一篇拖了很久也没有写完的论文。有些时候，我会处理一周没看的电邮，审阅一篇论文，再写写网志文章，又或者按照自己当时的精神和心情去做些其它的事。幸好从事数学研究的大部分工作（教学工作除外，不得不配合授课时间来安排工作计划）都是具有弹性的，时间可以按照上述的方式灵活调动（当然，最好在工作还没变成紧急的事之前就要做好，以免扰乱灵活的工作时间）。

能够客观准确地评估自己在某段时间（例如一天中余下的时间）的工作潜能（即身处的地方、精神状况、将要应付的职责和工作、可用资源的情况以及注意力的分散程度等因素的相互关系）对于时间管理是有很大帮助的。不要高估或低估自己的能力，从而使得工作量过多或太少，这都会影响工作效率（我在这两方面都有过经验和教训）。

即使我有许多复杂程度不同、难度不同、大小不同的事情要做，但如果我面对的某项任务需要极为专注才能完成，我会



陶哲轩著的大学生教科书；由北京师范大学王昆扬教授翻译。他目前已经出版9本书，仅有一本是和别人合作。

[For reasons having to do with the academic calendar, many more of these papers get finished during the summer than any other time of year, but many of these projects have actually been gestating for quite some time. (There should be a joint paper appearing shortly which we have been working on for about three or four years, for instance; and I have been thinking about the global regularity problem for wave maps problem on and off (mostly off) since about 2000.) So a paper being released every week does not actually correspond to a week being the time needed to conceive and then write up a paper; there is in fact quite a long pipeline of development which mostly happens out of public view.]

Another thing is that my ability to do any serious mathematics fluctuates greatly from day to day; sometimes I can think hard on a problem for an hour, other times I feel ready to type up the full details of a sketch that I or my coauthors already wrote, and other times I only feel qualified to respond to email and do errands, or just to take a walk or even a nap. I find it very helpful to organise my time to match this fluctuation: for instance, if I have a free afternoon, and feel inspired to do so, I might close my office door, shut off the internet, and begin typing on a languishing paper; or if not, I go and work on a week's worth of email, referee a paper, write a blog article, or whatever else seems suited to my current levels of energy and enthusiasm. It is fortunate in mathematics that a large fraction of one's work (with the notable exception of teaching, which one then has to build one's schedule around) can be flexibly moved from one time slot to another in this manner. [A corollary to this is that one should deal with tasks before they become so urgent that they have to be done immediately, thus disrupting one's time flexibility.]

It helps a lot here to be able to honestly and accurately evaluate your work potential (a function of your location, your current level of motivation and energy, your upcoming duties and commitments, availability of resources, and the expected level of

尽量将注意力单单集中于这件事上，把其它事情暂时搁下。我发现，只有做那些无须太专心就能完成的事的时候，才可以同一时间做不同的事（尤其是我没有受到驱使做某事的时候，这个方式似乎是最有效的）。这类工作一般都需要较长时间才能完成，远远超出我所能付出的精神、时间和耐性；在这种情况下，就要找出合适的“工作断点”（比如说，在写论文的过程中给出一个关键命题，或者将对话中、黑板上、草稿纸上出现的某些灵感仔细的记下来）。工作断点可以让你安心地把工作暂时放下，同时也可以使你更容易的把握工作进度，等到继续工作的时候可以马上投入。应避免在没有完成工作断点的情况下停止手头的工作，这样做的结果很可能使工作半途而废，或让人心有旁骛，影响其他的工作，当再次开始这一工作时不得不从之前做过的某一部分开始做起。其实，一次完不成的任务当然有必要分步完成，只要能够找到合适的暂停之处，就不必急于一蹴而就。请允许我举个很俗的例子：每当我要写信的时候（一般都是我工作状态不大好，不足以应付复杂的数学问题时），我都会把内容先打好，然后印出来，放进信封，封好口，再把信件放在寄件盘里。不过通常我都不会把信件寄出（也不会整理盘子里的其它文件），除非寄件盘挤太满，而我也没什么别的事可以做，就会把所有存积的文件、信件统一处理一下（趁计算机重新启动或不知何故无法正常操作的时候处理是最好不过的了）。

如果可以的话，尽量把琐碎小事合并处理，而需要大量精力的任务则最好各自独立进行，以免分心。

与“工作断点”相关的一个做法，就是把一项非常大的工作分割成若干个独立的部分，最好每一部分都有实时的“回报”。这样做有很多可取的地方，比如说，如果我早就决定要写一部关于庞加莱猜想 (Poincaré conjecture) 的著作或专论，而不是写十九篇较易完成的关于庞加莱猜想的独立短文，我就会怀疑我自己根本不会尝试写（更不用说写成了）那十九篇讲义（这个做法某程度上也让我“置之死地而后生”，因为事先说好会写讲义，好给自己一点推动力，叫我不能半途而废，撒手不干）。

现代文字编辑器（包括我的博客使用的那个）的好处是在撰写过程中，能够更容易把草稿储存起来，之后再按情况补充一些细节或稍作润色。正如上述的做法，通过把工作细分，有助作者撰写篇幅很长的论文。我非常敬佩那些在计算机应用还未普及以前，就能够写出高质量的论文和著作的数学家。因为即使有优质的文书支援技术，对我来说这也是很难做到的事。

distraction) for a given period of time into the future (e.g. the rest of the day): being either overconfident or underconfident about what you can achieve leads to taking on either more or less than you can properly handle, both of which lead to inefficiencies (I have learned both sides of this from direct experience).

While I have a large number of things on my “to do” list, at various levels of complexity, difficulty, and length, when it comes to any task requiring dedicated thought, I try to focus on it exclusively, postponing or shutting out everything else; I find that multitasking only works for me when none of the tasks requires more than a fraction of my attention (in particular, it seems to work best when I am not inspired to do any one particular task). Quite often, these tasks take longer to complete than I have the energy, time, or patience for, in which case one has to find a natural break point (e.g. proving a key lemma in a paper that one is writing up, or writing down a full sketch of some idea that just came up in conversation or on the blackboard or scratch paper) where one can safely set the task aside and forget about it for a while, and be able to resume later without losing one’s place. The thing to avoid is to drop a task when it is only partially finished, without any good “closure”; it then either gets lost, or weighs on one’s mind and prevents one from fully thinking about something else, or has to be redone from an earlier point when one picks it up again. But one doesn’t have to finish each task off completely as it comes, as long as it can be picked up later. A mundane example: when I get around to writing physical letters (usually a low priority, when I don’t feel ready to do serious mathematics), I type them, print them out, seal them in an envelope, and then deposit them in my “out” tray, but I generally don’t mail them (or process any other paperwork in my out tray) until it piles up and I have nothing better to do, at which point I go out and deal with all of it at once. [I find that a particularly good time for doing this is when my computer needs to reboot or is somehow not easily usable.]

More generally, tasks that require little concentration seem to be best done in batches if possible, while tasks that require a lot of concentration seem to be best done individually, with as few distractions as one can manage.

Related to the point about “closure” is the desirability of being able to chop up an extremely long task into smaller, self-contained ones, ideally each with its own immediate “payoff”. To give one example: I doubt I would ever attempt to write (let alone finish) the equivalent of my 19 or so lectures on the Poincaré conjecture if I had decided to write one enormous article or monograph rather than 19 reasonably manageable and self-supporting shorter pieces. (It helped also to “paint myself into a corner” a little bit here by announcing the lectures in advance, and building up some momentum, to stop myself from

陶哲轩在国际会议上

花一些时间和精力去学习那些将来大概会多次使用的技术是很有意义的。数学方面，LaTeX 是个很好的例子：假如你打算写许多篇论文，你必须把最起码要懂的技术学好，而且还要多学一点，才可以把自己要写的东西轻松自如地写出来，所以我们应该认真地学习怎样用 LaTeX 制作图表、处理图像和数组等。最近我在钻研如何使用录制好的宏，在键盘上按几下，就能打出一组 LaTeX 的公式码（例如：\begin{theorem} … \end{theorem} \begin{proof} … \end{proof}）。这个做法所节省的时间似乎微不足道，但相信会随时间累积而逐渐增加。不管怎样，这样做看起来是很有效率的，有助提升个人士气（个人士气是撰写长篇幅论文过程中不可或缺的因素）。

很多时候，我们为了做某些事会把工作时间推迟，或延迟完成，有时会请别人去做，甚至刻意拖延工作进度。其实世上每件事都不是一样重要的，如果可以待自己有更好的能力，或者先看看会不会有其它事情发生，令要做的事变得不那么重要，那么工作就会轻松得多。我目前要写的那些论文是关于 wave maps 的，我曾经因受挫折而把论文搁下多年不想写，但回想起来，当时我任由自己把未写完的论文搁下，

abandoning the project half-way.)

[One very nice thing about modern text editors, including the one on this blog, is that it is very easy to save a draft at some intermediate stage and flesh it out or polish it later, which greatly assists the task of writing long papers by chopping up this task into a sequence of much smaller tasks, as discussed above. I am quite impressed by mathematicians from before the computer era who were able to meticulously write out high-quality papers and even books; even with good secretarial support, I would find this extremely difficult to do myself.]

It also makes good sense to invest a serious amount of time and effort into learning any skill that you are likely to use repeatedly in the future. A good example in mathematics is LaTeX: if you plan to write a lot of papers, it makes sense to go beyond the bare minimum of skill needed to jerry-rig whatever you need to write your paper, and go out and seriously learn how to make tables, figures, arrays, etc. Recently I've been playing with using prerecorded macros to type out a standard block of LaTeX code (e.g. \begin{theorem} … \end{theorem} \begin{proof} … \end{proof}) in a few keystrokes; the actual time saved per instance is probably minimal, but it presumably adds up over time, and in any event feels like you're being efficient, which is good for morale (which becomes important when writing a long paper).

There are also many situations in which it makes tactical sense to defer, delay, delegate, or procrastinate on any given task, and go work on something else instead in the meantime; not everything is equally important, and also a given task may in fact become much easier (and be completed in a much better way) if one waits for one's own skills to get stronger, or for other events to happen that reduce the importance or need for the task in the first place. My current papers on wave maps, for instance, have been delayed for years, much to my own personal frustration, but in retrospect I can see that it was actually a good idea to let those papers sit for a while, as the project as I had originally conceived it was a technical nightmare, and it really was necessary to wait for the technology and understanding in the field to improve before being able to tackle it in a relatively civilised manner. [Perhaps this very article on time management is an example of this, also. There are also a number of other draft articles hidden in this blog that I felt were not quite working at the time, and are awaiting some further inspiration to complete. It seems that not every idea or topic for an article necessarily leads to a viable end product; cf. "use the wastebasket".]

My final suggestion is to pick some sort of organisational system and make a real effort to stick to it; a half-hearted system is probably worse than no system at all. [A corollary to this is not

其实是个不错的想法，因为就当时的技术而言，该研究项目对我来说简直是一场噩梦。要用较合适的方法来对付问题，就必须等候技术成熟，以及对该领域的认识和理解进一步加深（或许在你眼前的这篇文章正好也是关于时间管理的例子。其实我的博客中还有些隐藏文稿，暂时还未思考成熟，需要更多的灵感去完成。这样看来，大概不是每个想法或文章的主题都可以茁壮成长，开花结果。对此题目有兴趣的朋友，请参阅我另一篇文章《善用你的废纸篓》——Use the paperbasket）。

最后，我还有一个建议，就是要挑选某些合用的个人电子管理系统，然后贯彻使用；如果对其“不冷不热”，那倒不如不用（不要好高骛远，不要一味追求新产品，因为自己未必可以好好掌握其应用，所以最好还是让其随时间自然发展下去）。我的个人电子管理器材包括一个与手提电脑同步的个人数字助理 (PDA)、一个电邮账户、一些收件盘和寄件盘、在办公室里的特定位置还有一块“专用”的黑板。那块黑板上写的东西只有我才看得懂，但我不认为我可以在此好好解释一番。我现在已经习惯使用它了，而且效果也不错（不过我可不希望有人会把黑板擦得一干二净）。毕竟选择是很个人的事，除自己以外，没有人能告诉你什么东西最适合你。我发现合适的系统确实可以帮助我腾出很多记忆空间，因为不必记挂星期二下午三时有甚么事要做，也不用记住因 A,B,C 的缘故，要在星期 X,Y,Z 做些甚么事。我可以更专注地理解某个数学论证的内容，给出一个有点难度的命题，或是做些其它事。另外我还发现，能够从自己的电子管理系统中删除已完成的项目，内心是何等的满足。这份满足感是工作乏力时的最佳良药。

啊，最后一则免责声明：我们有时要放下惯常的做事方法，让自己在不可预计的情况下，看见机会，运用智慧，将机会化为实力。我曾经有好几次打算要在午膳时间做些事（随便吃点东西就行），然而有同事或来客突然造访，邀请我外出吃饭，结果（不论在数学上或是其它方面）都令我获益良多。尽管事情并不如我所想般发生，却是充满乐趣的（同样道理，如果在会议上的演讲中缺席或索性不参加会议，把时间用来写自己的论文，也可能有相似的结果）。

to try to make an overly ambitious system ab nihilo that one is unlikely to follow faithfully; it is probably better to let such systems evolve over time.] I have my own system involving a PDA synchronised to my laptop, my email account, some in trays, out trays, and other designated spots in my office, and a “reserved” blackboard, that probably only I can understand completely, and I don’t think I can even explain it properly here, but I’m used to it now and it seems to work well enough (though I sure hope nobody ever erases that blackboard!). The choice of system though is presumably a very personal matter and I wouldn’t be able to advise on what would work best for anyone other than myself. But I do find that such systems free up a lot of memory; if I don’t have to worry about what I’m supposed to be doing at 3pm on Tuesday, or what work needs to be done on X, Y, and Z for purposes A, B, and C, I can devote more of my attention to trying to understand a mathematical argument, or proving a tricky lemma, or whatever else I need to work on. [I also find it psychologically satisfying to be able to physically cross off an item from my organisational system, which can be a useful motivation when one feels otherwise uninspired to deal with something.]

Oh, and one final disclaimer: sometimes one should abandon one’s own rules and allow for serendipity. There have been many times, for instance, when I had planned to work on something during my lunch hour (grabbing something quick to eat), when I was interrupted by a colleague or visitor to go out to eat. It has often happened that I got a lot more out of that lunch (mathematically or otherwise) than I would have back at the office, though not in the way I would have anticipated. And it was more enjoyable, too. (Similarly with skipping talks at conferences (or skipping conferences altogether) to go work on one’s own papers, etc.)

致谢：感谢陶哲轩教授允许本刊连载他的博客译文。

《中国数学会通讯》是中国数学会的机关刊物，主要刊登国内外数学界的重要信息，报导中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

主　　　编：马志明
常务副主编：严加安，王长平
副　主　编：巩馥洲，丁彦恒
编　　　委：蔡天新，段海豹，冯荣权，胡作玄，贾朝华，李文林，刘建亚
陆柱家，曲安京，王维凡，余德浩，张英伯，张立群
责任编辑：武建丽

《中国数学会通讯》为季刊，彩色印刷，图文并茂，
全年的总订费为 50 元（含邮费）。

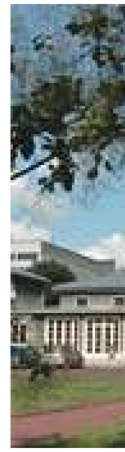
订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号 (邮政编码：100190), 中国数学会办公室；
或汇至北京中国数学会
开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2010 年第 4 期要目：

- 华罗庚百年诞辰纪念座谈会纪实
- 2010 年《中国数学会通讯》编委会在西安召开
- 《数学大辞典》出版座谈会纪要

余德浩：缅怀华老
余德浩：翠华览胜四首
陆柱家译：2010 年菲尔兹奖
蔡天新：欧拉：小国里出现的科学巨匠
张英伯：访日随感

《中国数学会通讯》编辑部供稿



左图：拿破仑：他是法国数学的早期推动者
右图：巴黎综合理工学院 (Ecole Polytechnique) 美丽的校园，和穿着制服的参加游行的学生。综合理工的校友包括著名数学家庞加莱，分形几何之父曼德博 (Benoit Mandelbrot, 1924-2010) 等。在校 2700 个学生，其中包括 700 个研究生。

数学不好
还真不敢去法国

李雪梅

巴黎高等师范学院 (Ecole Normale Superieure Paris) 的校园。高师每年仅录取不多于二百名大学生，全校包括研究生仅一千个学生，共培养了 12 个诺贝尔奖获得者和世界上近五分之一的菲尔兹奖获得者。2010 年在印度召开的国际数学家大会上，7 名大奖得主有 3 名是高师的老师或学生。

8 月 19 日，素有“数学界诺贝尔奖”之称的菲尔兹奖在印度南部城市海得拉巴揭晓。在 4 名获奖者中，法国数学家塞德里克•维拉尼和法籍越南裔教授吴宝珠联手夺下半壁江山，这使得法国在菲尔兹奖目前 50 多名获奖者中占据了 11 席，也许数量上仍不及美国，但从人口比例来看，法国早已确立了数学强国的地位。

法语中对数字的表达方法常常让对数学不太敏感的学习者望而却步，曾有“算术不好千万别学法语”的说法。传说外国人学法语，很多就是在念到了 99 的时候决定放弃法语学习的。这样一个连语言都有数学门槛的国度，成就了无数大数学家，我们借着菲尔兹奖的揭晓，顺藤摸瓜来了解一下法国出数学家的奥秘吧。

事实上，从天才少年埃瓦里斯特•伽罗瓦，到提出“庞加莱猜想”的大博学家亨利•庞加莱，再到去年获得挪威数学“阿贝尔奖”的米哈伊尔•格罗莫夫（Mikhail Gromov)，法国在数学领域总是人才辈出，硕果累累。这其中既有历史的积淀，也得益于教育部门对数学学科的重视。

法国数学协会主席贝尔纳•埃尔费表示，法国的数学传统可上溯到拿破仑时期，随着时间的推移，法国对于数学的推崇与重视有增无减，正是在这种气氛的带动下，不断有出色的人才投身这一学科，推动其向前发展。20 世纪 40 年代，布尔巴基学派的出现在当时形成一股风潮，该学派的大部分成员是巴黎高等师范学院的青年才俊，他们主张用逻辑的次序介绍数学的各个组成部分，吸引了众多数学家的注意。这一学派至今仍对法国数学界有着很大影响，在法国 11 位菲尔兹奖获得者中，有 5 位便是师出此门。

除了优良的传统，法国的学校和科研机构也为数学家们的发展提供了必不可少的条件。无论是重点院校，还是普通大学，抑或是高等专科学校的预备班，都能提供优质的数学教育。那些有意深造的年轻数学家则会选择法国国家科研中心等机构开始他们的职业生涯。与其他学科的聘任制度有所不同，科研中心每年都会选拔青年数学人才，聘为研究员，他们可选择自己喜爱的课题进行研究，这为他们未来的发展提供了良好条件。

拿高等科学研究所（Institute des Hautes Etudes Scientifiques，简称 IHES, www.ihes.fr) 举例，它是法国数学界最知名的机构之一。该研究所远离巴黎市区，占地面积很小，却绿草茵茵，环境宜人。它还拥有一套独特运作方式，即只有 5 位终身制的研究员，而其他人都是来自世界各地的访问学者，他们或在此从事长期研究，或进行短期交流，在思维的碰撞中追求新的灵感。

在深厚的治学传统和宽松的研究环境下，法国的数学研究取得了长足进步，法国目前有近 4000 名数学专业研究人员，是世界上数学家密度最高的国家之一，而且还坐拥高等科学研究所、亨利•普安卡雷研究所、巴黎综合理工学院、巴黎高等师范学院、巴黎第十一大学等一批在此方面出类拔萃的科研机构和院校。

不过，与世界各国的大趋势相同，法国数学界也面临后备人才不足的问题。起始阶段微薄的工资，职场上越来越多的选择，使得一部分年轻人放弃曾挚爱的数学研究，转投其他行业。看来，如何在数学王国里继续保持领先地位，仍是法国科研工作者应该思考的问题。

数学思想中的人文意境

张奠宙

郑板桥的咏雪诗里有着数字的对仗

数学和中国古典诗词，历来有许多可供谈助的材料。例如：

一去二三里，
烟村四五家；
楼台六七座，
八九十支花。

把十个数字嵌进诗里，读来琅琅上口，非常有趣。郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，
五片六片七八片；
千片万片无数片，
飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系，游戏而已。数学和古典人文的联接，贵在意境。

一. 自然数的人文意境

人们熟悉的自然数，现在规定从 0 开始，即 0,1,2，……那么自然数是怎么生成的呢？老子《道德经》说得明白：

太初有道。道生一，一生二，二生三，三生万物。

《道德经》陈述的关键在一个“生”字。生，相当于皮亚诺自然数公理的“后继”。由虚无的“道”（相当于 0）开始，先生出“一”，再生出“二”和“三”，以至生出万物。这里，包含了自然数的三个特征。

1. 自然数从 0（道）开始；
2. 自然数一个接一个地“生”出来；
3. 自然数系是无限的（万物所指）。

这简直就是皮亚诺的自然数公理了。

再看大数学家冯·诺依曼用集合论构造的自然数。他从一个空集 Φ(相当于“道”) 出发，给出每一个自然数的后继：即此前所有集合为元素的集合。具体过程如下：

空集 Φ 表示 0；

杜甫草堂；杜甫的登高诗里也有数学。

以空集 Φ 为元素的集合 {Φ} 表示 1；(道生一)

以 Φ 和 {Φ} 为元素的集合 {Φ，{Φ}} 表示 2；（一生二）

以 Φ，{Φ}， 和 {Φ，{Φ}} 为元素的集合 {Φ，{Φ}，{Φ，{Φ}}} 表示 3；（二生三）， 以前面 N 个集合为元素构成的新集合，表示 N+1 （三生万物），

…… …… ……

我们了解自然数， 何不从《道德经》开始？

二. 关于“无限”

小学生就知道，自然数是无限多的，线段向两端无限延长就是直线。平行线是无限延长而不相交的。无限，是人类直觉思维的产物。数学，则是唯一正面进攻“无限”的科学。

无限有两种：其一为没完没了的“潜无限”，其二是“将无限一览无余”的“实无限”。

杜甫《登高》诗云：

风急天高猿啸哀，渚清沙白鸟飞回。
无边落木萧萧下，不尽长江滚滚来。
万里悲秋常作客，百年多病独登台。
艰难苦恨满霜鬓，潦倒新停浊酒杯。

我们关注的是其中的第三、第四两句：“无边落木萧萧下， 不尽长江滚滚来”。

前句指的是“实无限”，即实实在在全部完成了的无限过程、已经被我们掌握了的无限。“无边落木”就是指“所有的落木”，这个实无限集合，已被我们一览无余。

后句则是所谓潜无限，它没完没了，不断地“滚滚”而来。尽管到现在为止， 还是有限的，却永远不会停止。

数学的无限显示出“冰冷的美丽”，杜甫诗句中的“无限”则体现出悲壮的人文情怀，但是在意境上，彼此是沟通的。

三. 关于“极限”

“极”、“限”二字， 古已有之。今人把“极限”连起来，把不可逾越的数值称为极限。“挑战极限”，是最时髦的词语之一。1859 年，李善兰和伟列亚力翻译《代微积拾级》， 将“limit”翻译为 “极限”， 用以表示变量的变化趋势。于是， 极限成为专有数学名词。

极限意境和人文意境的对接，习惯上用“一尺之棰，日取其半，万世不竭”的例子。数学名家徐利治先生在讲极限的时候，却总要引用李白《送孟浩然之广陵》诗：

故人西辞黄鹤楼，
烟花三月下扬州。
孤帆远影碧空尽，
唯见长江天际流。

“孤帆远影碧空尽”一句，生动地体现了一个变量趋向于 0 的动态意境，它较之“一尺之棰”的意境，更具备连续变量的优势，尤为传神。

贵州六盘水师专的杨老师曾谈他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁《游园不值》的诗句：

春色满园关不住，
一支红杏出墙来。

学生听了每每会意而笑。实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数 M，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过 M。于是，M 可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏。无界变量相当于总有一支红杏越出园子的范围。

诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了。

孤帆远影碧空尽：无限的概念。（钱来忠绘）

四. 关于四维"时空"

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂的名句《登幽州台歌》：

前不见古人，后不见来者；
念天地之悠悠，独怆然而涕下。

一般的语文解释说：前两句俯仰古今，写出时间绵长；第三句登楼眺望，写出空间辽阔。在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人。然而，从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线(一维空间)。陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下。这样的意境，是数学家和文学家可以彼此相通的。进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接。

语文和数学之间，并没有不可逾越的鸿沟。

五. 关于对称

数学中有对称，诗词中讲对仗。乍看上去两者似乎风马牛不相及，其实它们在理念上具有鲜明的共性：在变化中保持着不变性质。

数学中说两个图形是轴对称的，是指将一个图形沿着某一条直线（称为）对称轴折叠过去，能够和另一个图形重合。这就是说，一个图形"变换"到对称轴另外一边，但是图形的形状没有变。

这种"变中不变"的思想，在对仗中也反映出来了。例如，让我们看唐朝王维的两句诗：

"明月松间照，清泉石上流"

诗的上句"变换"到下句，内容从描写月亮到描写泉水，确实有变化。但是，这一变化中有许多是不变的，

"明"——"清"（都是形容词）
"月"——"泉"（都是自然景物，名词）
"松"——"石"（也是自然景物，名词）
"间"——"上"（都是介词）

松下问童子（亚明绘）

“照”——“流”（都是动词）。

对仗之美在于它的不变性。假如上联的词语变到下联，含义、词性、格律全都变了，就成了白开水，还有什么味道？

数学上的对称本来只是几何学研究的对象，后来数学家又把它拓广到代数中。例如，二次式 x^2+y^2，当把 x 变换为 y，y 变换为 x 后，原来的式子就成了 y^2+x^2，结果仍旧等于 x^2+y^2，没有变化。由于这个代数式经过 x 与 y 变换后形式上与先前完全一样，所以把它称为对称的二次式。进一步说，对称可以用“群”来表示，各色各样的对称群成为描述大自然的数学工具。

世间万物都在变化之中，但只单说事物在“变”，不说明什么问题。科学的任务是要找出“变化中不变的规律”。一个民族必须与时俱进，不断创新，但是民族的传统精华不能变。京剧需要改革，可是京剧的灵魂不能变。古典诗词的内容千变万化，但是基本的格律不变。自然科学中，物理学有能量守恒、动量守恒；化学反应中有方程式的平衡，分子量的总值不能变。总之，惟有找出变化中的不变性，才有科学的、美学的价值。

六．关于“存在性”

数学上有很多纯粹存在性的定理，都十分重要。例如：

- 抽屉原理。N 只苹果放在 M 格抽屉里（N>M），那么至少有一个抽屉里多于一个苹果。这一原理肯定了这样抽屉的存在性，却不能判断究竟是哪一格抽屉里有多于一个的苹果。
- 代数基本定理。任何 n 阶代数方程，在复数域内必定有 n 个根。这一著名的定理，只说一定有 n 个根，却没有说，怎样才能找到这 n 个根。
- 连续函数的介值性定理。在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，如果有 $f(a) > 0$，$f(b) < 0$，则必定在区间内存在一点 c，使得 $f(c) = 0$。同样，这个定理只保证函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 有一个根 c 的存在性，却没有指出如何才能找到这个 c。
- 微分中值定理。设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且处处有导数，那么必定在 $[a, b]$ 中存在一点 ξ，使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$。这也是典型的纯粹存在性定理，即微分中值定理中的 ξ 只是肯定存在于 a,b 之间，但不确切知道在那一点。

在人文意境上，存在性定理最美丽动人的描述，应属贾岛的诗句：

松下问童子，
言师采药去；
只在此山中，
云深不知处。

贾岛并非数学家，但是细细品味，觉得其诗的意境，简直是为数学而作。

七．关于局部

古希腊哲学家芝诺和他的学生有以下的对话：

“一支射出的箭是动的还是不动的？”
“那还用说，当然是动的。”

宋代大词人苏轼（范曾绘）

“那么，在这一瞬间里，这支箭是动的，还是不动的？”
“不动的，老师。”
“这一瞬间是不动的，那么在其他瞬间呢？”
“也是不动的，老师。”
“所以，射出去的箭是不动的。”

确实，孤立地仅就一个时刻而言，物体没有动。但是物体运动有其前因后果，即物体运动是由前后位置的比较反映出来的，有比较才会产生速度。

仔细琢磨一下微积分的核心思想之一，在于考察一点的局部。研究曲线上一点的切线，只考虑该点本身不行，必须考察该点附近的每一点，这就是局部的思想。

常言道，“聚沙成塔，集腋成裘”，那是简单的堆砌。古语说“近朱者赤，近墨者黑”，是说要注意周围的环境。众所周知，要考察一个人，要问他 / 她的身世、家庭、社会关系，孤立地考察一个人是不行的。

微积分学就是突破了初等数学“就事论事”、孤立地考察一点、不及周围的静态思考，转而用动态地考察“局部”的思考方法，终于创造了科学的黄金时代。

考察局部，何止于微积分？人生处处是局部和整体的统一。

八. 关于黎曼积分和勒贝格积分

苏轼《题西林壁》诗云

横看成岭侧成峰，
远近高低各不同。
不识庐山真面目，
只缘身在此山中。

将前两句比喻黎曼积分和勒贝格积分的关系，相当有趣。苏轼诗意是：同是一座庐山，横看和侧看各不相同。勒贝格则说，比如数一堆叠好了的硬币，你可以一叠叠地竖着数，也可以一层层横着数，同是这些硬币，计算的思想方法却差异很大。

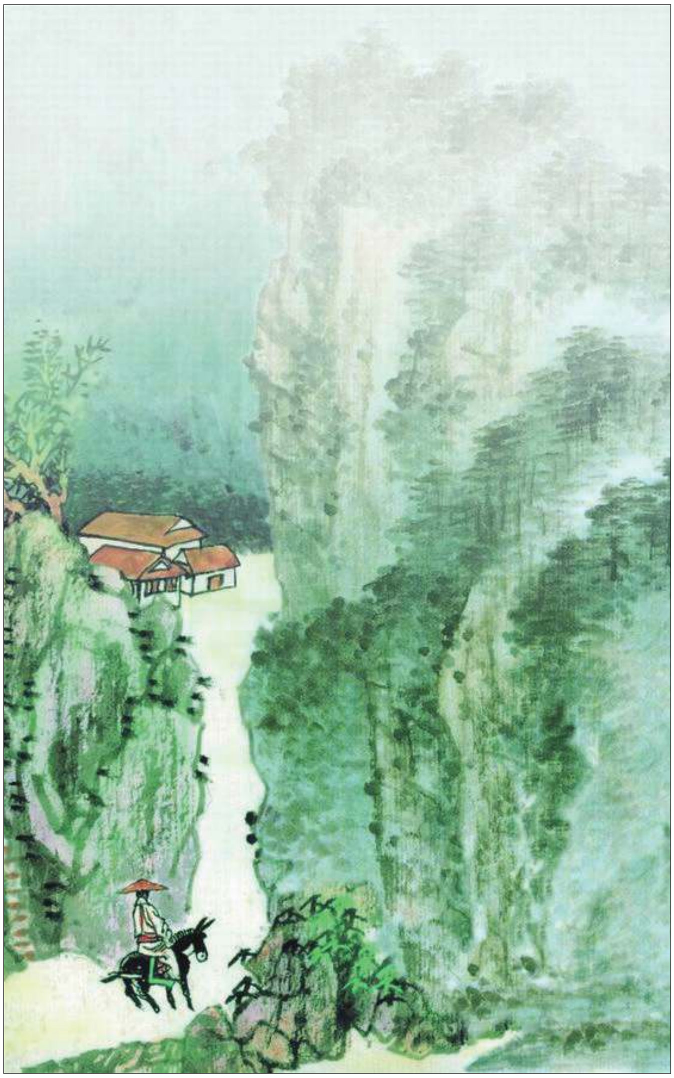
从数学上看，同是函数 $y=f(x)$ 形成的曲边梯形面积 M，也是横看和侧看不相同。实际上，如果分割函数 $y=f(x)$ 的定义域 $[a,b]$，然后作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 用以近似 M，那是黎曼积分的思想，而分割值域 $[c,d]$ 作和 $\sum_{i=1}^{n} y_i m(x, y_{i-1} \le f(x) \le y_i)$ 近似表示 M，则是勒贝格积分的思想（这里的 m 是勒贝格测度）。

横看和侧看，数学意境和人文意境竟可以相隔时空得到共鸣，发人深思。

九. 关于“反证法”

数学上常用反证法。你要驳倒一个论点，你只要将此论点“假定”为正确，然后据此推出明显错误的结论，就可以推翻原论点。苏轼的一首《琴诗》就是这样作的：

若言琴上有琴声，放在匣中何不鸣？
若言声在指头上，何不于君指上听？



数学问题的解决是一个曲折和艰难的过程。圆满地解决往往使人有豁然开朗的感觉。

意思是，如果“琴上有琴声”是正确的，那么放在匣中应该“鸣”。现在既然不鸣，那么原来的假设“琴上有琴声”就是错的。

同样，你要证明一个论点是正确的，那么只要证明它的否命题错误即可。就苏轼的诗而言，如果要论述“声不在指头上”是正确的，那么先假定其否命题：“声在指头上”是正确的，即在指头上应该有声音。现在，事实证明你在指头上听不见（因而不在指头上听），发生矛盾。所以原命题“声音不在指头上”是正确的。

由此可见，人文的论辩和数学的证明，都需要遵循逻辑规则。

十. 关于解题

数学研究和学习需要解题，而解题过程需要反复思索，终于在某一时刻出现顿悟。例如，做一道几何题，百思不得其解，突然添了一条辅助线，问题豁然开朗，欣喜万分。这样的意境，正如王国维在《人间词话》中所说：古今之成大事业、大学问者，必经过三种之境界：

- ‘昨夜西风凋碧树。独上高楼，望尽天涯路’。此第一境也。
- ‘衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。’此第二境也。
- ‘众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处’。此第三境也。

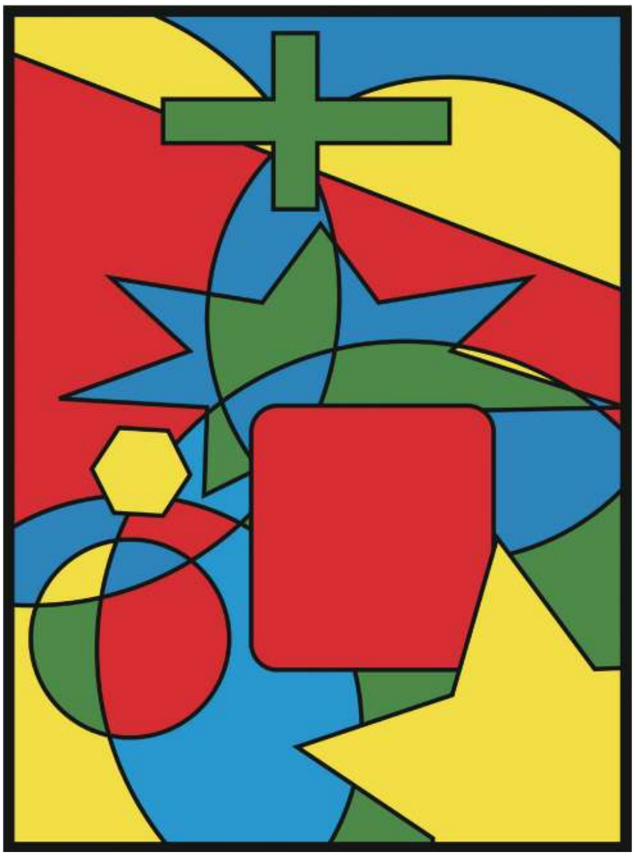
学习数学和做事业、研究学问一样，都需要经历这样的境界。一个学生，如果没有经历过这样的意境，数学大概是学不好的了。

作者介绍：

张奠宙，1956 年毕业于华东师范大学数学系，1986 年起担任华东师范大学数学系教授。1995 年至 1998 年担任国际数学教育委员会执行委员。他是著名的数学史研究专家，曾出版《20 世纪数学经纬》等著作。

机器的光荣与人的梦想

木遥



四色定理的一个简单示范；它的计算机证明 1976 年被给出。

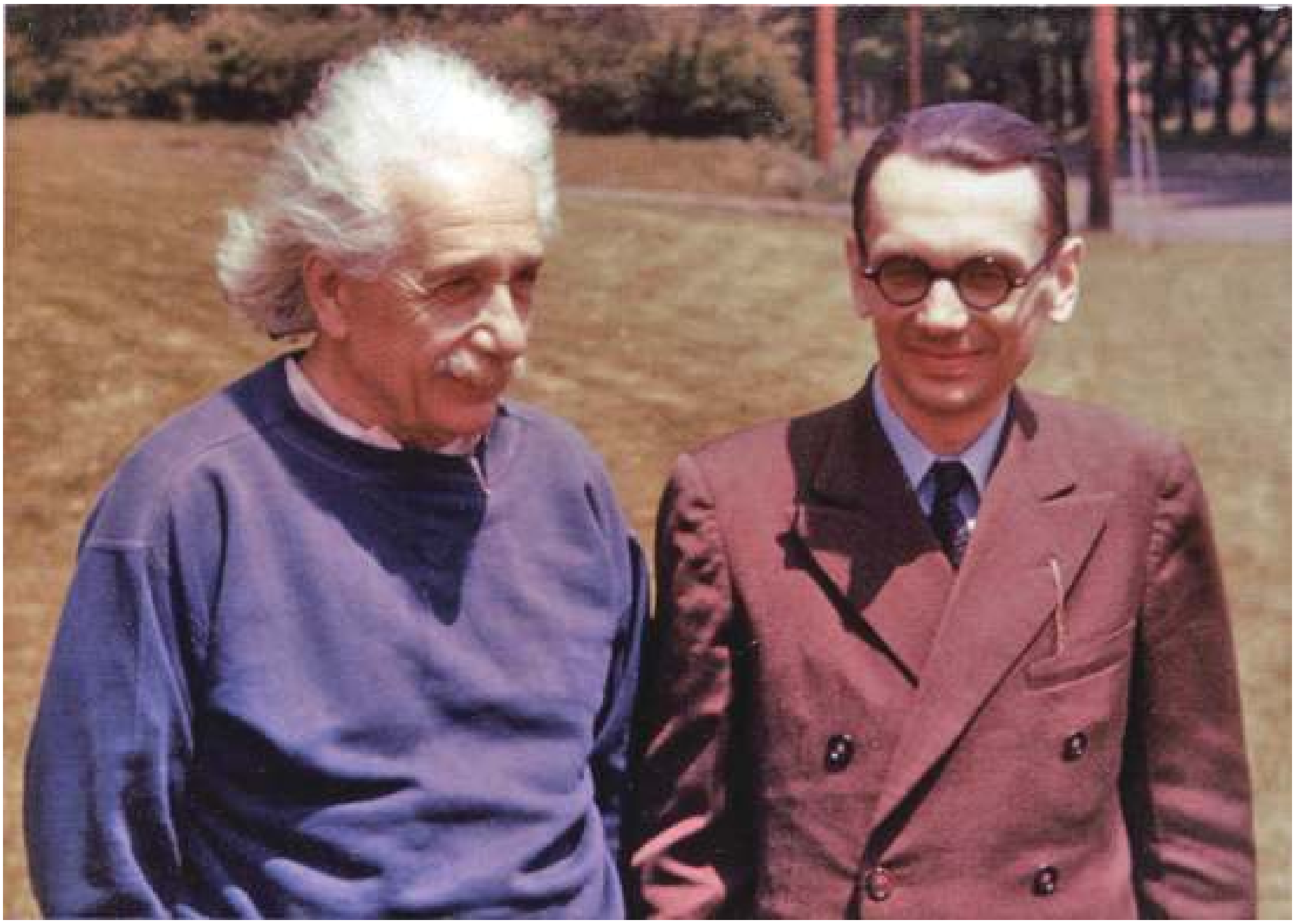
Offord 教授和我最近发现我们在《数学年鉴》中的论文存在一个蹊跷的错误。一个公式中的加号被写成了一个乘号，而后面那个命题的证明则是依赖于这个错误的公式的，因而也是无法成立的。不过，聊以自慰的是，我们最终能够确定那篇论文总的结论其实还是正确的。

——《Littlewood 文集》

如果回忆一下中学数学的两门分支课程——代数和几何，就能清楚地看到，在数学的两种最基本的推演过程——计算和证明——之间一直存在着一种巨大的差别。在初等代数问题里，一个问题的求解（例如解一个方程或者计算一个多项式乘法）是可以通过规范化的步骤顺序实现的，这使得这门课程本质上同一门按照操作手册动手的劳技课并无不同。然而，几何定理（哪怕是最基本的初中平面几何）的证明却不然，发现一个证明的过程中一定存在着那样一些“灵光一闪”的时刻，它们可遇而不可求，使得几何这门课程几乎成为本质上“不可学”的一门课程。我们都曾经面对过无从下手的证明题目而摇头叹息过，也都在阅读一个自己想不出来的证明过程时体会过那种羚羊挂角无迹可循的美感。纵然掌握了再多的定理和证明技巧，在脑海中发现完整的逻辑道路的过程仍然是一个自发而偶然的事件，反映了人类思维的某些最难于用语言刻画的能力。从某种程度上说来，这正是数学这门学科的神秘感的终极来源。

也正因为如此，计算——无论多么繁琐——本质上都是可以由机械实现的，在今天更是借助电脑的辅助成为一种相对平凡的任务。而证明才被认为是数学本质的困难所在，是人类智慧的高度结晶。阅读并验证一个证明是否正确（或者哪怕仅仅是理解它在说什么）是一项辛苦而困难的任务，只有受过训练的数学家才能够得以完成。并且，和物理、化学、生物等牵涉到真实世界的学科不同，数学定理是不能被实验所证明的，而数学家的阅读就成为本质上唯一可行的验证手段。这其实也正是今天数学界的真实运作方式：一个人写出一篇文章来宣称证明了一个定理，他的某些同行们会在特定的审议机制下阅读这篇文章并且宣布是否接受其论证。如果大家都认为证明无误，这个定理就被接纳为数学的一部分而存在下来。

这一流程的有效性已经为数学科学的茁壮生命力所证明，然而，任何人也都能看出这个过程中蕴含的极大风险：我们究竟在什么意义上能够宣称一个定理真的是正确的？其作者可能犯错，审阅者也可能犯错，我们都知道数学证明中的微小错误有时候是多么难于发现，而这些错误也许永远都不会有人知道。当然，这并不是说数学这门学问完全是空

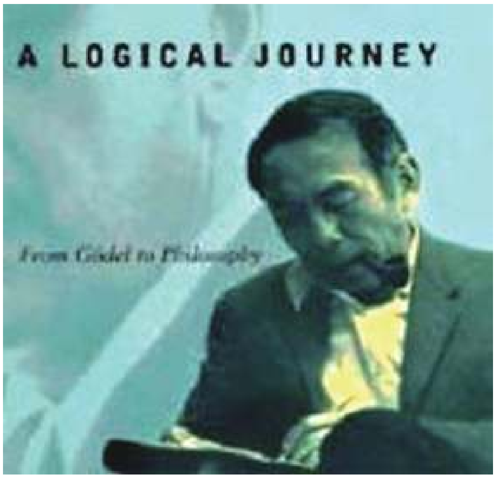


数理逻辑学的巨人哥德尔和爱因斯坦在一起

中楼阁：越是重要的定理，其阅读者也就越多，出错的概率也就越是无限趋近于零。我们不能想象一个从阿基米德时代就流传至今，被无数学生学习过的四五行的证明还会存在逻辑错误。但是即便如此，只要翻开数学史，我们还是能看到大量重要的错误由于极其偶然的原因才在事隔多年之后被人们发现的例子。

到了现代，这个问题更是严重得多，数学的复杂程度和专业化程度已经使得任何一个分支的专业人员数量同证明的普遍难度完全不成正比。这种矛盾在某些极端的例子里尖锐到了荒谬的程度：图论中的 Robertson–Seymour 定理的证明一共耗费了大约五百页的篇幅，Almgren 对几何测度论中一个定理的证明总长为 1728 页，而代数中著名的有限单群定理（确切来说这不是一个定理而是一组定理）的证明总共包含超过五百篇论文，总页数估计在一万页以上。世界上恐怕不存在任何一个人真地把这个证明从头读到尾过，遑论验证其正确性了。有限单群方面的专家之一 Aschbacher 曾经不无自嘲的说过：“一方面，当证明长度增加时，错误的概率也增加了。在有限单群分类定理的证明中出现错误的概率实际上是 1。但是另一方面，任何单个错误不能被容易地改正的概率是 0。随着时间的推移，我们将会有机会推敲证明，从而对它的信任度也必定会增加的。”

我们也希望如此，但是以严谨而著称的数学体系是以这样远远难于称为严谨的方式被建立，终究构成某种吊诡而令人心生疑虑的现实。不仅如此，这一体系在某些情况下还会完全失效，一个著名的例子是四色定理在 1976 年的证明。Appel 和 Haken 在那个证明中把所有的地图用通常的逻辑推演的方式化归为 1936 种类型，然后——这是充满争议性的一步——编写了一个电脑程序逐个验证这些类型都满足四色定理的结论，从而完成了整个证明。一个立即存在的问题是：就算前面的逻辑部分是正确的，谁能证明后面的电脑程序中没有错误？难道数学家们应当逐行阅读代码以理解其正确性么？（写过程序的人一定晓得，阅读程序代码是比阅读一个通常的逻辑证明还要痛苦的经验。）另一个时间上稍近的例子是 Hales 对开普勒堆球定理的证明。这一证明包含



著名华人数理逻辑专家王浩教授

了三百页的文本部分和四千行的代码部分，投稿至数学界最重要的杂志《数学年鉴》，杂志的编辑最终接受了这篇论文，但是指出：

“在我的经验里，还没有一篇论文曾经得到过这样的审查。审读人专门建立了一个讨论班研究这篇文章，他们检查了证明中大量的论述并且确认其正确性，这种检查常常需要耗时数个星期。……总的说来，他们并不能确认证明本身总体的正确性，而且估计永远无法做到这一点，因为他们在到达终点之前精力就耗尽了。”

至于代码部分，估计并没有被任何人认真地审阅过。

于是在一部分数学家那里，另一种可能性开始渐渐浮上水面。既然一般来说数学定理的证明及其审查是如此困难和繁琐的一件事，我们有没有可能从根本上把它转化成电脑能够承担的任务呢，就像我们已经成功地让电脑代替人类实现的大多数繁琐劳动一样？注意，这种电脑的参与并不是像上面的例子里那样仅仅负责某些验证性的工作，而是从最底层介入逻辑推演的部分，从而严格的建立整个证明过程。这种思路，一般被称为形式证明（Formal Proof），有时也称为机器证明。

两个哲学家之间的争论并不比两个会计师之间的争论更复杂，他们只需要掏出纸笔，然后对彼此说：让我们来算一算吧。

——《莱布尼茨通信》，1666

用计算的方式进行逻辑推演并不是什么新鲜想法，事实上，这是人类极为古老的梦想之一，它可以上溯到笛卡儿和莱布尼茨乃至霍布斯，甚至也许更早。霍布斯有名言曰：“推理就是计算”，不过考虑到他的数学（特别是几何）程度之糟糕，人们一向怀疑他根本不知道自己到底想说什么。莱布尼茨的观念则要清晰的多，在他看来，只要能够把一切逻辑论断用统一的语言确切地表达出来，并且采用严密的规则进行逻辑推演，那么世间的所有道理都是可以被严格推导出来的。

让我们抛开其间的哲学意涵不谈（莱布尼茨的梦想事实上已经涵盖了人类理性的全部领域），单就数学层面而言，这一框架听起来并不算特别不靠谱。从欧几里德开始，数学家们就开始着手把全部数学定理建立在公理体系之上，于是从理论上来说，任何一个数学定理的证明，确实是可以用纯粹的逻辑语言“算”出来的。这里的计算当然不是说加减乘除这样的四则运算，而是形式逻辑的基本运算，例如命题 A 为真推出命题 B 为假，诸如此类。这种运算也有其特定的“运算法则”，也就是我们平时所默认的那些形式逻辑的法则，以此为基础，一个推导就是在这些法则下的一次“计算”，而一个复杂的证明只不过是一道复杂的“计算题”而已。

事实上，经过二十世纪初那一场著名的数学革命以及随后的 ZFC 公理体系（这是今天数学界普遍承认的公理体系）的建立，这种把全部数学建立在逻辑演算之上的想法实际上并不存在理论上的障碍。实际困难在于，从人们熟悉的“人脑证明”到这种完全依赖于逻辑算符的“形式证明”之间，存在一个复杂度上的巨大鸿沟。我们在脑海中所进行的逻辑推导其实大量的依赖于人类特有的直觉想象和经验，如果要把每一环逻辑链条都清清楚楚地写下来，每一次推理都追溯到公理体系那里去，任何一个简单的证明都会变得繁琐到超乎想象的程度。我们喜欢严格性，但是这样做的代价也太大了。

然而电脑的发明改变了一切。众所周知，电脑最擅长于做的就是这种严格而繁琐的工作。把基本公理告诉电脑，把推理法则教给电脑，不就万事大吉了么？

差不多了，只剩下最后一步——非常微妙的一步。在上面的叙述里，一切传统的人脑证明都可以转化为逻辑算符的“计算”，这是对的，但是其前提是这种传统证明已经存在了，所需要的只是恰当的翻译过程而已。如何发现一个未知的证明则是一个完全崭新的挑战。我们对于人脑是如何想出一个证明的过程都不甚了了，又如何能教给电脑去自己发现一个证明？

于是人们采用了一种实用主义的策略。一方面，把人们已经知道的证明翻译给电脑，这同时也构成了对这些证明逻辑严密性的一次确认。——虽然这件事情听起来很简单，但操作起来仍然很困难。另一方面，小心翼翼的探索让电脑尝试着去自动“发现”一个证明，哪怕只是很简单的证明而已。

让我们看看半个世纪以来人们已经让电脑做到了哪些

事情：

• 1954 年，Davis 成功地让电脑证明了定理：偶数加偶数仍然等于偶数。

• 1959 年，王浩让电脑证明了罗素和怀特海的名著《数学原理》中的所有谓词逻辑定理。

• 1968 年，de Bruijn 用电脑给出了 Landau 为其女儿所写的一本关于实数的入门小册子中的全部数学定理的证明。

• 1976 年，Lenat 让电脑自发的开始探索数学世界，他的电脑从基本公理开始，自己发现了自然数、加法、乘法、素数这些词的意思，甚至还发现了算术基本定理。

• 1984 年，吴文俊发表《几何定理机器证明的基本原理》，用电脑证明了一系列平面几何中的著名定理。

• 1996 年，McCune 设法让电脑“自动”证明了布尔代数理论中的 Robbins 猜想。这里“自动”的意思是，把这个猜想输入电脑，回车之后，电脑花了八天时间给出了这个猜想的证明而没有借助人类的任何帮助。

• 2005 年，Gonthier 建立了四色定理的全部电脑化证明。这一证明和 1976 年那个证明虽然都用到了电脑，但是其意义却根本不同。1976 年的证明本质上仍然是传统证明，电脑只是起到了辅助计算的作用，而 Gonthier 的证明则是纯粹的形式证明，其每一步逻辑推导都是由电脑完成的。

到今天为止，人们已经用电脑证明了上百条重要的数学定理，甚至还曾经用电脑发现过一些猜想（这些猜想的命名恐怕会成为一个问题）。这一切还当然仅仅是个开始，人们还不曾让电脑做出过任何真正意义上的数学贡献，几乎所有被电脑证明的都是人类已经知道的事情，而且大多数都是很初等的结论。指望电脑帮我们证明哥德巴赫猜想的那一天还远远没有到来。

但是另一方面，任何人估计都可以看出来这条道路的远大前景。和人类相比，电脑不知疲倦和逻辑严密的优点使得其前途未可限量。电脑当然也会犯错误，但是这种错误归根结底是容易检验的——其正确性归结为这些软件内核的正确性，而内核一共也就几百行代码而已（这一点要归功于数学公理体系的简洁和精致）。一代一代数学家永远都要从零开始学习和成长，而电脑则总是建立在已有成果的肩膀上（也许应当说机箱上？），假以时日，电脑会不会成为有史以来最伟大的数学家呢？

一个好的数学证明应当像是一首诗，而这纯粹是一本电话簿！

——对 1976 年四色定理证明的一则著名评论

这条道路从第一天开始就伴随着巨大的争议和疑虑。

数学证明，正如我们在前面所提到的那样，是人类理性最光荣的成果之一。蕴藏在美丽深刻的数学定理背后的那些苦心孤诣的劳动和成功之后宛若天成的光辉，吸引了一代又一代伟大的头脑投身其中。匈牙利数学家 Erdős 曾经发明过一个术语：the Book，用以描述他心目中由上帝所拥有的那本书，在那里记载了全部美妙和精致的数学定理的证明。他曾经说过：“你可以不信仰上帝，但是你应该信仰那本书的存在。”大多数数学家是信仰的，而他们也衷心的希望自己所建立的定理和证明会出现在那本书里。

如果这些定理最终都只不过是被一些代码算出来的，这种美还有什么意义？

2007 年，美国数学会通讯杂志采访了刚获得菲尔兹奖不久的陶哲轩，问题中包含了关

吴文俊《数学机械化》专著

于形式证明的看法。陶哲轩的回答可以在很大程度上代表一般数学家对这个问题的意见：

对一个证明来说非常重要的一点在于，它应当能够被任何人清晰的理解。在这一前提下，在一个令人满意的数学证明中，计算机的作用最好只限于确认一些显而易见的事实，比如某个方程的某个孤立解或者某个宽泛条件下参数的存在性，而不是用来证明一些从人类的思维过程中闪现出来的本质上非同寻常的结论。如果计算机证明的论断在人类看来是完全直观的，那用电脑来确认一下这些结论的逻辑严密性当然没什么不好，但是基于人的阅读和理解的证明过程总是必要的。

温家宝总理看望中国机器证明的创始人吴文俊等科学家

于是这构成了某种颇为讽刺性的局面。计算机一般被认为是数学家最引以为傲的发明之一，然而当它转过头来开始侵蚀数学家的传统领地时，数学家们的首要反应便是捍卫自己的尊严。一个由计算机生成的证明在广义上来说当然也是人类智慧的产物，可是如果有朝一日，困扰人类几百年的某个著名猜想被计算机所证明，则数学家们情何以堪？

人们对形式证明的批评多半集中于它极端的繁琐和不直观。然而，既然人们已经知道如何把一个传统证明翻译为形式证明，那么把一个计算机生成的形式证明翻译回人们可以直接阅读和理解的直观证明在理论上说来也并非全然不可能。从这一点上说，形式证明和传统证明之间的鸿沟并非是不可逾越的，尽管还有很长的路要走。我们可以设想，在未来的某一天，这两种证明之间的界面变得极其友好，于是任何一个数学家都会把形式证明作为日常数学工具加以掌握，任何一本数学杂志都会要求提交的证明必须是经过计算机验证的……

而对于电脑来说真正的挑战，仍然体现在对未知证明的寻找上。如何让电脑学会迅速发现合适的证明路径，这是这一领域里最困难也最迷人的问题之一。毕竟，即便是数学家们自己往往也说不清楚那些片羽飞鸿般的灵感是怎样产生又怎样被自己捕捉到的，更不用说让电脑来模拟这一过程了。对于电脑“思考方式”的设计和研究，本身就是深刻的数学问题——从某种意义上说来，这一自我缠绕的局面不但没有构成对传统意义上的数学之美的消解，反而是它的延续。归根结底，这一领域的任何进展，都标志着人们对于“智慧思考”这一问题更深刻的理解，这已经足以令人骄傲了，不是么？

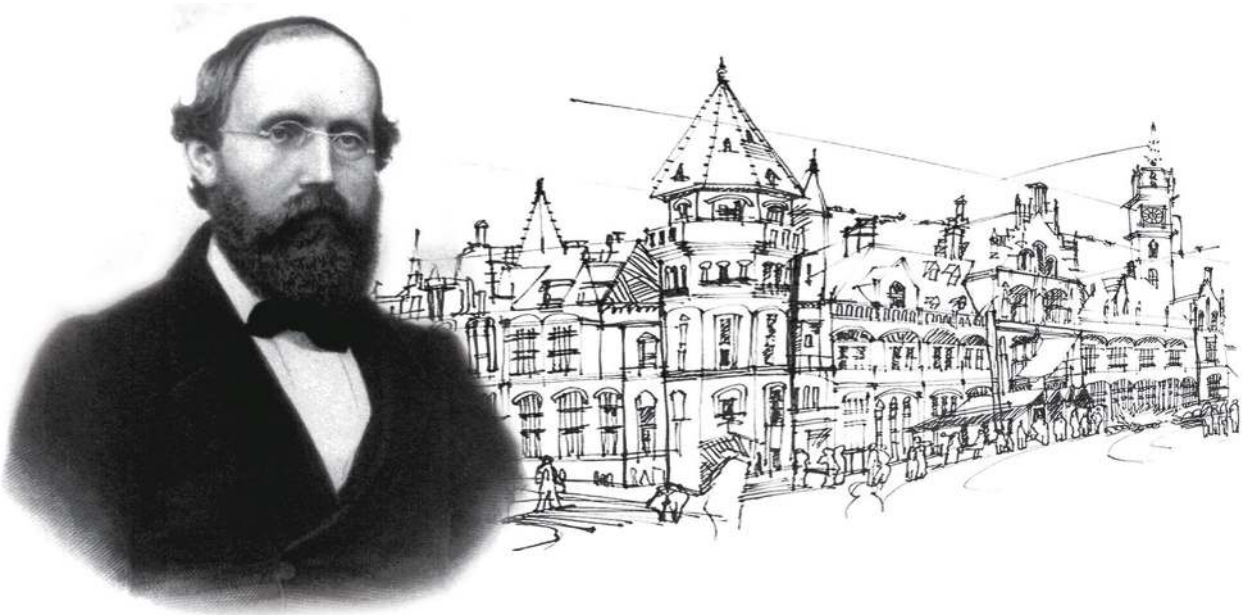
不过还是让我们暂时抛开这些遥远的设想不谈，回到形式证明的初衷之一上来：为人类已有的证明建立可靠的逻辑基础。在这一领域里活跃的若干研究小组的通力合作，已经让一个宏伟的工程颇具雏形，在这个工程里，人们试图建立一个庞大的由电脑维护的“定理库”，其中包含了人类所了解的全部数学知识，而它们的正确性完全为电脑所确认。人们所建立过的所有证明都被翻译成电脑可以理解的形式而加以保存，而人们也可以轻易的从这里查询任何已知的数学问题的答案。——同让计算机彻底取代数学家去探索未知世界相比，这一 wiki 式的设想无疑具有更高的可操作性。这一工程被称为 Q.E.D.，任何一个数学家都明白这三个字母的含义：这是拉丁文的缩写，意为“证毕”。

你可以说这是巴别塔般的梦想，也可以说这是潘多拉的盒子，你也可以像大多数数学家一样投去怀疑甚至不屑一顾的目光。但是你不能无视它的存在，因为道路已经打开，纵然迷雾重重，但是没有理由不继续走下去。

证毕。

（想象一下计算机说出这两个字的感觉……）

Riemann



黎曼猜想漫谈(一)

卢昌海

1 引言

让我们从一则小故事开始我们的黎曼(Riemann)猜想之旅吧。故事大约发生在八十年前，当时英国有一位很著名的数学家叫做哈代(Godfrey Hardy，1877-1947)，在我看来他是两百年来英国数学界的一位勇者。为什么说他是勇者呢？因为在十七世纪的时候，英国数学家与欧洲大陆的数学家之间发生了一场激烈的论战。论战的主题是谁先发明了微积分。论战所涉及的核心人物一边是英国的科学泰斗牛顿(Isaac Newton，1642-1727)，另一边是欧洲大陆德国的哲学家及数学家莱布尼兹(Gottfried Leibniz，1646-1716)。这一场论战打下来，两边筋疲力尽自不待言，还大伤了和气，留下了旷日持久的后遗症。自那以后，英国的许多数学家开始排斥起来自欧洲大陆的数学进展。一场争论演变到这样的一个地步，英国数学界的集体荣誉及尊严、牛顿的赫赫威名便都成了负资产，英国的数学在保守的舞步中走起了下坡路。

这下坡路一走便是两百年。

在这样的一个背景下，在复数理论还被一些英国数学家视为来自欧洲大陆的危险概念的时候，土生土长的英国数学家哈代却对来自欧洲大陆(而且偏偏还是德国)、有着复变函数色彩的数学猜想——黎曼猜想——产生了浓厚的兴趣，积极地研究它，并且——如我们将在后文中介绍的——取得了令欧洲大陆数学界为之震动的成就，算得上是勇者所为。

当时哈代在丹麦有一位很要好的数学家朋友

叫做哈拉尔德•玻尔（Harald August Bohr，1887-1951），他是著名量子物理学家尼尔斯•玻尔（Niels Bohr，1885-1962）的弟弟。小玻尔对黎曼猜想也有浓厚的兴趣，曾与德国数学家艾德蒙•朗道（Edmund Landau，1877-1938）一起研究黎曼猜想（他们的研究成果也将在后文中加以介绍）。哈代很喜欢与玻尔共度暑假，一起讨论黎曼猜想。他常常要待到假期将尽才匆匆赶回英国。结果有一次当他赶到码头时，发现只剩下一条小船可以乘坐了。没办法，他只得硬着头皮登上。在汪洋大海中乘坐小船可不是闹着玩的事情，弄得好算是浪漫刺激，弄不好就得葬身鱼腹。信奉上帝的乘客们此时都忙着祈求上帝的保佑。哈代却是一个坚决不信上帝的人，不仅不信，有一年他还把向大众证明上帝不存在列入自己的年度六大心愿之中，且排名第三（排名第一的是证明黎曼猜想）。不过在这生死攸关的时候哈代也没闲着，他给玻尔发去了一封简短的明信片，上面只有一句话：

“我已经证明了黎曼猜想！”

哈代果真已经证明了黎曼猜想吗？当然不是。那他为什么要发这么一个明信片呢？回到英国后他向波尔解释了原因，他说如果那次他乘坐的小船真的沉没了，那人们就只好相信他真的证明了黎曼猜想。但他知道上帝是肯定不会把这么巨大的荣誉送给他——一个坚决不信上帝的人的，因此上帝一定不会让他的小船沉没的。哈代的这个解释让我想起了一句有趣的无神论者的祈祷语：God, if there is one, save my soul if I have one（上帝啊，如果你存在的话，拯救我的灵魂吧，如果我有灵魂的话）。

上帝果然没舍得让哈代的小船沉没。自那以后又过了八十来个年头，吝啬的上帝依然没有物色到一个可以承受这么大荣誉的人。

2 黎曼 ζ 函数与黎曼猜想

那么这个让上帝如此吝啬的黎曼猜想究竟是一个什么样的猜想呢？在回答这个问题之前我们先得介绍一个函数：黎曼 ζ 函数。这个函数虽然挂着黎曼的大名，其实并不是黎曼首先提出的。但黎曼虽然不是这一函数的提出者，他的工作却大大加深了人们对这一函数的理解，为其在数学与物理上的广泛应用奠定了基础。后人为了纪念黎曼的卓越贡献，就用他的名字命名了这一函数。

远在黎曼之前，黎曼 ζ 函数（当然那时还不叫这个名字）的级数表达式就已经出现在了数学文献中，但是那些表达式中函数的定义域较小。黎曼把黎曼 ζ 函数的定义域大大地延拓了，这一点对于黎曼猜想的表述及研究具有重要的意义。仅凭这一点，即便把黎曼称为黎曼 ζ 函数的提出者之一，也并不过份。

那么究竟什么是黎曼 ζ 函数呢？黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 是级数表达式（n 为正整数）

$$\zeta(s)=\sum_n n^{-s} \qquad (\mathrm{Re}(s)>1)$$

在复平面上的解析延拓。之所以要对这一表达式进行解析延拓，是因为——如我们已经注明的——这一表达式只适用于复平面上 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的区域（否则级数不收敛）。黎曼找到了这一表达式的解析延拓（当然黎曼没有使用“解析延拓”这样的现代复变函数论术语）。运用路径积分，解析延拓后的黎曼 ζ 函数可以表示为：

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z}\text{。}$$

这里我们采用的是历史文献中的记号，式中的积分实际是一个环绕正实轴（即从 $+\infty$ 出发，沿实轴上方积分至原点附近，环绕原点积分至实轴下方，再沿实轴下方积分至 $+\infty$——离实轴的距离及环绕原点的半径均趋于 0）进行的围道积分；式中的 Γ 函数 Γ(s) 是阶乘函数在复平面上的推广，对于正整数 $s>1$：$\Gamma(s)=(s-1)!$。可以证明，这一积分表达式除了在 $s=1$ 处有一个简单极点外在整个复平面上解析。这就是黎曼 ζ 函数的完整定义。

运用上面的积分表达式可以证明，黎曼 ζ 函数满足以下代数关系式：

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)\text{。}$$

从这个关系式中不难发现，黎曼 ζ 函数在 $s=-2n$（n 为正整数）取值为零——因为 $\sin(\pi s/2)$ 为零。复平面上的这种使黎曼 ζ 函数取值为零的点被称为黎曼 ζ 函数的零点。因此 $s=-2n$（n 为正整数）是黎曼

Riemann

ζ 函数的零点。这些零点分布有序、性质简单，被称为黎曼ζ函数的平凡零点（trivial zeros）。除了这些平凡零点外，黎曼ζ函数还有许多其它零点，它们的性质远比那些平凡零点来得复杂，被称为非平凡零点（non-trivial zeros）。对黎曼ζ函数非平凡零点的研究构成了现代数学中最艰深的课题之一。我们所要讨论的黎曼猜想就是一个关于这些非平凡零点的猜想，在这里我们先把它的内容表述一下，然后再叙述它的来龙去脉：

黎曼猜想：黎曼ζ函数的所有非平凡零点都位于复平面上 Re(s)=1/2 的直线上。

在黎曼猜想的研究中，数学家们把复平面上 Re(s)=1/2 的直线称为临界直线（critical line）。运用这一术语，黎曼猜想也可以表述为：黎曼ζ函数的所有非平凡零点都位于临界直线上。

这就是黎曼猜想的内容，它是黎曼在 1859 年提出的。从其表述上看，黎曼猜想似乎是一个纯粹的复变函数命题，但我们很快将会看到，它其实却是一曲有关素数分布的神秘乐章。

3 素数的分布

一个复数域上的函数——黎曼ζ函数——的非平凡零点（在无歧义的情况下我们有时将简称其为零点）的分布怎么会与风马牛不相及的自然数集中的素数分布产生关联呢？这还得从欧拉乘积公式谈起。

我们知道，早在古希腊时期，欧几里得就用精彩的反证法证明了素数有无穷多个。随着数论研究的深入，人们很自然地对这些素数在自然数集上的分布产生了越来越浓厚的兴趣。1737 年，著名数学家欧拉（Leonhard Euler，1707-1783）在圣彼得堡科学院发表了一个极为重要的公式，为数学家们研究素数分布的规律奠定了基础。这个公式就是欧拉乘积公式：

$$\sum_n n^{-s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1}。$$

公式中左边的求和对所有的自然数进行，右边的连乘积则对所有的素数进行。可以证明，这个公式对所有 Re(s)>1 的复数 s 都成立。这个公式的左边正



欧拉（下图）的乘积公式为黎曼（上左）的研究奠定了基础。希尔伯特（上右）被问到 500 年后如重返人间最想知道的是什么？他回答说是黎曼的问题解决了没有。

是我们在上文中介绍过的黎曼ζ函数，而右边则是一个纯粹有关素数（且包含所有素数）的表达式，这样的形式正是黎曼ζ函数与素数分布之间存在关联的征兆。那么这个公式究竟蕴涵着有关素数分布的什么样的信息呢？黎曼ζ函数的零点又是如何出现在这种关联之中的呢？这就是本节及未来几节所要介绍的内容。

欧拉本人率先对这个公式所蕴涵的信息进行了研究。他注意到在 s=1 的时候，公式的左边 $\Sigma_n n^{-1}$ 是一个发散级数（这是一个著名的发散级数，称为调和级数），这个级数以对数方式发散。这些对于欧拉来说都是不陌生的。为了处理公式右边的连乘积，他对公式两边同时取了对数，于是连乘积就变成了求和，由此他得到：

$$\ln\left(\sum_n n^{-1}\right) = -\sum_p \ln\left(1-p^{-1}\right)$$
$$= \sum_p \left(p^{-1} + \frac{1}{2}p^{-2} + \frac{1}{3}p^{-3} + \cdots\right)$$

由于上式右端括号中除第一项外所有其它各项的求和都收敛，而且这些求和的结果累加在一起仍然收敛（有兴趣的读者不妨自己证明一下）。因此右边只有第一项的求和是发散的。由此 Euler 得到了这样一个有趣的渐近表达式：

$$\sum_p p^{-1} \sim \ln\ln(\infty),$$

或者，更确切地说：

$$\sum_{p<N} p^{-1} \sim \ln\ln(N)。$$

这个结果，即 $\Sigma_p p^{-1}$ 以 $\ln\ln(N)$ 的方式发散，是继欧几里得证明素数有无穷多个以来有关素数的又一个重要的研究结果。它同时也是对素数有无穷多个这一命题的一种崭新的证明（因为假如素数只有有限多个，则求和就只有有限多项，不可能发散）。但欧拉的这一新证明所包含的内容要远远多于欧几里得的证明，因为它表明素数不仅有无穷多个，而且其分布要比许多同样也包含无穷多个元素的序列——比如 n^2 序列——密集得多（因为后者的倒数之和收敛）。不仅如此，如果我们进一步注意到上式的右端可以改写为一个积分表达式：

$$\ln\ln(N) \sim \int x^{-1}\ln^{-1}(x)\,dx。$$

而左端通过引进一个素数分布的密度函数 $\rho(x)$——

大数学家高斯 (1777-1855) 是最早研究素数分布的数学家之一

它给出在 x 附近单位区间内发现素数的概率——也可以改写为一个积分表达式：

$$\sum_{p<N} p^{-1} \sim \int x^{-1}\rho(x)\,dx。$$

将这两个积分表达式进行比较，不难猜测到素数的分布密度为 $\rho(x) \sim 1/\ln(x)$，从而在 x 以内的素数个数——通常用 $\pi(x)$ 表示——为：

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)。$$

其中 $\mathrm{Li}(x) \equiv \int \ln^{-1}(x)\,dx$ 是对数积分函数[注 3.1]。这正是著名的素数定理（当然这种粗略的推理并不构成对素数定理的证明）。因此欧拉发现的这个结果可以说是一扇通向素数定理的暗门。可惜欧拉本人并没有沿着这样的思路走，从而错过了这扇暗门，数学家们提出素数定理的时间也因此而延后了几十年。

提出素数定理的荣誉最终落到了另外两位数学家的肩上：他们是德国数学家高斯（Friedrich Gauss，1777-1855）和法国数学家勒让德（Adrien-Marie Legendre，1752-1833）。

高斯对素数分布的研究始于 1792 到 1793 年间，那时他才 15 岁。在那期间，每当“无所事事”的时候高斯就会挑上几个长度为一千的自然数区间，计算这些区间中的素数个数，并进行比较。在做过了大量的计算和比较后，高斯发现素数分布的密度可以近似地用对数函数的倒数来描述，即 $\rho(x) \sim 1/\ln(x)$，这正是上面提到的素数定理的主要内容。 但是高斯并没有发表这一结果。高斯是一位追求完美的数学家，他很少发表自己认为还不够完美的结果，而他的数学思想与灵感犹如浩瀚奔腾的江水，汹涌激荡，常常让他还没来得及将一个研究结果完美化就又展开了新课题的研究。因此高斯一生所做的数学研究远远多过他正式发表的。但另一

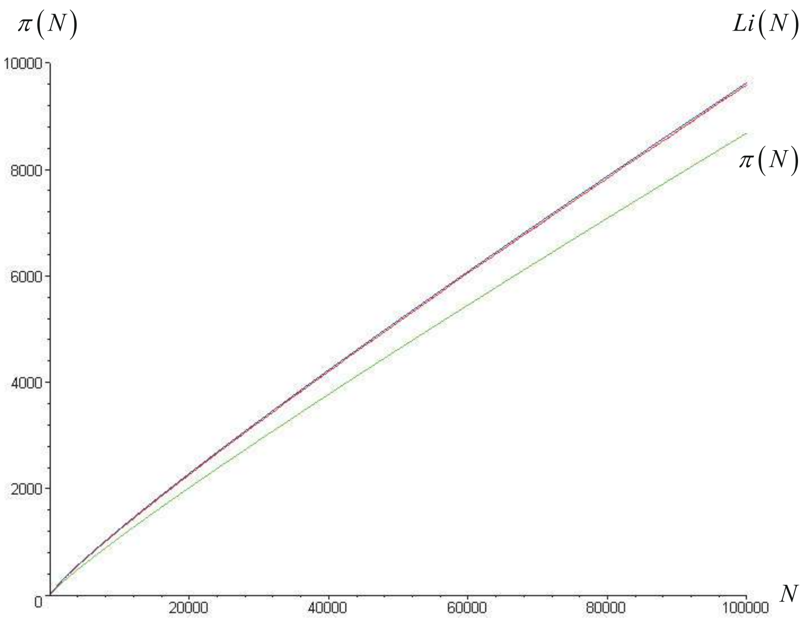
注 3.1

对数积分函数 $\mathrm{Li}(x)$ 的确切定义是 $1/\ln(x)$ 在 0 到 x 之间定积分的柯西主值。对于素数定理来说，人们关心的是 $\mathrm{Li}(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的渐近行为，这时候积分的下限并不重要，因此人们在素数定理的研究中有时把 $\mathrm{Li}(x)$ 的积分下限取为 2 而不是 0，这样可以使被积函数在积分区间内没有奇点。

Riemann

方面，高斯常常会通过其它的方式——比如书信——透露自己的某些未发表的研究成果，他的这一做法给一些与他同时代的数学家带来了不小的尴尬。其中“受灾”较重的一位便是勒让德。这位法国数学家在1806年率先发表了线性拟合中的最小平方法（即最小二乘法），不料高斯在1809出版的一部著作中提到自己曾在1794年（即比勒让德早了12年）就发现了同样的方法，使勒让德极为不快。

有道是：不是冤家不聚首。在素数定理的提出上，可怜的勒让德又一次不幸地与数学巨匠高斯撞到了一起。勒让德在1798年发表了自己关于素数分布的研究，这是数学史上有关素数定理最早的文献[注 3.2]。由于高斯没有发表自己的研究结果，勒让德便理所当然地成为了素数定理的提出者。勒让德的这个优先权一共维持了51年。但是到了1849年，高斯在给德国天文学家恩克（Johann Encke，1791-1865）的一封信中提到了自己在1792至1793年间对素数分布的研究，从而把尘封了半个世纪的优先权从勒让德的口袋中勾了出来，挂到了自己已经鼓鼓囊囊的腰包上。



素数分布与素数定理

幸运的是，高斯给恩克写信的时候勒让德已经去世十六年了，他用最无奈的方式避免了再次遭受残酷打击。

无论高斯还是勒让德，他们对于素数分布规律的研究都是以猜测的形式提出的（勒让德的研究带有一定的推理成份，但离证明仍然相距甚远）。因此确切地说，素数定理在那时只是一个猜想——素数猜想，我们所说的提出素数定理指的也只是提出素数猜想。素数定理的数学证明直到一个世纪之后的1896年，才由法国数学家雅克·阿达马（Jacques Hadamard，1865-1963）与比利时数学家普森（Charles de la Vallée-Poussin，1866-1962）彼此独立地给出。他们的证明与黎曼猜想有着很深的渊源，其中阿达马的证明出现的时机和场合还有着很大的戏剧性，这些我们将在后文中加以叙述。

素数定理是简洁而优美的，但它对于素数分布的描述仍然是比较粗略的，它给出的只是素数分布的一个渐近形式——也就是当 N 趋于无穷时的分布形式。从前面有关素数分布与素数定理的图示中我们也可以看到，$\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 之间是有偏差的，而且这种偏差的绝对值随着 x 的增加似有持续增加的趋势（所幸的是，这种偏差的增加与 $\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 本身的增加相比仍是微不足道的——否则素数定理也就不成立了）。从图上以及从更大范围的计算中人们发现 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ 总是大于零，这使得有人猜测 $\mathrm{Li}(x)$ 不仅是素数分布的渐近形式，而且还是其严格上界。这种猜测在1904年被英国数学家李特尔伍德（John Littlewood，1885-1977）所推翻。李特尔伍德证明了 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ 是一个在正与负之间震荡

注 3.2

勒让德提出的素数定理采用的是代数表达式：$\pi(x)\sim x/[\ln(x)-1.08366]$，它与积分形式的素数定理在渐近意义上是等价的。

Riemann

无穷多次的函数。

那么有没有一个公式可以比素数定理更精确地描述素数的分布呢？这便是黎曼在1859年想要回答的问题。那一年是高斯去世后的第五年，32岁的黎曼继狄利克雷（Johann Dirichlet，1805-1859）之后成为了高斯在格丁根（Göttingen）大学的继任者。同年8月11日，他被选为柏林科学院的通信院士（Corresponding Member）。作为对这一崇高荣誉的回报，黎曼向柏林科学院提交了一篇论文。这是一篇只有短短八页的论文，标题是：论小于给定数值的素数个数。正是这篇论文将欧拉乘积公式蕴涵的信息破译得淋漓尽致，也正是这篇论文将黎曼 ζ 函数的零点分布与素数的分布联系在了一起。

这篇论文注定要把人们对素数分布的研究推向壮丽的巅峰，并为后世的数学家们留下一个魅力无穷的伟大谜团。

4 黎曼的论文——基本思路

终于到了黎曼的论文登场的时候！如果让数学家们来评选几篇数学史上意义深远而又最为难读的论文，那么我想黎曼1859年的那篇“论小于给定数值的素数个数”就算不名列榜首，起码也要挤身三甲[注4.1]。现在就让我们来一起领略一下那篇数学史上出名难啃的论文的主要内容。我们的叙述将采用较为现代的术语及表述方式，所用的记号将与前文保持一致——因此与黎曼的原始论文不尽相同（但主要思路是一致的）。这一点要提醒有兴趣阅读黎曼原文的读者注意。

如上节所述，Euler乘积公式：

$$\zeta(s)=\sum_n n^{-s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1},$$

是研究素数分布规律的基础。黎曼的研究也以这一公式作为起点。为了消除右边的连乘积，欧拉曾经

> **注4.1**
>
> 当然，所谓“难读”是一个相对概念，是相对于论文发表时数学界的水平而言的。

对公式两边取对数，黎曼也如法炮制（看来连乘积真是人见人恨），从而得到：

$$\ln\zeta(s)=-\sum_p\ln\left(1-p^{-s}\right)=\sum_p\sum_n\left[(1/n)\,p^{-ns}\right]。$$

过了这一步，两人就分道扬镳了：欧拉——如我们在上节所见——小试身手，证明了素数有无穷多个，然后就鸣金收兵了；而黎曼则沿着一条布满荆棘的道路继续走了下去，走出了素数研究的一片崭新的天地。

可以证明，上式右边的双重求和在复平面上 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的区域内是绝对收敛的，并且可以改写成斯蒂尔吉斯积分（有兴趣的读者可自行证明）：

$$\ln\zeta(s)=\int_0^\infty x^{-s}dJ(x)。$$

其中 $J(x)$ 是一个特殊的阶梯函数，它在 $x=0$ 取值为零，以后每越过一个素数就增加1，每越过一个素数的平方就增加1/2，...，每越过一个素数的 n 次方就增加 $1/n$，...。在 $J(x)$ 不连续的点（即 x 等于素数、素数的平方、...、素数的 n 次方 ... 的点）上其函数值用 $J(x)=[J(x-)+J(x+)]/2$ 来定义。显然，这样的一个阶梯函数可以用素数分布函数 $\pi(x)$ 表示为：

$$J(x)=\sum_n\left[\frac{1}{n}\pi\left(x^{1/n}\right)\right]。$$

对上述斯蒂尔吉斯积分进行一次分部积分便可得到：

$$\ln\zeta(s)=s\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}dx。$$

这个公式的左边是黎曼 ζ 函数的自然对数，右边则是对 $J(x)$——一个与素数分布函数 $\pi(x)$ 有直接关系的函数——的积分，它可以被视为欧拉乘积公式的积分形式。我们得到这一结果的方法与黎曼有所不同，黎曼发表论文时还没有斯蒂尔吉斯积分——那时候斯蒂尔吉斯（Thomas Stieltjes，1856-1894）才三岁。

如果说传统形式下的欧拉乘积公式只是黎曼 ζ 函数与素数分布之间存在关联的征兆，那么在这个积分形式的欧拉乘积公式下这两者之间的关联就已是确凿无疑并且完全定量了。接下来首先要做的显然是从上述积分中解出 $J(x)$ 来，这在当时的数学背

Riemann

景下并不容易，但却难不倒象黎曼这样的复变函数论大师。他解出的 $J(x)$ 是（学过复变函数论的读者不妨试着证明一下）：

$$J(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{\ln\zeta(z)}{z}x^{z}dz$$

其中 a 为大于 1 的实数。这是一个条件收敛的积分，它的确切定义是从 $a-ib$ 积分到 $a+ib$（b 为正实数），然后取 $b\to\infty$ 的极限。当黎曼写下这个公式时，只是轻描淡写地提了一句：这是完全普遍的。听上去象是在叙述一个尽人皆知的简单事实。而事实上，与黎曼所说的普遍性相匹配的完整结果直到四十年后才由芬兰数学家梅林（Robert Mellin，1854-1933）所发表，现在被称为梅林变换（Mellin Transform）。象这样一种被黎曼随手写下、却让数学界花费几十甚至上百年的时间才能证明的命题在黎曼的那篇论文中还有好几处。这是黎曼那篇论文的一个极为突出的特点：它有一种高屋建瓴的宏伟视野，远远地超越了同时代的其它数学文献。它那高度浓缩的文句背后包含着的极为丰富的数学结果，让后世的数学家们陷入了漫长的深思之中。直到今天，我们的数学在整体上虽已远非黎曼时代可比，但数学家们仍未能完全理解黎曼在那篇短短八页的简短论文中显露出的全部智慧。$J(x)$ 的表达式是我们碰到的黎曼那篇论文中的结果超前于时代的第一个例子，在下一节中我们将遇到其它例子。这里需要说明一下，为了先把黎曼论文的思路表述清楚，我们对叙述的顺序作了调整，因此这里所说的“第一个例子”是相对于我们的叙述而言的。在黎曼的原始论文中其它的一些例子出现得更早。

在一代代的后世数学家们为那些被黎曼省略掉的证明而失眠的时候，他们中的一些也许会联想到费尔马（Pierre de Fermat，1601-1665）。这位法国数学家在丢番图的《算术》(«Arithmetica») 页边上写下著名的费尔马猜想（Fermat's Last Theorem）的时候，随手加了一句话：“我发现了一个真正出色的证明，可惜页边太窄写不下来”[注 4.2]。令人尴尬的是，费尔马的猜想自 1670 年被他儿子公诸于世（那时他本人已经去世）以来，竟然难倒了整个数学界长达 324 年之久，直到 1994 年才被英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles）所证明。但怀尔斯的证明篇幅浩繁，莫说在《算术》的页边上写不下来，即便把整个大英百科全书的页边加起来，也未必写得下来。现在人们普遍认为，费尔马并没有找到费尔马猜想的证明，他自以为找到的那个“真正出色的证明”只是三百多年间无数个错误证明中的一个。那么黎曼的情形会不会也象费尔马一样呢？他的那些省略掉的证明会不会也象费尔马的那个“真正出色的证明”一样呢？从目前人们对黎曼的研究来看，答案基本上是否定的。黎曼作为堪与高斯齐名的有史以来最伟大的数学家之一，他的水平远非费尔马可比。而且人们在对黎曼的部分手稿进行研究时发现，黎曼对自己论文中的许多语焉不详的命题是做过扎实的演算和证明的，只不过他和高斯一样追求完美，发表的东西远远少于自己研究过的。更令人钦佩的是，黎曼手稿中一些演算和证明哪怕是时隔了几十年之后才被整理出来，却往往还是大大超越当时数学界的水平。因此我们有一定的理由相信，黎曼在论文中以陈述而不是猜测的语气表述的内容——无论有没有给出证明——都是有着深入的演算和证明背景的。

好了，现在回到 $J(x)$ 的表达式来，这个表达式给出了 $J(x)$ 与黎曼 ζ 函数之间的确切关联。换句话说，只要知道了 $\zeta(s)$，通过这个表达式原则上就可以计算出 $J(x)$。知道了 $J(x)$，下一步显然就是计算 $\pi(x)$。这并不困难，因为上面提到的 $J(x)$ 与 $\pi(x)$ 之间的关系式可以通过所谓的莫比乌斯反演（Möbius Inversion）解出，其结果为：

$$\pi(x)=\sum_{n}\left[\frac{\mu(n)}{n}\right]J\left(x^{1/n}\right)$$

这里的 $\mu(n)$ 被称为莫比乌斯函数，它的取值如下：

- $\mu(1)=1$
- $\mu(n)=0$（如果 n 可以被某个素数的平方整除）
- $\mu(n)=-1$（如果 n 是奇数个不同素数的乘积）
- $\mu(n)=1$（如果 n 是偶数个不同素数的乘积）

注 4.2

费尔马猜想（现在被称为费尔马大定理）的内容是：方程 $x^n+y^n=z^n$ 在 $n>2$ 时没有非零整数解。

因此知道了 $J(x)$ 就可以计算出 $\pi(x)$，即素数的分布函数。把这些步骤连接在一起，我们看到，从 $\zeta(s)$ 到 $J(x)$，再从 $J(x)$ 到 $\pi(x)$，素数分布的秘密完全定量地蕴涵在了黎曼 ζ 函数之中。这就是黎曼研究素数分布的基本思路。在下一节中，我们将进一步深入黎曼的论文，让那些千呼万唤犹未露面的黎曼 ζ 函数的非平凡零点显露在我们的镁光灯下。

5 黎曼的论文——零点分布与素数分布

在上节中我们看到，素数的分布与黎曼 ζ 函数之间存在着深刻的关联。这一关联的核心就是 $J(x)$ 的积分表达式。由于黎曼 ζ 函数具有极为复杂的性质，这一积分同样也是极为复杂的。为了对这一积分做进一步的研究，黎曼引进了一个辅助函数 $\xi(s)$ [注 5.1]：

$$\xi(s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\text{。}$$

引进这样一个辅助函数有什么好处呢？可以证明，由上式定义的 $\xi(s)$ 是一个整函数（Entire Function），即在复平面上所有 $s\neq\infty$ 的点上都解析的函数。这样的函数在性质上要比黎曼 ζ 函数简单得多，处理起来也容易得多。事实上，在所有非平庸的复变函数中，整函数是解析区域最为宽广的（解析区域比它更大——即包括 $s=\infty$——的函数只有一种，那就是常数函数）。这是引进 $\xi(s)$ 的好处之一。

利用这一辅助函数，我们在第二节中提到的黎曼 ζ 函数满足的代数关系式

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin(\pi s/2)\zeta(1-s),$$

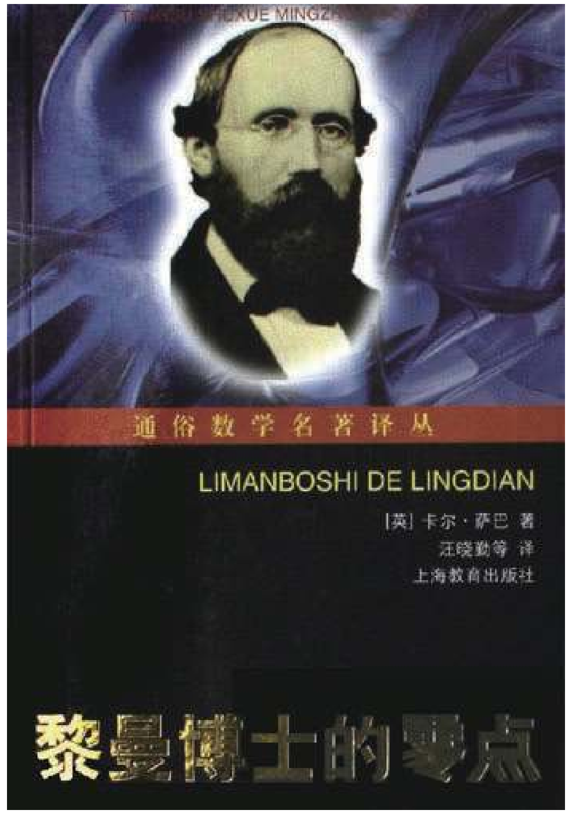
可以表述为一个对于 s 与 $1-s$ 对称的简单形式：

$$\xi(s)=\xi(1-s)\text{。}$$

这是引进 $\xi(s)$ 的好处之二。

注 5.1

黎曼对 ξ 函数的定义与我们所用的略有差异，他的 ξ 函数用我们的 ξ 函数可以表示为 $\xi(s)=\xi(1/2+is)$。



从 $\xi(s)$ 的定义中不难看到，$\xi(s)$ 的零点必定是 $\zeta(s)$ 的零点 [注 5.2]。另一方面，$\zeta(s)$ 的零点除了平凡零点 $s=-2n$（n 为自然数）由于恰好是 $\Gamma(s/2+1)$ 的极点，从而不是 $\xi(s)$ 的零点外，全部都是 $\xi(s)$ 的零点，因此 $\xi(s)$ 的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合。换句话说，$\xi(s)$ 将黎曼 ζ 函数的非平凡零点从全体零点中分离了出来，这是引进 $\xi(s)$ 的好处之三。

由于我们已经知道，$\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 没有零点（证明见《Euler 乘积公式》一文，http://www.changhai.org），因此 $\xi(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)>1$ 也没有零点；又由于 $\xi(s)=\xi(1-s)$，因此 $\xi(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)<0$ 也没有

注 5.2

这是由于 Γ 函数没有零点，而 $s-1$ 的唯一零点 $s=1$ 又不是 $\xi(s)$ 的零点（因为 $\xi(1)=\xi(0)=-\zeta(0)=1/2$）。因此 $\xi(s)$ 的零点只能出现在 $\zeta(s)$ 的零点处。

Riemann

零点。这表明 $\xi(s)$ 的所有零点——从而 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点——都位于 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ 的区域内。由此我们得到了一个有关黎曼 ζ 函数零点分布的重要结果，那就是：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ 的区域内。这一结果虽然离黎曼猜想要求的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上还相距甚远，但起码也算是万里长征的第一步。

黎曼接着用 $\xi(s)$ 的零点对 $\ln \xi(s)$ 进行了分解：

$$\ln \xi(s) = \ln \xi(0) + \sum_{\rho} \ln\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)。$$

其中 ρ 为 $\xi(s)$ 的零点（也就是黎曼 ζ 函数的非平凡零点——这些家伙终于出场了！）。分解式中的求和对所有的 ρ 进行，并且是以先将 ρ 与 $1-\rho$ 配对的方式进行的 (由于 $\xi(s)=\xi(1-s)$，因此零点总是以 ρ 与 $1-\rho$ 成对的方式出现的)。这一点很重要，因为上述级数是条件收敛的，但是在将 ρ 与 $1-\rho$ 配对之后则是绝对收敛的。这一分解式也可以写成等价的连乘积关系式：

$$\xi(s) = \xi(0) \prod_{\rho} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right)。$$

这样的连乘积关系式对于有限多项式来说是显而易见的（只要 $\xi(0)\neq 0$），但对于无穷乘积来说却绝非一目了然，它有赖于 $\xi(s)$ 是一个整函数这一事实，其完整证明直到 1893 年才由阿达马在对整函数的无穷乘积表达式做系统研究时给出。阿达马的这个证明是黎曼的论文发表之后 34 年间在这一领域的唯一一个重要进展 [注 5.3]。

注 5.3

黎曼虽然没有详细讨论上述无穷乘积表达式的证明，但他在写下与之等价的 $\ln\xi(s)$ 的级数分解式之前提了一句：$\xi(s)$ 是一个关于 $(s-1/2)^2$ 的收敛极快的级数。这似乎暗示 $\xi(s)$ 作为 $(s-1/2)^2$ 的级数的收敛方式与它的无穷乘积表达式之间存在着联系。阿达马的证明确立了这种联系。此外，黎曼通过讨论 $\xi(s)$ 的零点分布对 $\ln\xi(s)$ 级数分解式的收敛性作了说明。虽然所有这些都因过于粗略，不足以构成证明，但这一暗一明两条思路后来都被证明是可以实现的。

很明显，上述级数分解式的收敛与否与 $\xi(s)$ 的零点分布有着密切的关系。为此黎曼研究了 $\xi(s)$ 的零点分布，并由此而提出了三个重要的命题：

1. 在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内，$\xi(s)$ 的零点数目大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。

2. 在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内，$\xi(s)$ 的位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上的零点数目也大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。

3. $\xi(s)$ 的所有零点都位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。

在这三个命题中，第一个命题是为了证明级数分解式的收敛性所需要的 (不过黎曼建立在这一命题基础上的说明——如我们在 [注 5.3] 中评述的——因过于简略，不足以构成证明)。对于这个命题黎曼的证明是指出在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内 $\xi(s)$ 的零点数目可以由 $d\xi(s)/2\pi i\xi(s)$ 沿矩形区域 $\{0<\mathrm{Re}(s)<1,\ 0<\mathrm{Im}(s)<T\}$ 的边界作路径积分得到。在黎曼看来，这点小小的积分算不上什么，因此他直接写下了结果（即命题一）。黎曼并且给出了该结果的相对误差为 1/T。但黎曼显然大大高估了他的读者的水平，因为直到 46 年后 (1905 年)，他所写下的这一结果才由德国数学家曼戈尔特 (von Mangoldt，1854-1925) 给出了证明（这一结果因此而被称为黎曼 - 曼戈尔特公式）。

不过黎曼留给读者们的这点智力挫折与他的第二个命题相比却又小巫见大巫了。将黎曼的第二个命题与前一个命题相比较可以看到，这第二个命题表明 $\xi(s)$ 的几乎所有的零点都位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。这是一个令人吃惊的命题，因为它比迄今为止——也就是黎曼的论文发表一百五十多年以来——人们在黎曼猜想上取得的所有结果都要强得多！黎曼在叙述这一命题的时候用的是完全确定的语气，这似乎表明，当他写下这一命题的时候，他认为自己对此已经有了证明。可惜的是他完全没有提及证明的细节，因此他究竟是怎么证明的？他的证明究竟是正确的还是错误的？我们就无从得知了。除了 1859 年的论文外，黎曼还曾在一封信件中提到过这一命题，他说这一命题可以从对 ξ 函数的一种新的表达式中得到，但他还没有将之简化到

可以发表的程度。这就是后人从黎曼留下的片言只语中得到的有关这一命题的全部信息。

黎曼的这三个命题就象是三座渐次升高的山峰，一座比一座巍峨，攀登起来一座比一座困难。他的第一个命题让数学界等待了四十六年；他的第二个命题已经让数学界等待了一百四十多年；而他的第三个命题——读者想必都看出来了——正是大名鼎鼎的黎曼猜想！它要让大家等待多久呢？没有人知道。但是据说著名的德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862-1943)有一次曾被人问到如果他能在 500 年后重返人间，他最想问的问题是什么？希尔伯特回答说他最想问的就是：是否已经有人解决了黎曼猜想？

有意思的是，希尔伯特一度曾对黎曼猜想的解决抱有十分乐观的看法。他在 1919 年的一次演讲中表示在他自己的有生之年可望见到黎曼猜想的解决；在年轻听众的有生之年可望见到费尔马大定理的解决；而另一个问题——希尔伯特第七问题——才是最为困难的，因为谁也没有希望看到它的解决。不料仅仅过了十几年，希尔伯特就活着见到了他的第七问题的解决；七十五年后，费尔马大定理也被解决了；而黎曼猜想却是谁也没能活着见到它的解决。

正所谓山雨欲来风满楼，一直游刃有余、惯常在谈笑间让定理灰飞烟灭的黎曼到了表述这第三个命题——也就是黎曼猜想——的时候也终于一改举重若轻的风格，用起了象“非常可能”这样的不确定语气。黎曼并且写道：“我们当然希望对此能有一个严格的证明，但是在经过了一些快速而徒劳的尝试后，我已经把对这种证明的寻找放在了一边，因为它对于我所研究的直接目标不是必须的”。黎曼把证明放在了一边，整个数学界的心弦却被提了起来，直到今天还提得紧紧的。黎曼猜想的成立与否对于黎曼的“直接目标”——即证明 $\ln\xi(s)$ 的级数分解式的收敛性——的确不是必须的（因为那只要上述第一个命题就够了），但对于今天的数学界来说却是至关重要的。粗略的统计表明，在当今的数学文献中已经有超过一千条数学命题或“定理”以黎曼猜想的成立作为前提。黎曼猜想的命运与提出这些命题或“定理”的所有数学家们的“直接目标”息息相关。另一方面，黎曼对于黎曼猜想的表述方式也从一个侧面表明黎曼对于自己写下的命题是属于猜测性的还是肯定性的是加以区分的。因此他对于那些没有注明是猜测性的命题——包括迄今无人能够证明的上述第二个命题——应该是有所证明的（尽管由于他省略了证明，我们无从知道那些证明是否正确）。

现在让我们回到对 $J(x)$ 的计算上来。利用 $\xi(s)$ 的定义及其分解式，可以将 $\ln\zeta(s)$ 表示为：

$$\ln\zeta(s)=\ln\xi(0)+\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)-\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)-\frac{s}{2}\ln\pi-\ln(s-1)\text{。}$$

对 $\ln\zeta(s)$ 作这样的分解目的是为了计算 $J(x)$，但是将这一分解式代入 $J(x)$ 的积分表达式后所得的各单项的积分并不都收敛，因此黎曼在代入前先对 $J(x)$ 作了一次分部积分，由此得到（读者可自行证明）：

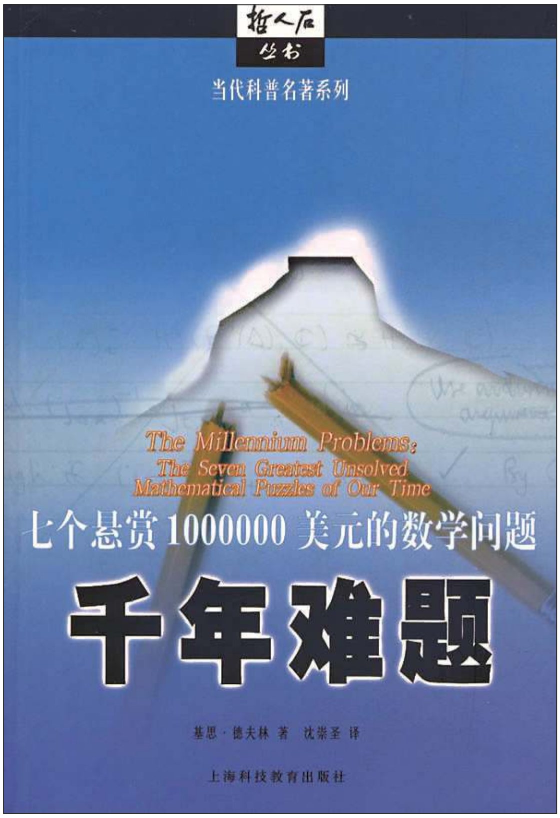
$$J(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\ln x}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{d}{dz}\left[\frac{\ln\zeta(z)}{z}\right]x^{z}dz\text{。}$$

将 $\ln\zeta(s)$ 的分解式代入上式，各单项可以分别积出，其结果如下表所列：

$\ln\zeta(s)$ 分解式中的项	对应的积分结果
$-\ln(s-1)$	$\mathrm{Li}(x)$
$\Sigma_\rho \ln(1-s/\rho)$	$-\Sigma_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$
$-\ln\Gamma(s/2+1)$	$\int_x^\infty \frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$
$\ln\xi(0)$	$\ln\xi(0)=-\ln 2$
$-(s/2)\ln\pi$	0

在上述这些结果中，对 $\Sigma_\rho\ln(1-s/\rho)$ 的积分最为复杂，其结果 $-\Sigma_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$ 是对级数逐项积分的结果。这一结果是条件收敛的，不仅要如 $\ln\xi(s)$ 的级数表达式中一样将 ρ 与 $1-\rho$ 进行配对，而且还必须依照 $\mathrm{Im}(\rho)$ 从小到大的顺序求和。黎曼在给出这一结果时承认逐项积分的有效性有赖于对 ξ 函数的“更严格”的讨论，但他说这是容易证明的。这一“容易证明”的结果在 36 年后（1895 年）被

Riemann



黎曼猜想和庞加莱猜想均属于七个悬赏百万美元的难题。后者已被俄国数学家佩雷尔曼解决，但他拒绝了百万美元。

曼戈尔特所证明。另外值得指出的一点是，在黎曼对这一级数的各单项进行积分时隐含了一个要求，那就是对所有的零点 ρ，$0<\mathrm{Re}(\rho)<1$[注 5.4]，这比我们在前面已经证明的 $0\le\mathrm{Re}(\rho)\le1$ 要强。这一加强看似细微（不过是将等号排除掉而已），其实却——如我们在后文中将会看到的——是数论中一个非同小可的结果。黎曼在文章中不仅没有对这一结果加以证明，连暗示性的说明也没有，这是他论文的一个漏洞。这个漏洞在曼戈尔特的证明中也同样存在。这里要区分两个不同的问题：一个是证明逐项积分的可行性，另一个是计算级数各单项的积分。 这个漏洞是出现在后一个问题中的。不过这一漏洞只是论证方法上的漏洞，是可以弥补的，论证的结果本身并不依赖 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ 这样的条件。由上面这些结果黎曼得到了 $J(x)$ 的显形式：

$$J(x)=Li(x)-\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\left[Li\left(x^{\rho}\right)+Li\left(x^{1-\rho}\right)\right]+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\ln t}-\ln 2\ 。$$

这个结果，连同上节给出的 $\pi(x)$ 与 $J(x)$ 的关系式：

$$\pi(x)=\sum_n\left[\frac{\mu(n)}{n}\right]J\left(x^{1/n}\right),$$

便是黎曼所得到的素数分布的完整表达式，也是他 1859 年论文的主要结果。黎曼的这个结果给出的是素数分布的精确表达式，它的第一项（由 $J(x)$ 及 $\pi(x)$ 的第一项共同给出）正是当时尚未得到证明的素数定理所预言的结果 $\mathrm{Li}(x)$。

细心的读者可能会问：黎曼的结果既然给出了素数分布的精确表达式，却没能直接证明远比该结果粗糙的素数定理，这是为什么呢？这其中的奥秘就在于黎曼 ζ 函数的非平凡零点，在于 $J(x)$ 的表达式中那些与零点有关的项：$-\Sigma_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$。在 $J(x)$ 的表达式中，所有其它的项都十分简单，也比较光滑，因此素数分布的细致规律——那些细致的疏密涨落——主要就蕴涵在了这一个与黎曼 ζ 函数非平凡零点有关的级数中。如上所述，这个级数是条件收敛的，也就是说它的收敛有赖于参与求和的各项——即来自不同零点的贡献——之间的相互抵消。这些来自不同零点的贡献就象一首盘旋起伏的舞曲，引导着素数的细致分布。而这首舞曲的奔放程度——也就是这些贡献相互抵消的方式和程度——决定了素数的实际分布与素数定理给出的渐近分布之间的接近程度。所有这一切都定量地取决于黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布。黎曼给出的素数分布的精确结果之所以没能立即使对素数定理的直接证明成为可能，原因正是因为当时人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布还知道的太少（事实上当时人们所知道的也正是我们在上面已经证明的 $0\le\mathrm{Re}(\rho)\le1$），无法有效地估计来自零点的那些贡献的大小，从而也就无法有效地估计素数定理与素数

注 5.4

确切地说是 $\mathrm{Re}(\rho)>0$，但由于 ρ 与 $1-\rho$ 总是同为零点，因此 $\mathrm{Re}(\rho)>0$ 也意味着 $\mathrm{Re}(\rho)<1$。

实际分布——即黎曼的结果——之间的偏差。

那么黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布对素数定理与素数实际分布之间的偏差究竟有什么样的影响呢？数学家们已经取得了一系列结果。素数定理的证明本身就是其中一个，我们将在后文中提及。在素数定理的证明之后，1901 年，瑞典数学家科赫（von Koch，1870-1924）证明了，假如黎曼猜想成立，那么素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为 $O(x^{1/2}\ln x)$[注 5.5]。另一方面，$\mathrm{Li}(x^{\rho})$ 的模随 x 的增加以 $x^{\mathrm{Re}(\rho)}/\ln x$ 的方式增加，因此任何一对零点 ρ 与 $1-\rho$ 给出的渐近贡献 $\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})$ 起码是 $\mathrm{Li}(x^{1/2}) \sim x^{1/2}/\ln x$。这一结果暗示素数定理与素数实际分布之间的偏差不可能小于 $\mathrm{Li}(x^{1/2})$。事实上，英国数学家李特尔伍德（John Littlewood）曾经证明，素数定理与素数实际分布之间的偏差起码有 $\mathrm{Li}(x^{1/2})\ln\ln\ln x$。这与科赫的结果已经非常接近 (其主项都是 $x^{1/2}$)。因此黎曼猜想的成立意味着素数的分布相对有序；而反过来，假如黎曼猜想不成立，假如黎曼 ζ 函数的某一对非平凡零点 ρ 与 $1-\rho$ 偏离了 critical line(即 $\mathrm{Re}(\rho)>1/2$ 或 $\mathrm{Re}(1-\rho)>1/2$)，那么它们所对应的渐近贡献 $\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})$ 的主项就会大于 $x^{1/2}$，从而素数定理与素数实际分布之间的偏差就会变大。在不假定黎曼猜想成立的情况下，目前所能证明的素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差的主项为 $o(x)$，远远差于黎曼猜想成立情况下的 $o(x^{1/2+\varepsilon})$，这里 ε 是任意小的正数。

因此，对黎曼猜想的研究使数学家们看到了貌似随机的素数分布背后奇异的规律和秩序。这种规律和秩序就体现在黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布之中，它让数学家们目驰神移。

注 5.5

这一结果反了过来也成立，即假如素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为 $O(x^{1/2}\ln x)$(这个条件还可以减弱为 $O(x^{1/2+\varepsilon})$)，则黎曼猜想必定成立。

作者介绍：

卢昌海，哥伦比亚大学物理学博士，现旅居纽约，为本刊特约撰稿人。

第谷与开普勒仰望天空的雕塑坐落在布拉格。

理性文明两千年
——概述与重访(下)

项武义

§4. 重访开普勒行星定律的探索历程

师法其意，改弦更张，
以后见之明的简洁新途径身历其境

自古以来，“量天”一直是几何学的“巨梦”，此事一直到开普勒才真正圆此巨梦。在天文观测中，夹角和方向乃是实测之数据，而星际之距离则是主要有待克服的难点，开普勒量天有术的方法何在？

师法其意之一：开氏量天术

概括地来说，下述跨周期叠加测量法乃是开氏巧用周期性，善用第谷天文宝库的基本方法。如图-11所示，M 是火星在 t_1 时刻的位置 $M_0(t_1)$ 在黄道面上的垂直投影，$(\pi-\mu_1)$ 则是在 t_1 的薄暮观测所得的 $\overline{SE_1}$ 和 $\overline{E_1M}$ 的方位差。一个火星年约为 $T=687$ 天。所以在和 t_1 相差几个火星年的 t_2 时刻，则有 $M(t_1)=M(t_2)=M$。上述跨周期的 ΔSE_1M 和 ΔSE_2M 就在天际叠加成所示的四边形！其中 μ_1，μ_2 和 θ 都是直接实测之角度，可以在第谷天文宝库（或现代天文数据）中查到。由此可见，只要能够掌握日 - 地距的规律（亦即，地球绕日的极坐标方程）就可以用他熟知的三角测量公式去计算 $\overline{SM}$ 的方位与距离，此事让他认识到下述“卓见”。

师法其意之二：（自知之明乃是新天文学的基石所在）

有鉴于地球和其它行星都在绕日运行，所以由地球观测各别行星的视运动就变得复杂难解，可以说是“舞在其中，当局者迷”的一种表现，其实也正是千古之谜的根源所在。反之，若能有自知之明（亦即充分掌握日 - 地距的极坐标方程）则利弊逆转，就可以利用上述开氏量天术研究行星运行的规律！所谓“自知之明”善莫大焉！它是新天文学的基础所在，这也就是《新天文学》第三卷的主题，其标题为：

“第二个不规则性 (second inequality)，即对太阳或地球运动的探讨，是深刻天文学的关键，那里存在着许多运动的物理原因”。

开氏量天术的三角分析：

一般情形：令 $\alpha_1=\angle E_1MS$，$\alpha_2=\angle E_1MS$，$d=\overline{SM}$，则有

$$\beta=2\pi-\mu_1-\mu_2-\theta=\alpha_1+\alpha_2,$$

$$\frac{d}{\sin\mu_1}=\frac{\lambda_1}{\sin\alpha_1},\quad \frac{d}{\sin\mu_2}=\frac{\lambda_2}{\sin\alpha_2}$$

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1\sin\mu_1}{\lambda_2\sin\mu_2}(:=k),\quad \sin(\beta-\alpha_2)=k\sin\alpha_1$$

$$\alpha_2=\cot^{-1}\left(\frac{k+\cos\beta}{\sin\beta}\right) \tag{1}$$

特殊情形：设 t_i 和 t_j 都是和某一个火星冲相差几个火星年者（参看图-12）。$\{\theta_i,\theta_j,\mu_i,\mu_j\}$ 皆为实测数据而 $\alpha_i=\pi-\theta_i-\mu_i$，$\alpha_j=\pi-\theta_j-\mu_j$。因此，由正弦定律即得

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i}=\frac{\sin\alpha_j\sin\mu_i}{\sin\alpha_i\sin\mu_j} \tag{2}$$

重访地球面积律的探索历程（后见之明之一）：

在开氏行星定律中，地球面积律是他第一个重大突破（首战告捷），也是他用来探索其它各定律的基础与利器，所以它自然也是我们重访的首要。在《新天文学》中，地球

的面积律乃是第三卷对于“第二个不规则性”（亦即日 - 地距的极坐标方程）研究成果的简洁重述，堪称神来之笔。如今回看，它乃是地球绕日运动的角动量守恒定律，是理性文明史中第一个发现的角动量宏恒律，其极坐标表达式即为：

$$\frac{1}{2}\lambda^2\omega = \text{常数}\,,$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\,(\text{角速度}) \qquad (3)$$

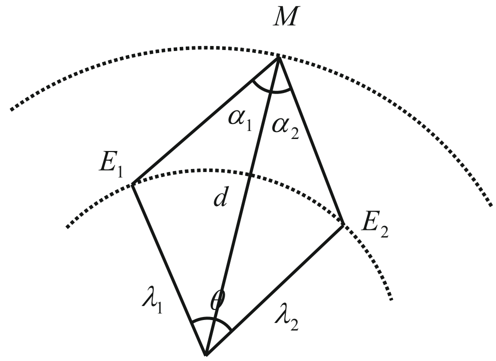


图 -11

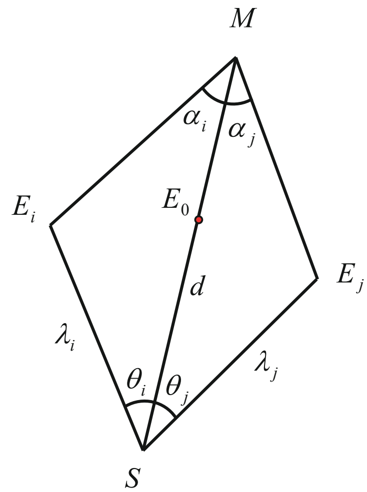


图 -12

有鉴于在薄暮观测中，当时之日的地方位 θ_t，乃是第一个实测的数据，它们的逐日差额就是当天的每天平均角速度 ω_t；而上述守恒律的探索其实就是要从实测数据去检验

$$\frac{1}{2}\lambda(t_j)^2\omega(t_j) = \frac{1}{2}\lambda(t_i)^2\omega(t_i)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda(t_j)^2}{\lambda(t_i)^2} = \frac{\omega(t_i)}{\omega(t_j)}$$

恒成立。

再者，t_i 在和 t_j 各别和某一个火星冲 t_0 相差几个火星年的特殊时刻

$$\frac{\lambda_j^2}{\lambda_i^2} = \frac{\sin^2\alpha_j \sin^2\mu_i}{\sin^2\alpha_i \sin^2\mu_j} \text{ 和 } \frac{\omega_i}{\omega_j}$$

都可以由实测数据直截了当地计算之。

例如表 -1（见下页）所列者，乃是以 1948 年 5 月 5 日火星冲为准，前后三十个火星年的实测实算数据。易见它们的最后两行之值几乎相等（差相在 0.3% 之内）。我们当然还可以改用其它火星冲作同样检验，而且发现它们依然几乎相等。这样就可以由实测的角度和方位的实算，检验地球面积律这个极为重要的实验性定律 (experimental law)。

重访地球椭圆律之探索（后见之明之二）：

在此将以后见之明，改弦更张，先行探索地球的轨道是否是一个太阳位于其焦点之一的椭圆？有鉴于业已建立的地球面积律和每天实测可得的逐天角速度，即有

$$\frac{1}{2}\lambda^2\omega = k\,, \quad \frac{\sqrt{2k}}{\lambda} = \sqrt{\omega} \qquad (4)$$

历史的注记

(i) 在开普勒行星律的探索历程中，是先有地球的面积律，亦即第三卷对于“第二不规则性”的充分掌握，接着发现火星的面积律，然后再苦战数年才发现火星的椭圆律。上述三者发表于 1609 年的《新天文学》。地球的椭圆律以及其它四个行星的面积律和椭圆律实乃顺理成章的推广，陆续发表于三册《哥伯尼天文学概要》(Epitome Astronomiae Copernicanae，1617-21)，而综合六个行星各别定律的周期律则发表于《世界之和谐》(Harmonica Mundi，1619)。

(ii) 当年离解析几何学之问世还有几十年，所以现代众所周知某些锥线性质：如五点定一锥线，锥线以焦点为原点的极坐标方程乃是开普勒未能得见，也没能想到者，但是他当然熟知阿波罗尼斯的锥线论。

亦即 $\frac{\sqrt{2k}}{\lambda}$ 每天之值皆可相当精准地实测实算！

另一方面，由解析几何的后见之明，一个以原点为其焦点之一的椭圆之极坐标方程均可写成下述形式，即

$$\frac{1}{\lambda} = c_0 + c_1\cos\theta + c_2\sin\theta \qquad (5)$$

由此可见，我们可以先取一年中相当均匀间隔的三天 $\{t_1, t_2, t_3\}$，先由下述三元一次方程组，即

$$\sqrt{\omega(t_i)} = c_0' + c_1'\cos\theta(t_i) + c_2'\sin\theta(t_i)\,, \quad i = 1, 2, 3 \qquad (5')$$

解得 $\{c_0', c_1', c_2'\}$，然后再以任选许多天的$\sqrt{\omega(t)}$和$\theta(t)$之值代入

$$\sqrt{\omega(t)} = c_0' + c_1'\cos\theta(t) + c_2'\sin\theta(t),\quad i = 1, 2, 3$$

来检验上述等式是否几乎恒成立。这样，就可以简洁明了地探索而得地球的椭圆律！

有兴趣对于开普勒行星定律探索历程，作一次身历其境的全程重访的读者，在此郑重建议去细读《千古之谜与几何天文物理两千年》的第五章，并且认真地做该章的习题与演练。在此限于篇幅，仅作下述分析与注记。

分析与注记

(i) 开普勒行星定律是整个理性文明无比辉煌的实验性定律，对于它作一次重访中，后见之明自然是指路明灯，可以使得我们的历程目标明确，避免曲折。其实，在开氏当年写书时，岂不是也已经有了后见之明？

(ii) 在重访之一中，一方面我们对于好几个取定的火星冲计算和它相差几个火星年的日-地距之比值。这是开氏量天术的特别简化的情形，只要直截了当地用正弦定律就可以由实测的角度马上实算之。从几何观点来看，此事其实就是善用周期性，以居于原位的太阳和火星为观测站来对于 $\{E_i, E_j\}$ 作太空三角测量。另一方面，我们有效利用每天平均角速度 $\{w(t_i), w(t_j)\}$ 是每天都可以精准实测的数据。

(iii) 有了地球面积律 $\lambda^2\omega/2 = k$，就可以由 $\omega(\theta)$之值直接计算 $\sqrt{2k}/\lambda(\theta) = \sqrt{\omega(\theta)}$ 在各个方位之值，亦即地球绕日运行的极坐标方位业已简洁掌握。所以重访之二关于地球椭圆律的探索根本可以看做地球面积律的一个顺理成章的应用。再者，有了地球绕日运行的极坐标方程，一般情形的开氏量天术就可以长驱直入地测算其它行星的极坐标之数据。由此可见，其它行星的面积律和椭圆律的探索又是一种直截了当的顺理成章！

日期	ω_i	ω_j	$\frac{r_j^2}{r_i^2}$	$\frac{\omega_i}{\omega_j}$	日期	ω_i	ω_j	$\frac{r_j^2}{r_i^2}$	$\frac{\omega_i}{\omega_j}$
1948.5.5	0.969	（以此日期当做基准）			1948.5.5	0.969	（以此日期当做基准）		
1940.10.26		0.998	0.968	0.971	1957.9.30		0.983	0.976	0.986
1938.12.9		1.016	0.952	0.954	1959.8.18		0.961	1.006	1.008
1937.1.21		1.017	0.951	0.952	1961.7.5		0.953	1.014	1.016
1935.3.6		1.001	0.966	0.968	1963.5.23		0.962	1.006	1.008
1933.4.18		0.977	0.990	0.992	1965.4.9		0.982	0.984	0.987
1931.6.1		0.958	1.009	1.012	1967.2.25		1.005	0.961	0.964
1929.7.14		0.954	1.014	1.016	1969.1.12		1.019	0.949	0.951
1927.8.27		0.966	1.003	1.003	1970.11.29		1.014	0.954	0.956
1925.10.9		0.988	0.976	0.980	1972.10.16		0.992	0.973	0.976
1923.11.22		1.010	0.957	0.959	1974.9.3		0.969	1.000	1.000
1922.1.4		1.019	0.949	0.951	1976.7.21		0.955	1.013	1.015
1920.2.17		1.009	0.959	0.960	1978.6.8		0.957	1.011	1.013
1918.4.1		0.986	0.981	0.983	1980.4.25		0.973	0.993	0.996
1916.5.14		0.964	1.003	1.005	1982.3.13		0.997	0.970	0.972
1914.6.27		0.954	1.015	1.016	1984.1.29		1.016	0.952	0.954

表 -1 二十个火星年的实测实算数据

开普勒 (1571-1630)

伽里略 (1564-1642)

笛卡儿 (1596-1650)

惠更斯 (1629-1695)

§5. 从新天文学到自然哲学的数学原理

顺理成章，精益求精；
天上人间合而为一，至精至简，万有引力

古希腊文明经过文艺复兴的蕴育而重获新生。到了十六世纪中叶，业已萌芽茁壮，容光焕发，有蓬勃进展之势。例如 §3 中所述的天文学巨棒三接力，则是其中至重至大者；不但开创了天文学的新纪元，而且也引领着近代科学的全面进展。由十七世纪初叶的新天文学（包括伽利略 (Galileo) 用望远镜所得的重大天文发现）到 1687 年牛顿的巨著《自然科学的数学原理》(以下简称《原理》) 集其大成，理性文明进展之神速，令人叹为观止！比之于理性文明的先前两千年的进化历程，可以说简直是一气呵成而又精彩绝伦的突飞猛进。其中有很多引人入胜，富有启发的创见与思想。在此限于篇幅，仅作极为简略的概括：

(1) 1608 年望远镜的发明：它的光学原理十分简明，首先是在荷兰为了航海之用而发明的；而天文学家如伽里略，开普勒等马上就认识到它在天文观测上的重要性而自行研制。此事大大扩展了天象观测的视野与精度，促进了天文学的更上层楼，例如伽里略的种种天文发现。

(2) 伽里略 (Galileo，1564-1642) 的重力实验：自由落体以及斜面实验，等加速运动的数理分析，惯性和 $F = m \cdot a$ 的首现。

(3) 笛卡儿 (R. Descartes，1596-1650)：解析几何，广义的惯性定律。(他在力学上的机械论在当代曾为显学，如今早已成为历史陈迹)。

(4) 开普勒天文学的逐步进展：

(i) 他的三册《哥伯尼天文学概要》逐渐成为欧陆天文学的主要教科书。

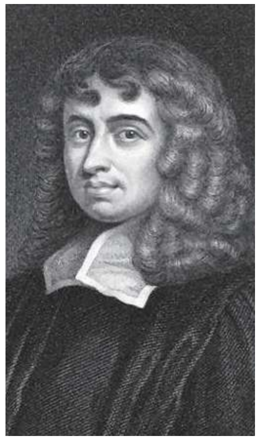
(ii) 他在 1627 年出版的《鲁道夫星表》(Rudolphine Table) 要比任何其它星表精准百倍而被广泛采用。

(iii) 他预测在 1631 年 11 月 7 日会有水星凌日，1631 年 12 月 6 日会有金星凌日；前者由茄桑地 (Gassendi) 的观测证实，但是后者则因为发生在欧洲的夜晚而未能观测。随后霍洛克 (Harrocks) 按照开氏定律预知 1639 年 12 月 4 日还有另一次金星凌日，并且作了详细的观测与纪录。

伽利略在介绍天文望远镜

费马 (1601-1665)

帕斯卡 (1630-1662)



巴罗 (1630-1677)

瓦利斯 (1616-1703)

虎克 (1635-1703)

(5) 惠更斯 (Huygens，1629-1695)：圆周运动的离心力，摆线运动的数理分析。

(6) 费马 (Fermat，1601-1665)，帕斯卡 (Pascal，1630-1662)，巴罗 (Barrow，1630-1677)，瓦利斯 (Wallis，1616-1703) 在数理分析上的工作和虎克 (Hooke，1635-1703) 在物理上的工作和见解也都为牛顿集其大成的工作多方开路与奠基。牛顿曾自述，他之所以能看得比别人远，乃是因为他站在巨人的肩上。以上所列，大概就是牛顿自述中的“巨人”。

《原理》精要之概述：

《原理》的基本方式是系统地运用数理分析，对于天体运行，重力实验，圆周运动等等作精益求精的深究其理。所以他在第一卷开宗明义对于力学的基本概念：如质量，动量，惯性，力，向心力，速度及加速度妥加明确定义；并列述力学的基本定律为：

惯性定律、$F = m \cdot a$ 和作用力反作用力定律

〔注〕其中前两条是当代熟知之共认，而第三条则是牛顿的重要创见。

《原理》中有很多引人入胜，精辟的数理分析。其中最为重要的结果首推下述四个命题和由它们推论所展现的万有引力定律 (Law of Universal Gravitation)：

命题 1： 面积律等价于作用力向心，即

$\frac{1}{2}\lambda^2\omega =$ 常数 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ 和 a 共线 (colinear)

命题 2： 面积律和椭圆律

$\Rightarrow$ 向心作用力的大小和距离平方成反比

命题 3： 在一个其力向心（或离心）而且大小和距离平方成反比的作用力之下，一个质点的轨迹必然是一个以原点为其焦点之一的锥线。

命题 4： 一个均匀密度的球形薄壳施加于其外的一个质点的重力等同于将其质量集中于球心所产生之引力。(一个简洁的积分公式)

历史的注记

(i) 在开普勒的《新天文学》中，地球的面积律乃是第三卷对于日 - 地距研究成果的精简总结；然后促使他发现面积律对于其它行星也普遍成立；但是面积律的深刻物理内涵，却一直到牛顿才充分理解。命题 1 的证明十分简单，本质上就是下述两行，即

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{OP}\times\vec{v} = \vec{v}\times\vec{v} + \overrightarrow{OP}\times\vec{a} = \overrightarrow{OP}\times\vec{a} = 0$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}$ 和 $\vec{a}$ 同向或反向 $\Leftrightarrow \vec{a}$ 离心或向心

上述简朴精到的理解是引领牛顿迈向成功的重要关键（参看在《原理》中对于向心力的诸多研讨）。

(ii) 虎克曾写信给牛顿提出“命题 2”这个猜想希望和他合作求证之。信中还提及他对于加速度在切线和法线方向的分量的物理意义。前者

使得速率改变而后者则使得方向改变（亦即曲率）。几经努力，牛顿成功地证明了命题 2，但是认为虎克对此毫无贡献 (should have no credit whatsoever)。但是只要对于《原理》中对于该命题的证明详加分析，就可以看出椭圆的曲率公式和上述虎克的“灼见”其实是有其重要性的。

(iii) 命题 3 也叫做开普勒逆问题。其实《原理》中对于它的论证，离完整的证明相去尚远，因为它最后是依赖一个当代还不存在的常微分方程的唯一性定理才能达成者。

(iv) 命题 4 这个积分公式对《原理》的核心结果——万有引力定律至关重要。因为没有它就无从估算地球对于苹果的引力，因此也无法把太阳对于行星的引力和前者作对比。唯有天上人间合而为一，才能主张万有引力！牛顿完全认识这个积分公式的重大意义，但是一直到 1686 年才达成其证明，由他 1686 年 6 月 20 日给哈雷 (Halley，1656-1742) 的信可见这也就是他一直到 1686 年才肯发表《原理》的主要原因。再者《原理》对于命题 4（亦即《原理》之命题 71）的证明却又是十分难懂。

有鉴于上述几点，§ 6 的重访也就更有其必要。

§ 6. 重访《原理》中数理分析的几个精要

重要命题的简洁初等新证

(6.1) 重访命题 2 的证明

在论证的起始，且让我们先分析一下椭圆律和面积的自然配合何在？由图 -13 所示，F_1 和 F_2 分别是椭圆的两个焦点，F_1' 和 F_2' 对于任给切线 l 的对称点；d_1 和 d_2 则是 F_1 和 F_2 到 l 的距离。易见面积律的几何意义就是

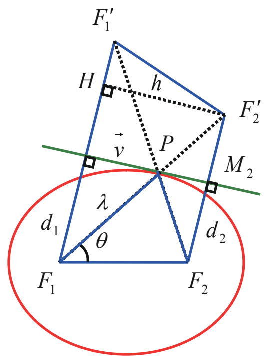


图 -13

$$v\cdot d_1=\lambda^2\omega=\frac{2\pi ab}{T},\quad v=|\vec{v}|$$

其中，F_1 是向心加速度所指向的中心；而椭圆的光学性质则表现在 F_1PF_2' 和 F_2PF_1' 共线而且 $\overline{F_1F_2'}=\overline{F_2F_1'}=2a$。有鉴于 d_1 在上述面积律所扮演的要角，自然要研讨 d_2 和 F_2 究竟扮演着何许角色，而此事显然应该往 $\{d_1,d_2\}$ 之间的关系探求之。令 h 为等腰梯形 $F_1F_2F_2'F_1'$ 的高，则有

$$\begin{aligned}&4a^2=\overrightarrow{F_1F_2'}^2=\overrightarrow{F_1H}^2+\overrightarrow{HF_2'}^2=(d_1+d_2)^2+h^2\\&4c^2=\overrightarrow{F_1'F_2'}^2=\overrightarrow{F_1'H}^2+\overrightarrow{HF_2'}^2=(d_1-d_2)^2+h^2\\&\Rightarrow\ 4b^2=4a^2-4c^2=4d_1d_2\ \Rightarrow\ d_1d_2=b^2\end{aligned}\tag{7}$$

由此可见：

$$v=\frac{2\pi ab}{d_1T}=\frac{2\pi a}{bT}\overrightarrow{F_2M_2}=\frac{\pi a}{bT}\overrightarrow{F_2F_2'}\tag{8}$$

再者，显然有

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{F_2F_2'}=\overrightarrow{F_2F_1}+\overrightarrow{F_1F_2'},\quad \overrightarrow{F_1F_2'}=(2a\cos\theta,2a\sin\theta)\\&\Rightarrow\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}=\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_1F_2'}=\left(2a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right),2a\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)\cdot\omega\end{aligned}\tag{9}$$

而 $\overrightarrow{F_2F_2'}$ 和 $\vec{v}$ 之间的关系是后者的方向要比前者多加 $\pi/2$，而后者的长途则是前者的 $\frac{\pi a}{bT}$ 倍。由此易见，$\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}$ 乃是 $\frac{d}{dt}\overrightarrow{F_2F_2'}$ 的 $\frac{\pi a}{bT}$ 倍再转 $\pi/2$ 度，即

$$\vec{a}=\frac{2\pi a^2}{bT}(\cos(\pi+\theta),\sin(\pi+\theta))\omega=\frac{4\pi a^3}{T^2}\frac{1}{\lambda^2}(-\cos\theta,-\sin\theta)\tag{10}$$

亦即 $\vec{a}$ 向心而且其大小为 $\frac{4\pi a^3}{T^2}\frac{1}{\lambda^2}$。□

(6.2) 重访命题 3 的证明（开普勒逆的问题）

由所设，存在常数 K，使得向心（或离心）加速度

$$\vec{a}=\frac{K}{\lambda^2}(-\cos\theta,-\sin\theta),\quad K>0\ （或<0）$$

由于加速度和 $\overrightarrow{OP}$ 反向（或同向），还有另一常数 k 使得 $\lambda^2\omega=2k$。亦即

$$\begin{aligned}&\vec{a}=\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{K}{\lambda^2}(-\cos\theta,-\sin\theta)=\frac{d}{d\theta}\vec{v}\cdot\omega\\&\Rightarrow\frac{d\vec{v}}{d\theta}=\frac{\vec{a}}{\omega}=\frac{K}{\lambda^2\omega}(-\cos\theta,-\sin\theta)=\frac{K}{2k}(-\cos\theta,-\sin\theta)\\&\Rightarrow\frac{d}{d\theta}\left(\vec{v}-\frac{K}{2k}(-\sin\theta,\cos\theta)\right)\equiv 0\end{aligned}\tag{11}$$

亦即存在一个常向量 $\vec{c}$ 使得

$$\vec{v}=\frac{K}{2k}(-\sin\theta,\cos\theta)+\vec{c}\quad（不妨设\ \frac{K}{2k}>0）\tag{11$'$}$$

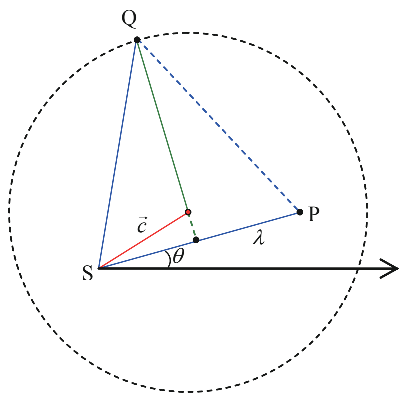


图 -14

如图 -14 所示，S 为原点，$\overrightarrow{SP}=(\lambda\cos\theta,\lambda\sin\theta)$，圆心是 $\vec{c}$ 的终点，半径为 $K/(2k)$。

因为 $(-\sin\theta,\cos\theta)$ 和 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 垂直，所以 ΔSPQ 的高为

$$\frac{K}{2k}+\vec{c}(-\sin\theta,\cos\theta)$$

其面积为

$$\frac{1}{2}\lambda\left\{\frac{K}{2k}+\vec{c}(-\sin\theta,\cos\theta)\right\}=k \quad \text{亦即：} \tag{12}$$

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{K}{(2k)^2}\left\{1+\frac{2k}{K}\vec{c}(-\sin\theta,\cos\theta)\right\} \tag{12'}$$

它是一个离心率等于 $(2k|\vec{c}|)/K$ 的锥线的极坐标方程。□

〔注〕：这也就是《原理》命题 17 未能完成者，也是当年哈雷、虎克和雷恩 (Wren) 所困惑并求教于牛顿的著名问题。由上述简朴的证明，可见只要直截了当地用两次面积律就可以简洁完整地解答逆问题。其实，这种善用面积律的本质在于善用空间的对称性。

（6.3）重访命题 4（亦即原理之命题 71）的证明：

设 Ω 是一个半径为 R 的球形薄壳，其单位面积之密度为 ρ。P 是其外一个质点，其质量为 m，令 P' 是 $\overline{OP}$ 上使得 $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=R^2$ 之点。Ω_0 是以 P' 为心的单位球面（不访设 $R>2$），Π 是一个以直线 OP 为其边的半平面，$\{\Gamma,\Gamma_0\}$ 分别是 $\{\Omega,\Omega_0\}$ 和 Π 交截之半圆，而 $\{\Omega,\Omega_0\}$ 则分别是 $\{\Gamma,\Gamma_0\}$ 绕 OP 轴旋转而得的旋转面。如图 -15 所示，ΔOPQ_1 和 $\Delta O_1Q_1P'$ 满

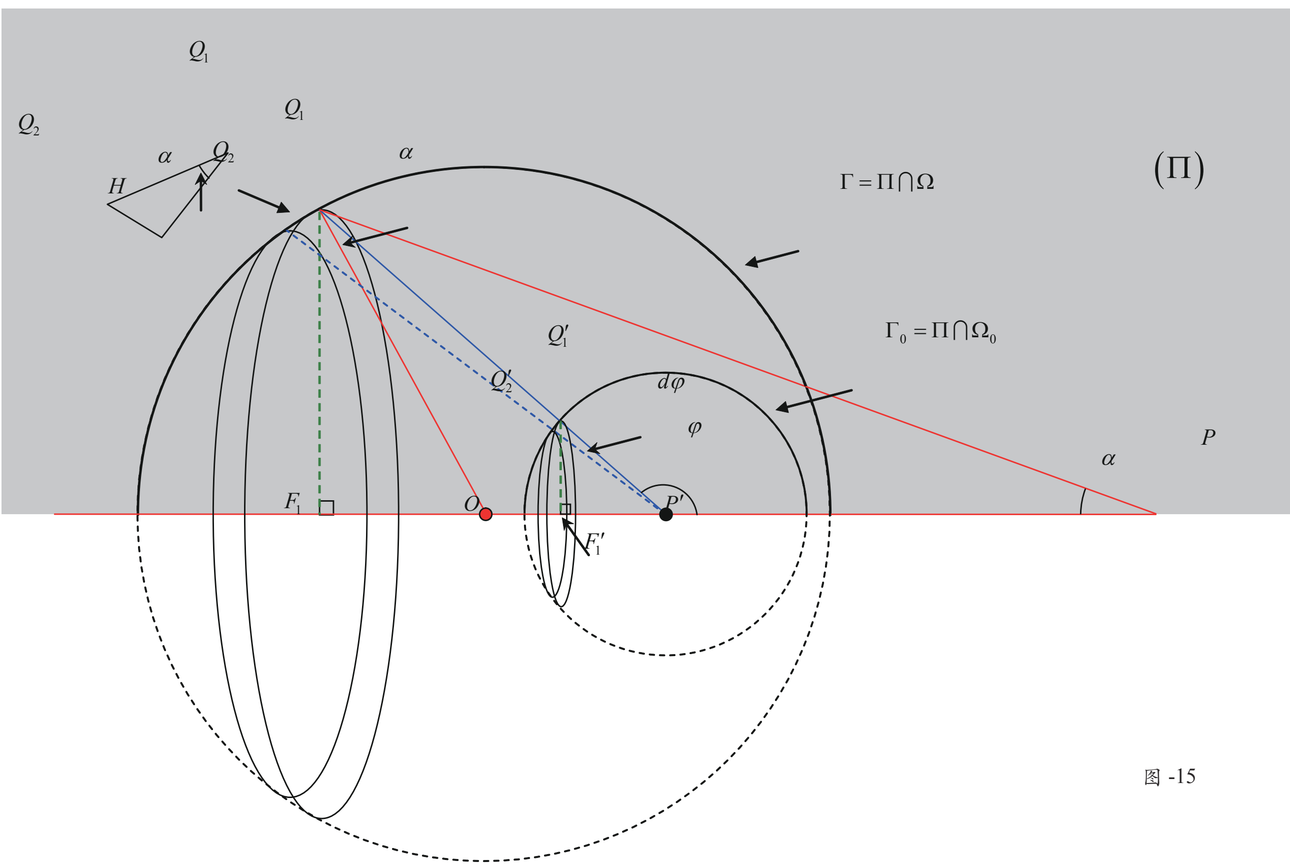


图 -15

足边角边的相似三角形条件，所以

(13) $\angle OPQ_1 = \angle OQ_1P' \,(:=\alpha)$, $\overline{Q_1P'}:\overline{Q_1P} = R:\overline{OP}$

设 $\widehat{Q_1Q_2}$ 是 Γ 上的微小弧段，它在 P' 所张之角为 $d\varphi$，则有它在 Γ_0 和半径为 $\overline{Q_1P'}$ 的半圆上的投影

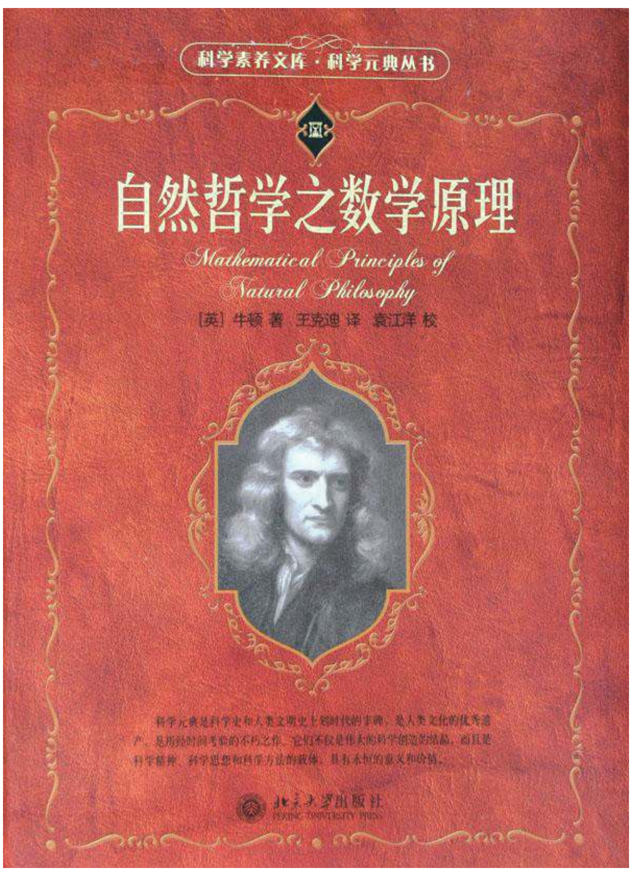
(14) $\widehat{Q_1'Q_2'} = d\varphi$, $\widehat{Q_1H} = \overline{Q_1P'}\,d\varphi$

而微小弧段所成的微小 ΔQ_1Q_2H 在 Q_1 的角度也是 α。所以有

(15) $\widehat{Q_1Q_2} \doteq \sec\alpha\,\widehat{Q_1H} = \sec\alpha\,\overline{Q_1P'}\,d\varphi$

令 $S\left(\widehat{Q_1Q_2}\right)$ 和 $S\left(\widehat{Q_1'Q_2'}\right)$ 分别是微段 $\widehat{Q_1Q_2}$ 和 $\widehat{Q_1'Q_2'}$ 在绕 OP 轴旋转所生成的环形窄条，则有下述面积公式：

(16)
$$\begin{aligned}\left|S\left(\widehat{Q_1Q_2}\right)\right| &\doteq 2\pi\overline{Q_1F_1}\cdot\widehat{Q_1Q_2}\\ &= 2\pi\overline{Q_1P'}\sin\varphi\cdot\sec\alpha\,\overline{Q_1P'}\,d\varphi\\ &= \sec\alpha\,\overline{Q_1P'}^2\,2\pi\sin\varphi\,d\varphi\\ &= \sec\alpha\,\overline{Q_1P'}^2\cdot\left|S\left(\widehat{Q_1'Q_2'}\right)\right|\end{aligned}$$



《原理》，牛顿的辉煌巨著

因此 $S\left(\widehat{Q_1Q_2}\right)$ 所施于质点 P 的总引力为

(17)
$$\begin{aligned}&\cos\alpha\cdot G\cdot\frac{\left|S\left(\widehat{Q_1Q_2}\right)\right|\cdot\rho\cdot m}{\overline{Q_1P}^2}\\ &= G\rho m\cdot\frac{\overline{Q_1P'}^2\left|S\left(\widehat{Q_1'Q_2'}\right)\right|}{\overline{Q_1P}^2} = G\rho m\cdot\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\left|S\left(\widehat{Q_1'Q_2'}\right)\right|\end{aligned}$$

由此易见球面 Ω 施于质点的总引力为

(18)
$$\begin{aligned}&\sum\cos\alpha\,G\frac{\left|S\left(\widehat{Q_1Q_2}\right)\right|\cdot\rho\cdot m}{\overline{Q_1P}^2}\\ &= G\rho m\frac{R^2}{\overline{OP}^2}\sum\left|S\left(\widehat{Q_1'Q_2'}\right)\right| = G\frac{4\pi R^2\rho\cdot m}{\overline{OP}^2}\\ &= G\frac{M\cdot m}{\overline{OP}^2},\quad M = 4\pi R^2\rho\ (\Omega\text{ 的总质量})\end{aligned}$$

〔注〕：上述证明和两千多年前阿基米德对于球面面积等于 $4\pi R^2$ 的证明有异曲同工之妙，充分展现有关于球面的积分求和之艺术。再者，上述论证不但初等简洁，而且也明确展现了球对称和平方反比律之间的如何密切配合。

§7. 结语

从毕氏学派到牛顿《原理》，理性文明世代相承精益求精经历了两千多年的进化历程；而几何学、天文学和物理学则是其中的主轴与主角，研究和地球同为太阳系行星的运行的“千古之谜”则又是贯串全局的核心议题。纵观全局，古希腊几何基础论开普勒的《新天文学》和牛顿的《原理》乃是分别在几何学、天文学和物理学上重大突破，是理性文明两千年的三个伟大里程碑。本文对于三者各作简朴扼要的重访。读者可以从它们的概述与重访中看到，几何学、天文学和物理学密切相连，相辅相成；而且上述三个重大突破都经历了迷途知返才脱胎换骨，得建辉煌；几何基础初论在可公度性上的误判，天文学上误入地心论之歧途两千年和物理学上亚里斯多德误导两千年，此事值得我们深刻反思。两千多年的理性文明发展史是一个极大课题。其中富有启发，值得深思之处极多，这篇短文以及我们合写的小册子（《千古之谜与几何天文物理两千年》），仅仅是概述其中之一、二，意在抛砖引玉。在此且以下述几点注记作结：

(1) 几何学因为量天的要求而立论严格，虽经挫折但能迷途而返，浴火重生，得见精深（希伯克斯，欧都克斯）。

天文学上的量天巨梦所致力者就是要从行星的视运动（亦即它们在星际的行踪）的实测数据去理解太阳系永恒之舞的规律何在？此事一直到哥伯尼、第谷、开普勒各尽具毕生之力的巨棒三接力，才圆了量天巨梦。如今回顾反思，其实几何学也只有在研究太阳系永恒之舞上才真正有用武之地。因为太阳系之外的天体和地球的距离都极为遥远，其视运动几乎就是不动之点！

若改用物理学的观点来看，太阳系永恒之舞，其实是大自然一直在展现着一个“大实验”。我们所要研究探讨者是其中蕴含的本质 (physical causes)。其实古代的物理学家（例如亚里斯多德）想要研究者主要是“天文之理”，但是在其规律还是“千古之谜”的实况下，就只能泛泛空谈地形而上一番。如今回顾反思，物理学要等到千古之谜得解（开氏行星律）之后，才真正上路，实非偶然。再者，也只有把行星定律再精益求精到至精至简的万有引力定律，理性文明才能够真正跨出太阳系，拓展到几何观察力所不及的太空。

(2) 面积律：在开普勒的探索历程中，地球面积律是首先被发现者，而且它又是他往后继续发现火星的面积律、椭圆律以及整个体系的坚实基础。同样的，在牛顿的工作中，对于面积律的数理内涵乃是其力向心也是他得窥精深的首要突破点。如今回顾反思，它就是力学中极为简朴的角动量守恒律 (conservation of angular momentum)，它是运动和绕中心旋转对称性相互作用的产物。

(3) 从量天有术到秤地（以及太阳）有法：开普勒行星定律是量天有术的辉煌成果。由此精益求精而得万有引力定律，则使得我们能够估算地球（以及太阳）的质量，亦即秤地（以及太阳）有法了！为什么呢？由地心引力公式

$$|\vec{F}| = G\frac{Mm}{R^2} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = G\frac{M}{R^2} = 9.8\text{米}/\text{秒}^2$$

考文迪什，(Henry Cavendish，1731-1810)，英国物理学家和化学家；精确测量了地球的密度。被认为是牛顿之后英国最伟大的科学家之一。

其中 G 是（万有）引力常数，R 是地球之半径，M 则是地球之总质量。所以若能用实验测得 G 之值，即可用下式推算地球之重：

$$M = |\vec{a}| \cdot \frac{R^2}{G}$$

这就是著名的凯文迪希 (Cavendish) 实验所测定者，他也就被尊称为第一位秤地球的科学家。

再者，只要再测算地球绕日在近日点的向心加速度，则又可以用上述 G 之值推算太阳的质量。归根究底，这多是精益求精的数理分析之功，其简朴有力，引人入胜之妙，于此可见一斑。一如毕氏远在两千五百年前创导的卓见：基础数学一直在理性文明中扮演着核心的角色，数学与文明，水乳交融，平实近人，引人入胜！

作者介绍：

项武义，台湾大学本科毕业，普林斯顿大学博士，著名数学家，美国伯克利加州大学教授。研究领域为微分几何。除学术成就外，在数学教学法上也颇有建树。经常于两岸三地讲学与交流。教学心得包括在《基础数学讲义》的三卷本《基础代数学》、《基础几何学》与《基础分析学》等。

宋美龄和希拉里•克林顿的母校，韦尔斯理女子学院。

中美大学教育比较

丁玖

我在中国南京大学读到硕士学位，留校教书一年半，又去美国读了博士学位，后留美教书至今。我经历过中美两个国家的教育，知道两个国家教育的特点是什么，优缺点如何。所以，我将尽量客观地反映这两个国家高等教育的情况，但主要谈谈美国大学教育的一些特点。

讲到美国的大学教育，我联想到几年前，1957年诺贝尔物理奖获得者、美国纽约州立大学石溪校区“爱因斯坦讲座教授”席位上退休后回大陆定居并教过清华大学一年级物理的杨振宁曾经这样讲过，“清华大学的学生不比哈佛大学的学生差”。但是几乎

同时，1982 年菲尔茨奖获得者、哈佛大学数学系教授丘成桐却说，“在中国听说美国大学生的数学特别差，但是我的感觉是美国好学生的数学好得真是不得了”。所以，不同的人有不同的看法，到底谁更正确，就好像是瞎子摸象，看上去都有点片面性，但每个人讲的似乎都有些道理。那我们就从美国教育的具体情况，看看我们对美国的教育到底有哪些观察和想法。有什么地方值得我们借鉴的，值得我们学习的。

美国高等教育的结构

美国的基础教育是 12 年：小学 5 年，初中 3 年，高中 4 年。美国有多少所高等院校？我们无法考证精确的数字，大约在 3500-4000 所。但是大部分学校是面向社会的，培养应用型人才。根据《美国新闻与世界报道》杂志的归类法，研究型大学总数比较起来并不是很多，大约 300 所左右。什么是研究型大学，他们有具体指标。一个大学如果有学科齐全的本科、硕士和博士研究生教育，并立足于突破性研究，那么它就是研究型大学，称为“国家型大学”(National Universities)，哈佛、普林斯顿位居榜首，我执教的南密西西比大学(University of Southern Mississippi) 也榜上有名。如果你的学校有学科齐全的本科专业，生产一定数目的硕士学位，但只有很少的博士学位，那就是“硕士型大学”(Master’s Universities)。美国有 600 多所这样的大学。剩下的本科院校要有一定比例的学士学位。还有一部分学院生产一半以上的“人文学科”学士学位，故称之为“人文学院”(Liberal Arts Colleges)，有 200 多所。几年前一名江苏扬州女生被人文学院中排名相当靠前，位于美国依阿华州的格林奈尔学院 (Grinnell College) 录取并获 4 年全额奖学金，《扬州晚报》以“美国名校百万元挖走扬州女孩”标题报道之。该校只有两千左右学生，却有高达大约十亿美元左右的基金，故它有雄厚财力在全世界范围内招收一些需要奖学金资助读书的优秀学生。美国前总统克林顿的太太、现任国务卿希拉里•克林顿的本科母校韦尔斯理女子学院 (Wellesley College) 是一所更为出色的人文学院，宋美龄毕业于此，谢冰心则修过它的文学硕士学位。

美国更多的大专院校是两年制的社区学院 (Community Colleges) 和一些职业学校或专门学校，如著名的朱丽叶音乐学院 (The Julliard School)。美国没有体育学院，运动员的成长主要靠个人兴趣和私人赞助。美国大约有 1000 多所社区学院。这些学校的学费相对便宜。两年后可获大专学位 (Associate Degree)，一部分毕业生可转到本科院校继续学习，学分照算，另一部分毕业生以他们学以致用的知识和技能直接进入工作岗位。如我大学附近的一所名叫“珍珠河社区学院 ”(Pearl River Community College) 设有“牙齿卫生”专业，工作机会很好，因美国人定期洗牙，已成习惯。

美国因是联邦制，没有国立大学，只有私立大学和州立 (公立) 大学之分。私立大学教育经费与政府无关，学费颇贵，尤其是名校，已达每学年 40000 美金以上。州立大学教育经费源于本州纳税人的钱，由州政府拨款，来自州内居民家庭的学生可减免学费，如我教书的这所学校一学年要交“州内学费”约 5000 美金。来自州外的学生，包括外国学生，如无奖学金资助，所有费用中除了州内学费以外还要缴纳一倍以上的“州外学费”，如我的学校“州内 + 州外学费”总共约为 12000 美金。美国教育部不像中国教育部那么管得“事无巨细，面面俱到”，只是协调管理机构，基本无权干涉各州的教育事务，对高等院校更几乎“不闻不问”。

美国的教育是很实用的，是为社会培养实用性人才的。无论何种学校、何种学科，一直对人文教育非常重视，因为人文知识是做人的基础、道德的载体。美国 19 世纪末开始强大起来，先是以农业现代化为主要目标，然后是工业现代化，大学在当中起了极其重要的作用。我当初念博士学位的那个学校叫密西根州立大学 (Michigan State University)。它 1855 年建校，开始叫密西根农学院，是美国第一家“政府授地”大学，也是美国第一所正规

格林奈尔学院（Grinnell College）

教授农业科学的高等院校，后来改名为密西根农业和应用科学大学。该校历史上最杰出的校长是 John A. Hannah（1941-1969 在位），卸任后做过联合国副秘书长。他在任时学校改为现名，并发展成为美国最好、最美丽、规模最大的公立大学之一。

自由发展的美国大学教育

美国大学生进校后，他们是如何被培养的呢？我当初到美国念书，在读博士的同时做教学助理，每周 20 小时工作量，属“勤工俭学”，挣够学费生活费，性质和国内的助教不大一样。美国教授教基础课，比如微积分，上大课，但每周要安排 2 个小时答疑，上习题课，我就负责答疑、上习题课这个工作。我当时想当然地认为，美国是最先进的国家，大概每个学生数学都特别棒。在给大学生上习题课的时候，我很惊讶地发现，my God，他们问的问题有时候就类似于“1/2+1/3 等于几”这么简单的中国小学生算术问题。如果仅看到这一点，你会觉得美国学生太差了。这样看，“清华大学”当然比“哈佛大学”强，但这仅仅是一个指标。

美国的教育是通才教育，它让你自由发展，这是教育的最基本要求。大学教育并不只是对某个技能的教育，不光只学“数理化”，它让你有广阔的视野，这是美国教育和中国教育明显的区别之一。大学中不管文科、理科、工科，人人必修的核心课程包含不少“文史哲”，要读大量从古希腊、古罗马到近、现代伟大哲学家、诗人、文学家、历史学家等流芳万世的著作。故美国大学生大都能言善辩，常见的校园集会上不乏口若悬河、鼓动人心的演讲家。这就是为何美国当选总统奥巴马的就职演说那么能打动人心！可是，谈到理工科基础知识，如数学、物理、化学，美国那些将来不去读研究生院的学生们普遍比中国同类大学生薄弱，因为美国大学生在中学时不会用大量的时间去做大量的习题，宁

韦尔斯理女子学院校园一角

可去享受大自然，因为青春是那么的美好。杨振宁先生曾经说过这样的话，美国教育对前百分之五十的人有效，中国教育对后百分之五十的人有效。意思就是中国教育让你多训练，你本来不太懂的让你搞懂了或表面上搞懂了，但这种方法对那些反应比较快的或者能力强的人是不适用的。美国中学阶段对学生的数理化基础知识掌握要求并不太高，高中只有代数、几何算必修，代数不强求背公式，几何也不大教证明，三角对许多州属选修课，但对英文演讲写作训练的要求较高。学校设有很多的选修课，让你按照自己的兴趣发展。我看过伟大的美国遗传学家摩尔根（Thomas Morgan, 1866-1945）的传记，他对生物的兴趣就是从小时候特别喜欢动物开始的。所以兴趣大于一切，好奇心就是在兴趣中产生出来的。美国的教育就是让你对什么有兴趣就让你在哪方面发展，不会压制你的潜力。

培养会思考的人才

美国的一般大学生不知道很深的数学，难道你说他笨吗？我的一位朋友在韦尔斯理女子学院数学系当教授，他说那里的大部分女生（不包括中国去的好学生）连解一元二次方程的求根公式都背不得。几年前他请我去他那里做一数学讲座，之前关照我“讲浅点”。难道克林顿太太或该校因嫁人而肄业的老布什太太在你心目中“陡降三级”？你把中国人和美国人放在一起，大家都不笨，都很聪明。中国的学生为了高考，大量的时间用在像机器一样做习题上，某种意义上讲，做了大量无用功，就像鲁迅小说中的孔乙已虽然知道“茴”字有四种写法，沾沾自喜，但对社会用处不大。2003年秋我学术休假期间应邀在国内某知名大学用英文讲数学课，用的是美国最好的教材之一，美国布朗大学教授Phillip Davis的名著《插值与逼近》。我在教的当中，布置了一道测验概念理解的题目，可用一个基本思想简单做之，这就是高中代数中的“代数基本定理”，即任意一个非常数多项式必定有一个复数根，推而广之，任意一个n阶多项式必定有n个根。绝大多数人没有想到这个基本定理，做不出来，但是跟高考有关的多项式题目他们高中就做出来了。这是“一刀切”的高考制度造成的“不善于思考性”，不善于知识的融会贯通。要想到考试不是人生的目的，人也不是为考试而生的。

我有次回国，在飞机上和我邻座，毕业于美国第一家公立大学——北卡大学教堂山校区（University of North Carolina at Chapel Hill）历史系，常来广东指导家具生产的一位美国绅士Russ Childress先生聊到中国的教育。他说，他曾在北京某大学教过物理的美国朋友这样比较中美学生：当老师讲二加二等于四时，美国学生甲说“我

不相信它”，乙请老师证明它，丙问为啥二加二不等于五，而中国学生则记住了“二加二等于四”这一公式。这一形象的比喻听得我哈哈大笑。

大学的功能应当是培养会思考的人才，而不是仅仅会背书的庸才。爱因斯坦曾对一位问他声音在空气中跑得有多快的年轻人说，“对不起，我不记得了，但你可在任何一本物理教科书中找到。”上世纪下半叶最伟大的美国物理学家费恩曼（Richard Feynman, 1918-1988）的故事激励了一代又一代学生；他始终强调思考的重要性；他小时候就来回踱步，用大脑不停地思考，替别人家大人修好了反常的收音机；他认为死记硬背往往只知道名称而不知道内涵。费恩曼虽然是个理论物理学家，但他的动手能力也非常强。他发现了 1986 年美国航天飞机失事的原因，并通过那简单而著名的“冰水橡胶实验”证明了他的观点。这件事轰动了全美国，使普通美国人也在电视上见识了这位以“量子动力学 ”成就而获得诺贝尔物理奖的纯粹理论家怎样玩实验。美国大学的教材理论联系实际，应用题甚多，便于培养学生动手能力，增加全方位思维空间。我觉得中国的大学应该更用心地培养学生的头脑思考能力和实际动手能力，而不要仅仅把灌输知识放在第一位。应该鼓励学生不循规蹈矩，不相信权威，敢于挑战权威，敢于怀疑一切。只有善于提问，才能去解决问题。我认为在理解思想而不是囫囵吞枣的基础上，知识面广了以后就可以触类旁通，举一反三，发现问题，创造性思维地解决问题。这是素质教育中的一个重点。

文理并茂的教育理念

所谓的“绿色教育”理念之一，就是把形象思维和逻辑思维有机结合起来。中国某些高校现在开始强调“绿色教育”，包括人文教育，因为这些东西在中学阶段没有被很好地解决。而美国在中学阶段已经把这些问题基本解决了，没有分“文科班”和“理科班”之说。文理知识并举、课程设置合理、通才教育盛行，大学生们很强的语言交流能力从中学就已训练出来。大学更是对人文教育加大火力，大力弘扬独立思考，无情杜绝人云亦云。在美国的人文课堂里，死记硬背没有市场，激烈争辩必不可少。我非常反对国内高中文理分科，以为其效果无异于古代强迫把女孩的“天足”缠成“三寸金莲”。

国内教育界有识之士早已呼吁理工科大学生加强人文训练，这好理解，至少好的文笔让他们的文字表达、科学论述增辉，吸引更多读者，岂不令人快哉？从我自己的经历，我觉得形象思维的培养对逻辑思维的提高极有帮助。当年我在中国的理工科大学生中是比较喜欢文科的。我一直喜读人文作品，让我的脑子和我一样快乐起来，与我的本职工作相辅相成。我 2008 年 5 月在中国科学院计算数学研究所访问期间，与该所研究生同去爬山。一位南开大学学经济的三年级大学生，在山顶上跟我聊了一会儿。后来他给我来电子信，说跟我“聊了一小时，胜读十年书”。当然这是他谦虚的说法。因为我是搞数学的，他发现在很多关于人文学科的讨论中我都能给他一些有启发的见解。

另一方面，曾有人问我文科大学生有必要学习一些自然科学的课程吗？我认为很有必要。就像形象思维的培养帮助理科类的学生能写出文笔通畅的学术论文，能够与人有更好的语言交流沟通，逻辑思维的训练提高文科类学生分析问题的能力，理解现代科技的发展。比如记者有时要写关于理工科方面的文章，如果他们没有一定的数学与自然科学方面的基础知识和逻辑思维能力，是写不好这些文章的。美国记者格莱克（James

克林顿于今年在格林奈尔学院（Grinnell College）的体育馆里演讲。

关于诺贝尔物理奖获得者费恩曼的书

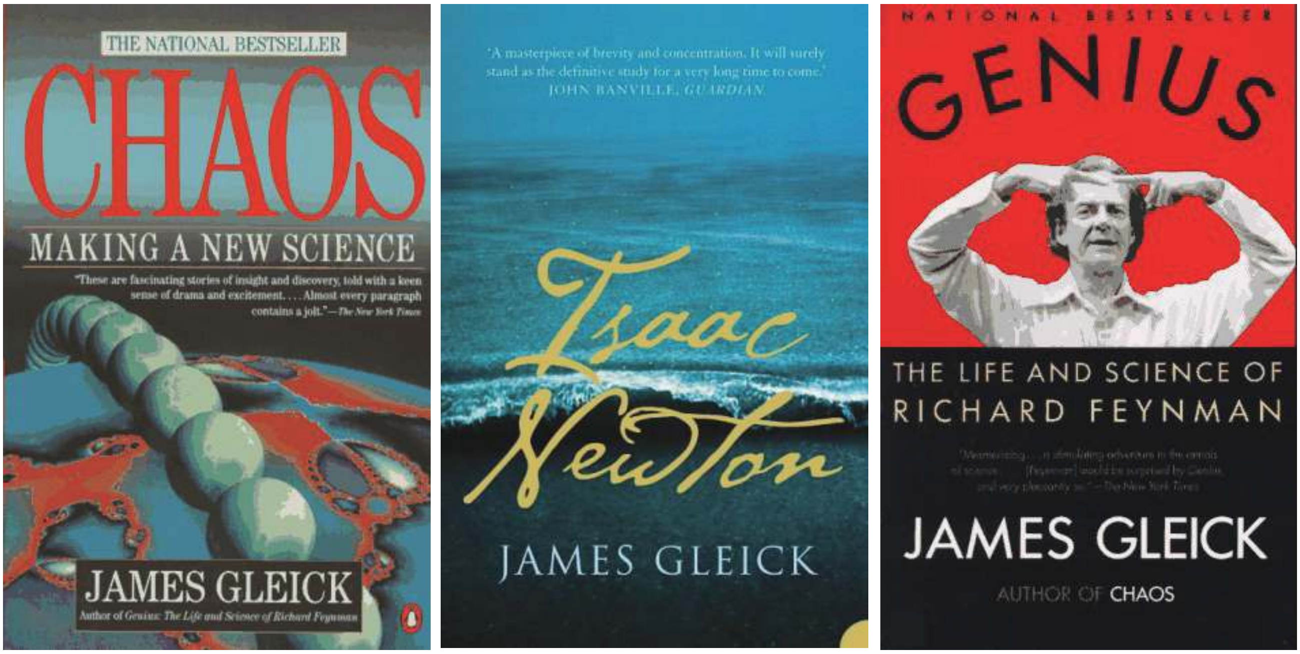
Gleick）哈佛本科毕业，80年代写的《混沌：一门新学科》（Chaos: Making New Science；中译本由中科院理论物理研究所前所长郝柏林先生等人翻译出版）和90年代出版的《天才：费恩曼的一生和科学生涯》（Genius: the Life and Science of Richard Feynman）都是关于科学发现和科学家生涯的。他是文科出身，但若无理科的熏陶和对科学的一往情深，怎能写出如此激动人心的畅销书来？

贡献社会的人生目的

美国大学生不是把考试当成目的，而是把求知实用当成目的。进入大学后，公共基础课五花八门，你会感到很奇怪，还有代数，还有三角函数，这在中国大学里早就不见了。在美国任何一个州立大学都有美其名曰为“学院代数”的中学代数，因为好多学生高中代数没有过关，要补课。这是一个很有趣的问题。为什么美国大学生数学普遍这么差，这还算大学生吗？回答是现代社会不需要每个人都全像爱因斯坦，都变成杨振宁。都成为他们，就会天下大乱！社会需要的是各种各样的人才，需要的是有正确思想、有健康身体、有责任感的人，而不是会背一百个代数恒等式的自私自利者或寄生虫。

美国人没有名校情结，他们按自己的兴趣和爱好去选择学校，家长会顺其自然。几年前，我的博士学位导师被他的博士学位导师请去参加他儿子结婚典礼。回来后他在电话中对我说：“我感慨万千，我的老师是大名鼎鼎的数学家，他太太是物理学博士，在生物医学领域颇有建树，但他们的儿子大学都没有毕业，退学了，在沃尔玛商店工作，但从他们夫妇眼里一点也看不出对儿子的失望，他们为儿子高兴，因为儿子很幸福地生活。”当然进名校读书不是坏事，但他的兴趣如果不在上面，不进名校难道就是坏事吗？从这个例子上我们看到这不是坏事。美国家长认为只要孩子能为社会做出贡献，幸福快乐地生活，即使没有去名校念书，即使大学没有毕业也没多大关系。

美国的大学生把对社会做贡献作为人生目标之一。尽管我们看到他们数学成绩一般较差，运算能力也不太强，但他们中学、大学学到了一种社会的责任感。首先是做人，知识是次要的，做人是根本的。美国大学录取新生不仅看学生的高中成绩和像SAT和ACT这样的英文、数学水平测试（这个测试对应于中国的高考，但是我们除了高考没有第二个第三个等等的录取指标），还要看他们课外大量阅读或独立研究的有关信息，还要看他们艺术、音乐、或体育等方面的爱好及成就，还要看他们如何为社区献出时间无偿服务的情况，还要看他们是否具有领导才能和团队精神，越是好学校越看中这些综合素质。美国各校招生没有“一刀切”的情况，他们没有规定SAT或ACT最低分要求，因为他们不仅要看学生的考试分数，还要看他们的道德品质，还从他们提交的



美国记者 James Gleick 写的三本畅销书：混沌，牛顿，费恩曼

天马行空、五花八门的作文（Essays）捕捉他们的心灵和社会责任感。这一点特别重要，尤其是在名校。所以在美国，尽管一般大学生数学不太好，但是它注重培养有健全人格的人，会学以致用的人，因而对社会既作贡献又有快乐人生的人。

相比起来，中国的儒家文化传统留给现代教育的糟粕之一可以一句古诗“书中自有黄金屋，书中自有颜如玉”来蔽之。对很多家长来说，孩子读书的真正目的不是为了“人类的进步”，而是为了“升官发财”、“光宗耀祖”。“劳心者治人，劳力者治于人”是历史上一直盛行、现阶段依然流行的“八股文教学法”最大的动力。历史的惯性留给我们功利主义的教育目的。几年前，一位南京大学毕业的美国伊利偌依大学化学博士将她的观察归结为一句话：“中国人不读书，只读教科书。” 真是精辟之至。教科书与考试相关，而目前铺天盖地的应试教育把教科书提升到无以伦比的高度。譬如，为考上替父母增光的“清华北大”，众多学子从幼儿园到高中拼命死啃堆积成山的教科书和考试辅导书；为考上待遇诱人的政府公务员，一部分平时远离书籍的人也和备考学习指导书暂时热恋起来；为了在还不够风雅的乌纱帽上再套上一顶博士帽，某些一贯“无暇”读书的官员也纷纷成了大学教授的宠儿。如此等等，中国教育界仍然笼罩在封建思想的迷雾中。

记得梁漱溟在其著作《中国文化要义》中指出，中国文化以家族为中心，而西方文化则以社会为中心。具有五千年文明史、产生过伟大教育家孔夫子的中华民族若想与欧美强国在本世纪并驾齐驱，甚至超越，就要敢于与传统决裂，抛弃“小我”，追求“大我”。莘莘学子们，不要满足于为自己“望子成龙”的父母提供向左邻右舍炫耀的资本，而要聆听一下比尔•盖茨对哈佛毕业生的呼唤：你们应该想想一生中怎么为全世界的贫苦人谋幸福。这才是最好的教育定义的人生目的。

初稿写于中科院计算数学研究所
2008 年 12 月

完稿于美国哈蒂斯堡市
2010 年 8 月

注：作者为美国南密西西比大学数学系教授。本文根据作者 2008 年 11 月 26 日在扬州环境资源技术学院所作的演讲修改成文。

通讯地址：江苏省扬州市淮海路 42-2，104 室 丁椿 转 丁玖。
电子信箱：jiudin@gmail.com

聊聊数学家的故事

ukim

（连载三）

写给那些，喜欢数学和不喜欢数学的人们

写给那些，了解数学家和不了解数学家的人们

故事十一：爱因斯坦和数学家的故事

意大利的数学家列维奇维塔（Levi-Civita）在弯曲空间上的几何学上做出了突出的贡献。爱因斯坦描述广义相对论所用的数学就是这种几何学。所以，有人问爱因斯坦他最喜欢意大利的什么，他回答是意大利的细条实心面和列维奇维塔。

明可夫斯基（Minkowski）曾是爱因斯坦的老师。那时，爱因斯坦旷过无穷多的课，以至于多年后，明可夫斯基得知爱因斯坦的理论时，不禁感叹道：“噢，爱因斯坦，总是不来上课——我真想不到他能有这样的作为。”

一次，哈尔莫斯（P. Halmos）和妻子遇到了爱因斯坦和他的助手。爱因斯坦很想知道“她”是谁，助手就说是哈尔莫斯的妻子。

然后爱因斯坦又问哈尔莫斯是谁……这是哈尔莫斯最没有面子的一次。

故事十二：冯·诺伊曼的故事（1）

讲完了爱因斯坦，接着讲冯·诺伊曼这个造计算机的数学家应该是符合道理的。当我们每次用电脑打游戏的时候，就应该对冯·诺伊曼示以最崇高的敬意。

冯·诺伊曼的就业态度：冯·诺伊曼移居美国的动机，很是特别。他用了一种自己认为合理的方法，发现在德国将来的3年中，教授职位的期望值是3，而候补人数的期望为40，这是一个不理想的就业前景，所以到美国去势在必行。这就是他的根据，当时并没有涉及到政治形势。

冯·诺伊曼曾经被问到一个估计连中国小学生都很熟的问题——两个人相向而行，中间有一只狗跑来跑去，问两个人相遇之后，狗走了多少米的这种。应该是先求出相遇的时间，再乘狗的速度就得到答案了。如果没有记错的话，小时候听说苏步青先生在德国的一个公共汽车上，也被人问到这个问题，他老人家当然不会感到有什么困难了。冯·诺伊曼也是瞬间给出了答案。提问的人很失望，说你以前一定听说过这个诀窍吧（他指的是上面的这个解法）！冯·诺伊曼说：“什么诀窍？我所做的就是把狗每次跑的都算出来，然后算出那个无穷的级数……”

冯·诺伊曼（1903-1957），天才数学家

故事十三：冯·诺伊曼的故事（2）

1927 年，巴拿赫 (Banach, 波兰天才数学家) 参加了一个数学聚会，他伙同众多数学家，一起用伏特加酒灌冯 • 诺伊曼。冯 • 诺伊曼最终不胜酒力，跑去厕所，估计是去呕吐。但是巴拿赫回忆道，当冯 • 诺伊曼回来继续讨论数学的时候，他的思路丝毫没有受到影响。

巴拿赫 (1892-1945)

冯 • 诺伊曼的年纪比乌拉姆 (Ulam) 要大一些，不过两个人是最好的朋友，而且经常在一起谈论女人。他们坐船旅行时，除了讨论数学，就是旁边的美女。每次冯 • 诺伊曼都会说：“她们并非完美的。”一次，他们在一个咖啡馆里吃东西，一位女士优雅地走过。冯·诺伊曼认出她来，并和她交谈了几句。他告诉乌拉姆，那是他的一位老朋友，刚离婚。乌拉姆就问：“你干吗不娶她？”后来，他们两个真的结了婚。

一次，普林斯顿举行物理演讲，演讲者拿出一个幻灯片，上面极为分散地排列着一些实验数据，并且他还试图说明这些数据是在一条曲线上。冯 • 诺伊曼大概很不感兴趣，低声抱怨道：“至少它们是在同一个平面上。”

故事十四：天才数学家

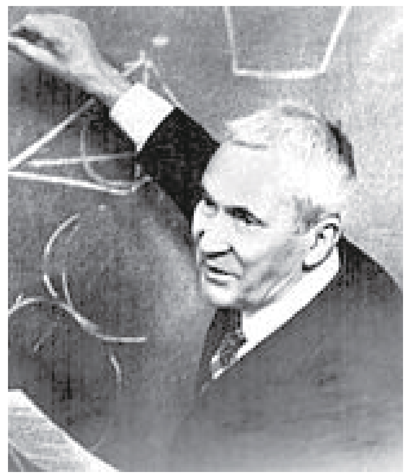
下面是历史上最天才的几个数学家在时间轴上存在的长度：法国数学家帕斯卡 (Pascal)——39 岁；印度数学家拉马努金 (Ramanujan)——31 岁；挪威数学家阿贝尔 (Abel)——27 岁；法国数学家伽罗华 (Galois)——21 岁；德国数学家黎曼 (Riemann)——39 岁。由此可见，身体很重要。

据说，帕斯卡 14 岁的时候，就已经出席了法国高级数学家的聚会；18 岁时，发明了一台计算机，也就是现在计算机的始祖。尽管如此，帕斯卡成年之后最终致力于神学。他认为上帝对他的安排之中不包含数学，所以就完全放弃了数学。35 岁的时候，帕斯卡牙疼，不得不思考一点数学问题来打发时间。不知不觉间，竟然疼痛全无。帕斯卡认为这是上天的安排，所以又开始做数学家。然而，帕斯卡这次复出的时间不到一周，但是他已经发现旋轮线最基本的一些性质。而后，他继续研究神学。神学也是牛顿最终的选择。

帕斯卡（1623-1662），法国数学家

故事十五：两位姓柯的数学家

柯尔莫戈洛夫 (Kolmogorov) 是前苏联最伟大的数学家之一，在很多的领域都做出了开创性的工作；柯西 (Cauchy) 就不用介绍了——从中学开始，我们就已经认识了这个法国人。今天我们来说说这两个姓柯的牛人。



柯尔莫戈洛夫 (1903-1987)，前苏联数学家。

首先说柯尔莫戈洛夫关于数学天赋的见解；当然，很大程度上我认为他想通过这段论述来吹嘘一下，要知道后面那个亚历山大罗夫 (Aleksandrov) 是很伟大的一个数学家。柯牛人认为，一个人作为普通人的发展阶段终止得越早，这个人的数学天赋就越高。“我们最天才的数学家，在四五岁的时候，就终止了一半才能的发展了，那正是人成长中热衷于割断昆虫的腿和翅膀的时期。”柯尔莫戈洛夫认为自己 13 岁才终止了普通人的发展，开始成长为数学家；而亚历山大罗夫是 16 岁。

拉格朗日 (Lagrange) 曾经预见了柯西的天才，苦心地告诫柯西的父亲，一定不要让柯西在十七岁之前接

触任何数学书籍。这个非常像当年某些人不让张无忌学武功（好像有点不恰当）。

柯西（1789-1857），法国数学家

故事十六：数学家作为教师的生涯

大部分出名的人物讲课都不太出色，或者说偶尔会很失败，譬如牛顿。他当初经常面对着空空的讲堂，因为他讲的东西一是不太清楚，二是太难，所以剑桥的学生没有人喜欢他的课。

从一些大家不是太熟悉的人讲起。孟得尔布罗特 (B. Mondelbrolt, 1924-2010) 是靠画分形出名的。而他的叔叔曼得尔布罗特 (Mandelbrojt) 是个更为出色的数学家，曾经是布尔巴基 (Bourbaki) 最早的几个成员之一。叔叔做学生的时候，大老远从波兰到法国读数学，然而去了之后，却在精神上受到了严重的伤害，因为他选了古尔萨 (Goursat) 的分析课。古尔萨在课上永远用一种语气，讲述二三十年前就有的旧东西。听了三周左右的课，曼得尔布罗特感觉和自己梦想当中的相差甚远，竟然哭了出来。几年后，伯恩斯坦来到巴黎，安慰他说古尔萨二十多年前就这么讲课。不过古尔萨对人是很热情的。遥想当年曼得尔布罗特那求知的热情，是多么的纯真。那种东西，似乎再也不属于我们这个时代了。

其实还是有讲课不错的数学家的。尽管勒贝格 (Lebesgue) 开始研究的东西很奇怪，不过他讲的课确是出奇地受欢迎；皮卡 (Picard) 则是个古怪高傲的人，他和老丈人厄米特 (Hermite) 都对分析很感兴趣。和勒贝格在一起，是一件很开心的事。据说，勒贝格的课总是有无穷多的人去听，其中大部分人是因为勒贝格讲课不但深刻，而且很有意思。一次，一个国外的学者来法国报告自己的工作，勒贝格说你不用报告了，我替你报告吧。

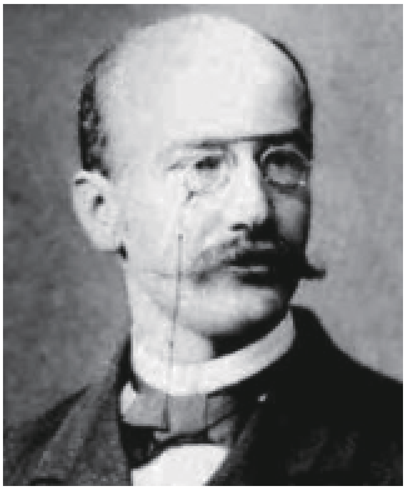
皮卡 (Picard) 总给人一种高不可攀的感觉，令人不敢接近。每次皮卡上课的时候，前面总有一个戴着银链子的校役引路，他高傲地踱入教室，喝一口放在椅子上的水杯中的水，然后开始讲课，大约半个小时，他再喝一口水，一个小时以后，那个戴银链子的校役就会来请他下课。

据说，证明了 π 的超越性的林德曼 (Lindemann) 是历史上讲课最烂的几个人之一。此处收集有关他的故事两则，一个是说他讲课，另一个是回忆他在巴黎求学的两件小事，还是蛮可爱的。

传说大部分情况下，林德曼讲的课根本就听不清；听清的部分大多是不可理解的，听不懂的话；少数情况下，他讲的又清楚又让人听得懂的话往往又是错话。林德曼到巴黎学习的时候，听过伯特兰 (Bertrand) 和约当 (Jordan) 的课。当时学数学的人很少，尽管约当在法国也算是领袖级的数学家，但听他课的人只有 3 个，偶尔会达到 4 个，其中一个还是因为教室里暖和。林德曼还曾拜访过厄米特，厄米特家里有一把椅子，是当年雅可比（Jacobi）坐过的。这让林德曼很难忘。

罗塔 (Rota) 曾讲了一个有关莱夫谢茨的故事，关于他的课是如何难懂的故事。莱夫谢茨讲话经常语无伦次，他在几何课上的开场白如下：“一个黎曼曲面是一定形式的豪斯道夫 (Hausdroff) 空间。你们知道豪斯道夫空间是什么吧？它也是紧的。好了，我猜想它也是一个流形。你们当然知道流形是什么，现在让我给你们讲一个不那么平凡的定理，黎曼 - 罗奇定理。”要知道第一节黎曼曲面的课如果这样进行的话，恐怕黎曼复生也未必可以听懂。

维纳 (Wiener) 尽管是个天才，却是不善于讲课的那种，总是以为把真正深刻的数学讲出来一定要写一大堆积分符号。有一个关于他和中文的故事：维纳天真地认为自己懂一种汉语。一次，在一家中国餐馆，他终于有了施展的机会，但是服务员却根本不知道他讲的是汉语。最后，维纳不得不评论道：“他必须离开这里，他不会说北京话……。”



林德曼 (1852-1939)，德国数学家

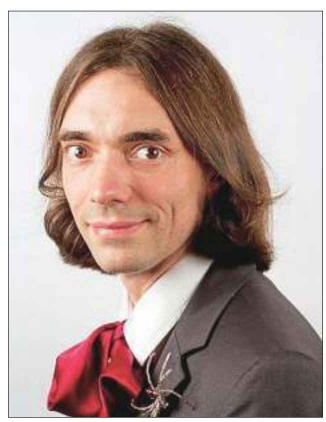
2010 年国际数学家大会授奖场面。前排左二至五：菲尔兹奖获得者 Elon Lindenstrauss，Stanislav Smirnov，Cédric Villani，吴宝珠。中间的女士是印度总统。

2010 年度菲尔兹奖授予吴宝珠等四位数学家

蒋迅

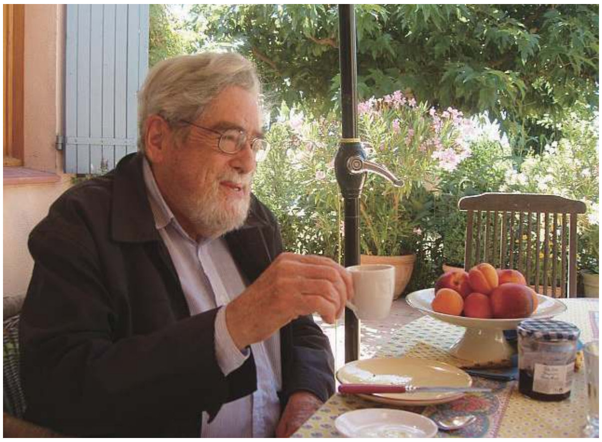
菲尔兹奖被认为是数学界的诺贝尔奖，每四年颁发一次，获奖者必须是未满四十岁的年轻数学家。在印度海德拉巴市 (Hyderabad) 举行的国际数学家大会上，本年度的菲尔兹奖授予了四位数学家：耶路撒冷希伯来大学的 Elon Lindenstrauss（40 岁），巴黎第十一大学的越南数学家吴宝珠（37 岁），日内瓦大学的俄罗斯数学家 Stanislav Smirnov（39 岁），法国庞加莱研究所的 Cedric Villani（36 岁）。国际数学联盟在颁奖词中称，Lindenstrauss 在遍历理论中取得了突出进展。而吴宝珠的贡献是证明了罗伯特•朗兰兹和戴安娜•谢尔斯塔德的基本引理，他年轻时曾经获得了第 29 届和第 30 届国际数学奥林匹克金牌，2005 年他成为巴黎第十一大学教授，目前在普林斯顿高等研究院从事研究工作；



从左至右依次为：Elon Lindenstrauss，吴宝珠，Stanislav Smirnov，Cedric Villani





从左至右依次为：Daniel Spielman，Yves Meyer，Louis Nirenberg。

Smirnov 的贡献在于统计物理学的研究；Villani 的成就是“在数学和物理之间建立深入联系，尤其是在熵的概念上”。国际数学家大会还宣布计算机科学相关的奈望林纳奖（Rolf Nevanlinna Prize），得主是耶鲁大学的 Daniel Spielman，以奖励他在线性规划和纠错码方面的贡献。应用数学相关的高斯奖授予了法国数学家 Yves Meyer，他在小波理论上的进展是 JPEG 2000 图像压缩标准的基础。新设立的奖金为 50 万美元的陈省身奖则授予了纽约大学的 Louis Nirenberg。

网络文摘

http://baike.baidu.com/view/4156056.htm

吴宝珠出生于学者家庭。他的父亲吴辉瑾（音）教授，是越南机学院的物理学家，研究流体力学，母亲陈刘云贤（音）副教授，在越南中央传统医学病院工作。

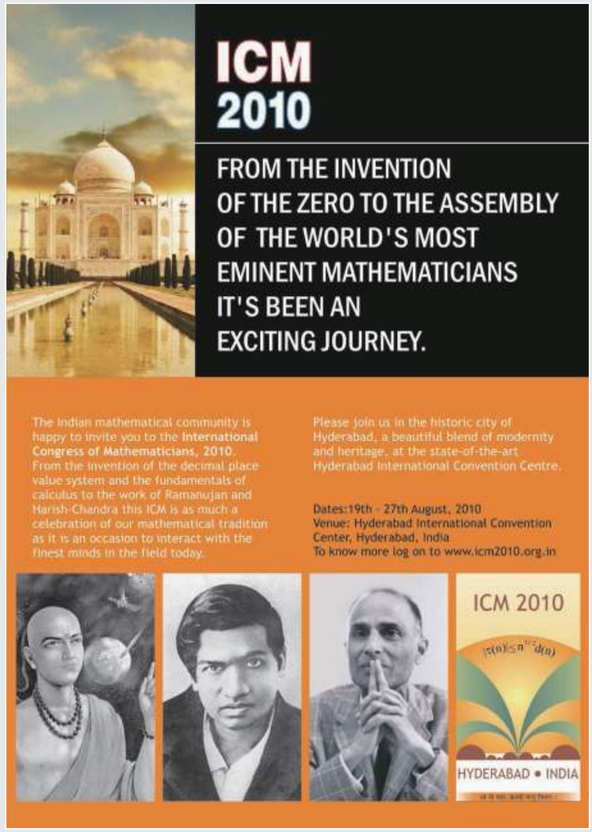
吴宝珠曾就读于讲武实验学校和征王基础中学。他 15 岁入读河内国家大学属下的河内自然科学大学的附属专科普通中学数学专修组。他参加第 29 届和第 30 届国际数学奥林匹克，连得两面金牌，是越南首位获此佳绩学生，第一次更得到满分 42 分。

吴宝珠高中毕业后，获法国政府奖学金赴巴黎第六大学就读，但他选择前往法国著名的高等师范学校就读。1997 年他获得巴黎第十一大学博士学位，指导教授为热拉尔 • 洛蒙。他从 1998 年起在法国国家科学研究中心作研究至 2005 年。2003 年他通过特许任教资格答辩。2005 年他成为巴黎第十一大学教授。他和洛蒙解决基本引理的酉群情形，2004 年同获克雷研究奖。2005 年他 33 岁时获得越南的教授衔，成为越南最年轻教授。2007 年获上沃尔法赫奖。2008 年吴宝珠终于解决基本引理的一般情形。多年来，不少人的研究都需假设基本引理正确，有了这项突破，这些研究成果得以完满确立。2010 年国际数学家大会上，他因此贡献得到菲尔兹奖。2010 年 9 月起任芝加哥大学教授。

http://sqing55.blog.163.com/

第 26 届国际数学家大会于 2010 年 8 月 19 日至 27 日在印度南部城市海德拉巴举行。越南数学家吴宝珠获得菲尔兹奖。本次获菲尔兹奖的共有四人，分别为：林登施特劳斯（E. Lindenstrauss，以色列人，普林斯顿大学），获奖工作是遍历性理论中测度刚性方面的成果，以及这些成果在数论中的应用；吴宝珠（越南人，巴黎第十一大学），获奖工作是通过引入新的代数几何方法证明了自同构形式中极其重要的“基本引理”；斯米尔诺夫（S. Smirnov，俄罗斯人，日内瓦大学），获奖工作是证明渗流理论以及统计物理中的平面伊辛模型的保角不变性；维拉尼（C. Villani，法国人，庞加莱学院），获奖工作是证明玻尔兹曼方程的非线性朗道阻尼（情形）及平衡收敛性。

吴宝珠与佩雷尔曼、陶哲轩是当代数学三杰，三人都是第 29 届（1988)IMO 金牌得主，佩是满分，16 岁时；吴可能被扣 1 分或满分，15 或 16 岁；陶与吴一起参加一次 IMO，最后一题没做出，当然他当时不到 13 岁。当时得金牌的两位中国选手好像现在没声音了 。



http://www.pinggu.org/bbs/thread-891758-1-1.html

今天读到一位越南数学家获得了四年一度的菲尔兹奖。真令人意外。因为中国人混了如此多年，却没有一位获得过。我想，这事给中国人相当大的冲击。

这位越南数学家叫吴宝珠，今年三十七岁，现在在巴黎第十一大学工作。他证明了郎兰兹纲领中的基本引理。年轻时他还获得过第二十九届和第三十届国际数学奥林匹克金牌。2005 年他成为巴黎第十一大学教授，目前在普林斯顿高等研究院。

另外三个是耶路撒冷希伯来大学的 Elon Lindenstrauss（40 岁），日内瓦大学的俄罗斯数学家 Stanislav Smirnov（39 岁），法国庞加莱研究所的 Cédric Villani（36 岁）。

法国总统萨科齐当天致电吴宝珠和维拉尼，祝贺他们为法国摘得数学大奖。他说，这一非凡成就再次证明法国在数学研究领域的领先地位。菲尔兹奖自 1936 年创立以来，全世界有 50 多人获奖，其中 11 人是法国人。法国是继美国之后获得该数学大奖人数最多的国家。

吴宝珠是在越南完成的基础教育，然后就到国外完成高等教育以及研究生教育的，目前持有越南和法国双重国籍。他曾经是国际奥林匹克数学竞赛的金牌

获得者！

实际上菲尔兹奖很多都是国际奥林匹克数学竞赛的奖牌获得者，中国是国际奥林匹克数学竞赛经常性的团体第一名，照理讲应该有更多的可能获得菲尔兹奖，但事实上我们在数学领域却是离国际最高水平有一段距离，甚至现在还不如早年。我们的国际奥林匹克数学竞赛的奖牌获得者很多上大学之后就不再搞数学了，说到底太注重实际，还有就是参加奥赛也不是凭兴趣，而是为了升学等带有功利性目的的！

有一项统计，自 1986 年我国正式参加国际奥数竞赛以来，共有 101 名选手获得金牌，近年更连续 6 届获得团体冠军，但迄今为止这些金牌选手当中，没有一个人获得过菲尔兹奖。“奥数热”并没有为中国选拔出真正的数学人才。

【以上观点仅代表个人意见，并不代表本刊观点】

图 1

图 2

图 3

图 4

图 1：山东大学彭士戈院士在 2010 年国际数学家大会上作一个小时的特邀报告
图 2：山东大学彭士戈院士接受 ICM2010 主办方颁发纪念品
图 3：国际数学家联盟副主席马志明院士
图 4：马志明院士在 ICM2010 发言

翰林外史

连载二

统计学家许宝騄与昆曲

未铭

在北大数学系的历史名人中，许宝騄（1910-1970）是名声显赫的一位。他 1910 年出生于北京，原籍浙江杭州，祖父曾任苏州知府，父亲曾任两浙盐运使，系名门世家。兄弟姊妹共 7 人，他最幼。其兄许宝驹、许宝骙均为专家，姐夫俞平伯是著名的文学家。

许宝騄获得清华大学数学学士，伦敦大学博士。1947 年前曾在西南联合大学和美国北卡罗莱纳大学任教，之后一直是北大数学系教授。钟开莱、王寿仁、徐利治等均是他的学生。他是中国概率论、数理统计的教学与研究工作的先驱。在内曼－皮尔逊理论、参数估计理论、多元分析、极限理论等方面取得卓越成就，是多元统计分析学科的开拓者之一。他于 1948 年和华罗庚、陈省身一起当选为中央研究院的第一批数学院士。

今年 9 月 3 日，北京大学为数学学院许宝騄教授举行 100 周年诞辰纪念会。这不由使我想起一段在燕园流传甚广但是未经证实的爱情故事。故事原版大致如下：话说上个世纪 20 年代，三位青年才俊正是风华正茂之年，一位是学习经济学的，一位是学习物理学的，一位是学习统计学的，互相是好朋友，当时经常把臂同游，正准备出国留学。他们同时结识了一位娇小玲珑恬静优雅的妙龄女郎，姓王。更为

一代数学大师许宝騄

巧合的是，三人都喜欢上了她，想得到她的芳心。这位女郎见三人才貌品德学业均为优秀，无分上下，不好决断。于是说，你们出国留学，谁先取得学位归来，我就嫁给谁。结果三人均出国留学，取得优异成绩，成为本专业领域的翘楚。其中一位物理学家和王女士同结百年之好。另外两位终身未婚。还有一个版本是，王女士其实一开始就看上了那位物理学家，但是不好意思伤害另外两位才俊，只好有此一说。

这三位当时的青年才俊，一位是我国著名物理学家周培源教授（原北京大学校长），另外一位是我国著名经济学家陈岱孙教授（原北京大学经济系主任），第三位就是今天我们要纪念的著名数学家许宝騄教授。

许宝騄不仅是一位成果卓著的数学家，还是一位有很高造诣的昆曲爱好者。受家庭熏陶，他精善音律，爱好昆曲，工昆旦兼习小生。1935年初，与姐夫俞平伯共组清华谷音社，是主要成员。解放后，在教学科研之余，经常参加老君堂俞宅昆曲清唱和北京昆曲研习社活动。下面是1941年作家老舍记载当年抗战时期在昆明生活的《滇行短记》中的一段：

“住在靛花巷的，还有郑毅生先生，汤老先生（注：即汤用彤先生，著名哲学家），袁家骅先生，许宝騄先生，郁泰然先生。

毅生先生是历史家，我不敢对他谈历史，只能说些笑话，汤老先生是哲学家，精通佛学，我偷偷地读他的晋魏六朝佛教史，没有看懂，因而也就没敢向他老人家请教。家骅先生在西南联大教授英国文学，一天到晚读书，我不敢多打扰他，只在他泡好了茶的时候，搭讪着进去喝一碗，赶紧告退。他的夫人钱晋华女士常来看我。到吃饭的时候每每是大家一同出去吃价钱最便宜的小馆。宝騄先生是统计学家，年轻，瘦瘦的，聪明绝顶。我最不会算术，而他成天的画方程式。他在英国留学毕业后，即留校教书，我想，他的方程式必定画得不错！假若他除了统计学，别无所知，我只好闭口无言，全没办法。可是，他还会唱三百多出昆曲。在昆曲上，他是罗莘田先生与钱晋华女士的‘老师’。罗先生学昆曲，是要看看制曲与配乐的关系，属于那声的字容或有一定的谱法，虽腔调万变，而不难找出个作谱的原则。钱女士学昆曲，因为她是个音乐家。我本来学过几句昆曲，到这里也想再学一点。可是，不知怎的一天一天的度过去，天天说拍曲，天天一拍也未拍，只好与许先生约定：到抗战胜利后，一同回北平去学，不但学，而且要彩唱！郁先生在许多别的本事而外，还会烹调。当他有工夫的时候，便作一二样小菜，沽四两市酒，请我喝两杯。这样，靛花巷的学者们的生活，并不寂寞。当他们用功的时候，我就老鼠似的藏在一个小角落里读书或打盹；等他们离开书本的时候，我也就跟着‘活跃’起来。”

根据老舍的回忆，连专门的音乐家都向许宝騄先生请教，可知他的昆曲的水平是相当专业了。

老舍 (1899-1966) 对许宝騄先生的昆曲水平极为赞赏

科学院故事之钟家庆与蹬三轮的

萨苏

钟家庆研究员和萨爹曾是课题搭档。钟为人侠义正直，敢说敢为而又懂得办事的方式方法，在和上上下下相处时锋芒毕露而又游刃有余，是知识分子中少有的活跃人物。与学问还不错，但寡言少语，一开口就和邓小平同志叫板的萨爹搭档，正可以弥补他的缺点。

钟性格上的优点不仅表现在社会活动中，而且在对待朋友上也有两肋插刀的豪迈，这一点他有本钱，钟的手巧，身体也好，体格强健，而且他很愿意帮朋友作体力活。

这在今天想想觉得不可思议，可是我小时候就是看着这些所谓的数学家每天干体力活，很平常，比如龙瑞麟先生，经常要趴在那儿给儿子的自行车补带，他的手艺之好， 以至于我家的自行车出了毛病，也要麻烦他。忽然想起，龙先生的小儿子龙川，现在也在美国读完数学博士学位了，不知道他还记不记得他头发灰白的父亲猫着腰给他修自行车的样子。

张广厚先生去取牛奶，章兆旨先生借房子接待外宾，这都是真实的事情，我亲眼看着的，所以我始终对中国的知识分子充满信任。

不说这个话题了，容易伤感，说钟家庆先生吧。

文革期间，萨爹在东四盖小厨房，数学所里支援他几根大木材，每根都海碗口粗，两丈多长，这可怎么往回送？

钟先生说，没问题，咱俩送吧。

于是这哥儿俩就在自行车后架子左右各绑一根大木头，仿佛两根旗杆，钟先生打头，萨爹殿后，威风凛凛地出发了，那时候北京还没有那样多的电线和汽车，就这样居然花了两个钟头，从中关村骑到了东四……

我记得钟先生，并且感激他，其中有自己的原因。

上中学的时候，萨爹不在国内，萨过马路不小心，和北京市公共汽车中最大的 332 路来了个亲密接触，直接进了车底。（萨这个故事至今是北京人大附中进行安全教育的经典案例。）

出事后，数学所的同仁们仗义相助，龙瑞麟先生的夫人高老师干脆搬过来住，陪着萨娘照顾萨这个惹祸精。那时候来了不少应该记住的人物，比如，大冬天的有一天来了一位先生，身穿极精神的一身西服，在寒风中泰然自若，后来随口一问，原来是我国第一位赫哲族的大学生，数学家毕大川！大概他们老家黑龙江零下三十度的气温对他很平常，北京的冬天，只能算是“凉快”吧。

从医院把我送回家，汽车开到数学所平房前面，因为有一片小松树林，过不去了，大夫说怎么办？要不弄个担架？

著名数学家钟家庆的雕塑。屹立在其母校校园里。

第九届钟家庆数学奖获得者2009年在厦门颁奖礼上

钟先生看看距离，也就五六十米，再瞅瞅我，这萨也就七八十斤，于是一摆手，说不用了，我抱他吧。

这种经验大家都没有，所以都无异议，于是钟先生抱起我就往家走。

等走起来才明白，这可是烫手的山芋啊。

因为我那时浑身是伤，还有骨折的地方，哪里都碰不得，那种沉，叫做死沉。

这五六十米可把钟先生累坏了，我在他怀里，只觉得钟先生全身都在冒热气，嘴里也在喷热气，但是他不敢更换姿势，也不敢换人，只能硬撑着。

把我放到床上，身高体壮的钟先生已经满头是汗，那个喘啊——大冬天的。

后来我入医院复查，把长得不好的锁骨掰开重新接，回到家，我的英语老师石英先生又犯了同样的错误，也是觉得问题不大，又要抱我回去，结果被大家赶紧拦住，石先生体格还不如钟先生，如果没有前面的经验，闹不好就把我扔到半道上了。

不知道今天拿钟家庆数学奖的朋友们看到这段感受如何。

就是八十年代中期钟先生这种事事亲历亲为的举动也够新奇的了。

有一天，萨爹所在的数学所分桔子，每人一箱，平房宿舍数学所里的人多，钟先生就带几个学生拉着板车给大伙儿送来，天儿热，钟先生光了个光膀子，只剩一件跨栏背心，他喜欢游泳，全身晒得又黑又红。

他好像有事和萨爹讲，所以把学生和板车打发走，他帮着把桔子搬进萨爹家，抓了一个桔子，用嘴撕着扯掉桔子皮的时候，就有一个目光炯炯的mm凑上来了，问：大爷，您知道钟家庆钟老师在哪儿么？

萨爹听见了，刚要介绍，又打住了。

他虽然迂，但是并不傻，看看钟先生，晒的象个黑炭头，跨栏背心大裤衩子，嘴里叼着一个桔子，这……这什么形象啊。

幸好萨爹没说什么，钟先生马上就接茬了——唔，他不住这院儿啊。

那女生说：大爷，刚才碰上他的学生，说他在这儿呢，您能帮我看看他在不在这院么？求您了，我想找机会见见钟教授，我从武汉来的。

啊……钟先生好像也不知道该怎么回答了。他回头看见萨爹，忽然眼睛一亮，象看见救星一样，冲萨爹一指，说，哦，我是蹬三轮的，不认识什么钟家庆，你问他吧，他住在这儿，可能知道。

说完，钟先生掉头就跑。

把萨爹给搁在那儿了—— 唔唔，你找钟老师啊，今天没见到他。你找他什么事啊？ ——我是从武汉来的，我要考他的研究生。您认识钟教授么？—— 唔唔，认识，你认识他么？——当然啦，您看我这个包（打开包，萨爹看到厚厚一本剪报，都是钟先生参加会议，授奖颁奖的报道和照片，钟先生西服革履，神采奕奕。）

萨爹就只会唔唔了。

那目光炯炯的mm还问呢——你们科学院的研究员都住在哪儿啊，我来这儿好几天了，怎么一个教授都没看见呢？

这时候，她后面有一个搬桔子的，就是吕以辇研究员，也是跨栏背心的形象……

后来，萨爹和钟先生一说，钟先生就跳起来了，不行不行，我那天那个形象，怎么见这个学生啊！萨爹说要是人家考上了，你能不要？

不知道发愁的钟先生那些日子就很苦恼，直到发榜，看见那mm的分数没有够上来，才松了口气。mm去了兰州，后来多次给钟先生来信，讨教问题，兼以一叙崇拜之情，钟先生非常热情认真地回复，对她极尽帮助指点，但始终不肯和这学生见面，直到钟先生去世。

编者注：钟家庆（1937—1987），芜湖人。1956年于芜湖市第一中学毕业后考入北京大学数学系数学专业。1962年考入中国科学院数学研究所，成为华罗庚教授的研究生，致力于多变函数与微分几何的研究。其研究成果受到国内外数学界的高度评价。1987年2月以最高评分荣获首届“陈省身数学奖”。同年4月12日，在美国纽约哥伦比亚大学突发心脏病猝然去世，年仅50岁。为了纪念他，中国数学设立了钟家庆奖用来奖励优秀的青年数学家。

科学院故事之陆汝钤院士的视力问题

萨苏

在外出差，忙碌中来不及多写东西，且把当年在科学院见到的几件名人趣事随手写下，让大家见识见识所谓学问大家的形象，博大家一笑吧。

院士陆汝钤先生，数学所人称“小陆”（因为所里还有一位老陆——老一辈数学家陆启铿），是萨爹通家之好，称为大师兄，此人才华过人，但眼神一向不太好。

1960年萨爹入科学院，华罗庚亲自出题面试，结果萨爹考得满目红叉，惨不忍睹，只得了二十多分。他这人好面子，寒碜得受不了，既然没有及格，也不想让人家来赶，自己收拾行李就要走。

自行车上放了被窝卷，也免不了挂些漱口缸子毛巾之类的零碎，萨爹凄凄凉凉推到所门口，就碰上小陆师兄，师兄非常亲热，说来啦？华老给你面试了吗？

萨爹说，唉，试了，才二十多分……

陆师兄大喜，道：好啊好啊，华老的规矩，得分就是及格，你能得二十多分，不简单啊。

唔……萨爹琢磨过味来，感觉顿时逆转，看来我没有不及格啊！那也就是说我能留下了？想到这里不禁有点激动。

就在这时候，萨爹看见师兄定睛瞧他车上的行李，不禁又有些心虚，如果师兄问起来，如何回复呢？

却见陆大师兄扶扶眼镜，道：卖破烂啊？噢，你来没几天么，怎么这么多破烂？

萨爹%% ￥#%……——**！！！

这是萨爹说的，我没见着，但是到我上数学所自习写作业的时候，陆先生的毛病依然如故。直到初中我们家就一间屋加一个厨房，没地方写作业，只好去萨爹的办公室，没办法，那时候数学所的子弟差不多都是这样，条件如此。

那天，我写作业，叔叔阿姨们干活聊天，挺热闹，这时候陆先生就来了。

只听他在门外使劲地跺脚，把鞋子在擦脚垫子上用力地蹭来蹭去，进门后还在看鞋底，眼中满是厌恶的神情。

萨爹就问他：咦，怎么了？

陆先生回答的时候还有点儿惊惧，道：“也不知道哪儿来的那么多毛毛虫，掉得满街都是，让汽车压的那个惨啊。我紧躲慢躲，还是踩了一脚……”

真是奇人遇怪事，大家惊讶之余出门去看，回来便忍不住哄笑。

陆汝钤院士，曾任中科院数学所副所长，计算机科学家。

哪儿有毛毛虫啊，原来是杨树上的杨花挂了满树，风一吹当然满街满地的了，就搞糊涂了这位大近视眼的院士先生。

数学所后来好多人都成了“名人”，但出名是不是真的很好受没人知道。

编者注：陆汝钤1935年生于上海市，1959年毕业于德国耶拿大学数学系，后到中国科学院数学研究所工作。1999年当选为中国科学院院士。2000年起加盟复旦大学。现为研究员、博士生导师。曾任中科院数学研究所副所长、学术委员会主任。陆汝钤在知识工程和基于知识的软件工程方面，作了系统的、创造性的工作，是中国该领域研究的开拓者之一。

为天地立心
——读《一代学人钱宝琮》

李伟元

积人积智几番新，算术流传世界真。
微数无名前进路，明源活法后来薪。
存真去伪重评价，博古通今孰主宾。
合志共谋疑义析，衰年未许作闲人。

——钱宝琮《<中国数学史>定稿》

在中国数学史研究领域，曾流传着“南钱北李”的说法：“北李”李俨先生与“南钱”钱宝琮先生研究工作并驾齐驱，是数学史界公认的缔造者、奠基者。著名科学史家李约瑟博士（Dr.Joseph Needham，1900-1995）评价：“在中国的数学史家中，李俨与钱宝琮是特别突出的。钱宝琮的著作虽然比李俨少，但质量旗鼓相当。”著名数学家华罗庚院士说：“我们今天得以弄清中国古代数学的面貌，主要是依靠李俨先生和钱宝琮先生的著作。”吴文俊院士说：“李俨、钱宝琮二老在废墟上挖掘残卷，并将传统内容详作评介，使有志者有书可读、有迹可寻。以我个人而言，我对传统数学的基本认识，首先得于二老著作。使传统数学在西算的狂风巨浪冲击下不致从此沉沦无踪，二老之功不在王梅（清初天算家王锡阐、梅文鼎）二先算之下。”

作为一名科学技术史（数学史）专业的学生，自初窥门庭便闻李钱二老大名，高山仰止，心向往之。近日有幸拜读钱宝琮先生之孙钱永红先生著作《一代学人钱宝琮》（浙江大学出版社 2008 年第 1 版），对钱先生的治学之道、处世之德有了更深的认识，如张载之言:“为天地立心,为生民立命,为往圣继绝学，为万世开太平。”

钱宝琮（1892-1974），字琢如，浙江嘉兴人。1907 年考入苏州省立铁路学堂土木科，1908 年考取官费留学生，就读于英国伯明翰大学土木工程系，1911 年获理科学士学位。1912 年回国后，曾先后在江苏省立第二工业学校、南开大学、南京第四中山大学（后改为中央大学）、浙江大学等多所院校任教，培养出陈省身、吴大任、江泽涵、申又枨、张素诚、程民德等一大批中国当代著名的数学家，华罗庚亦以师长称之；同时业余从事中国数学史与中国天文学史研究，成为这两学科的奠基人。新中国成立后，钱宝琮先生于 1956 年奉调中国科学院历史研究所任一级研究员，1957 年与李俨先生共同组建了中国自然科学史研究室，开始了科学史研究的职业生涯，任中国自然科学史委员会委员、《科学史集刊》主编。“文革”期间钱宝琮先生受到错误批判和迫害，被打成“资产阶级反动学术权威”，专业研究难以为继，抱憾病逝于苏州。

1958 年，钱宝琮先生虽年近古稀，仍发宏愿编撰“一套为中学数学教师服务的浅近世界数学史丛书，主要说明中学数学教科书（包括算术、代数、几何三角、解析几何）中诸多内容的来源”，并撰写《算术史》部分。遗憾的

中国数学史先驱钱宝琮先生(1892-1974)

《李俨 钱宝琮科学史全集》共十本

是因各种原因未能出版，书稿也在“文革”中遗佚。在钱宝琮先生的晚年，虽已缠绵病榻，他仍念念不忘数学史研究之愿，向自然科学史研究室的军宣队提出请求：“我还有些志愿，如：1．想费些工夫修改我原来写得不好的《中国数学史》；2．研究印度数学史来考证印度中古时代数学家究竟于中国古代数学多少影响；3．中国古代数学和印度、阿拉伯数学与现在工农兵所学数学有关，究竟有所发展，有所进步，我们既有为人民服务，应该写一本现代的数学发展史；以及4．我国古代的物理学史如《墨经》和《考工记》中的自然科学等。”其心拳拳，其志殷殷，令人思之潸然泪下。

中国史学传统源远流长，历代史书里都有与科学史相关的史料记载，到了清代已经出现了专门记述数学家、天文学家传记专著《畴人传》（阮元等撰），但“略具其雏形，可为史之一部，而不足以概全”，并且“各传记将天文家、算学家合称畴人，著在一篇，于各家的生死年月和著作年代，都未深考；往往序文凡例连篇记人，而制作此序文的年月，反漏列不记。即各书精华，学派流传，和社会的背景，亦全没有顾到”（李俨语）。

李钱二位前辈筚路蓝缕，承“五四”新文化运动精神，首次系统、全面地考察、研究中国数学的发展历史，并且构建了中国数学史学科的基本框架、内容和方法；考察了中国古代数学典籍的成书年代、作者、版本嬗递、内容、数学成就，以及在中国及世界数学史上的地位；研究了刘徽、祖冲之、贾宪、秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰等中国古代数学家的身世、思想和取得的成就；站在现代数学的高度，系统研究了中国古代分数理论、盈不足术、开方术与高次方程解法、方程术、天元术、四元术、高阶等差级数及内插法等数学成就；首次进行了中国与朝鲜、日本、印度、阿拉伯地区数学的交流与比较研究，得出了从《九章算术》（约1世纪前后）到元朱世杰(14世纪初)中国数学领先于世界数坛的基本看法，初步探讨了中国数学到明代落后的原因。他们卓越的工作堪称数学史界开天辟地之举，对数学史界、天文学史界、历史学界乃至数学界均有所裨益。

北师大数学系（今数学科学学院）与李钱二位前辈渊源颇深。1955年11月数学系傅种孙教授（时任北师大副校长）特邀钱宝琮先生为北师大数学系大三、大四学生和中青年教师开设中国数学史课程，令师生受益匪浅；傅先生并为时任数学系讲师的白尚恕老师布置任务，让他拜李俨先生为师学习中国数学史，北师大数学史研究与教育之途自此发端，薪火相传。钱宝琮先生曾言：“中学教师需要教学法，要教好学生，应该知道数学史，了解一个新的概念产生的客观条件是如何从实践中来。我们的方向是面向国际，还要为中学编出好的参考书。”先师之言对于今天的师范生培养，仍然有着重要的参考意义，是值得学习的。

“文章千古事，风雨百年人”。捧读钱永红先生的作品，不仅敬服于钱宝琮先生其人其事，亦感动于钱永红先生的至孝之心。抚卷沉思，试和题首钱宝琮先生原玉，以抒拙怀：

开天辟地创路新，穷经发微但求真。
不羡黄鹄逐炎熇，愿作精卫衔积薪。
千古文章传后世，一生清誉感众宾。
绝学有继泉下慰，永留至道济后人。

附此书信息：
书名：一代学人钱宝琮
作者：钱永红　编
出版社：浙江大学出版社
出版日期：2008-11-1

此文作者系北京师范大学数学科学学院数学史专业硕士

建亚师：

收到赠饴三刊巨谢。

粗拜未及净手，已见珠玑贯篇，伟象满目。始知大家乃众学集成之家不谬。以妙笔其文而教数术之化，即如主编文理盖懋，庄谐自如，才使燥数亦可绽出引人之盛花，累累之硕果，必大光其彩。篇虽多史典，而进至今，数风流人物如诸师，当看今朝。此谢并贺。

郑倩

2010 年 12 月 04 日

尊敬的刘教授、汤教授，

你们好。

贵刊《数学文化》第一期载有蔡天新教授写的《罗庚与省身 — 纪念两位数学大师诞生 100 周年》。华罗庚和陈省身先生都是我辈很仰慕的大家。其实今年（2010）也是另一位值得我们尊敬的“在数理统计和概率论方面第一个具有国际声望的中国数学家”许宝騄 (Hsu Pao-Lu) 先生诞辰一百周年 。同时，今年也是许先生的学生兼朋友、另一位概率论方向的重要人物钟开莱 (Chung Kai-Lai) 先生逝世一周年怀念。事实上今年在北京大学前后召开了两个国际学术会议分别纪念许宝騄先生和钟开莱先生（见 http://www.math.pku.edu.cn/misc/probstat/ 及 http://www.math.northwestern.edu/chung2010/）；特别是 2007 年 Abel 奖获得者、著名的概率论大家 Varadhan 教授亦参加了缅怀钟开莱先生的会议。

我想听说许、钟两位先生的人莫不会对他们的学问、魅力倾心。 我自是无力写出如蔡教授那样的文章。幸好已有不少纪念文章。我想如能借贵刊“读者来信”一角，在今年纪念许、钟两先生这个特别的年份，引导读者去了解下他们，亦幸甚。

许先生于 1910 年 9 月生于北京。2000 年，在许先生诞辰 90 周年之际，北京大学数学院编有许先生的纪念文集，其中收集翻译了 Anderson、Lehmann、钟开莱、徐利治、陈希孺和张尧庭等先生写的详细介绍许先生的文章，有兴趣的读者可以去查阅（见 http://www.math.pku.edu.cn/misc/probstat/xbl90.htm），我在此不赘述。

许先生的经历和华罗庚先生有些类似的地方。许于 1936 年赴英国伦敦大学学习数理统计，获得哲学、科学博士，后于 1940 年回国在西南联大任教。1945 年许应邀赴美在伯克利加州大学和哥伦比亚大学任教。1947 年许谢绝美方邀请毅然回国在北京大学任教，全心为我国概率统计学科的发展而奋斗。许在 1970 年逝世时，床边茶几上还放着一支钢笔和未完成的手稿。

钟开莱先生生于 1917 年。钟先生曾在西南联大跟随华罗庚先生学习数论，后随许宝騄先生学习概率论。钟于 1944 年赴美国普林斯顿大学学习，于 1947 年取得博士学位。钟后来在美任教，是二战后居于世界领先地位的概率论学者；美国不少概率论学者随其学习、受其影响。钟也积极帮助中国概率论学科的发展。这点和陈省身先生类似。有关钟先生的更多介绍，可以参考下文《Obituary Kai Lai Chung, 1917-2009》（见 http://www.math.ucsd.edu/~williams/chung/obit.pdf）。

许的最主要贡献在数理统计方面，我读书时统计学老师即给我们介绍统计学中的 Hsu 定理。我作为专业于概率论的学生，最近翻阅钟开莱主编的许先生的全集（1983 年），才惭愧地了解到许先生原来在概率论方面也曾攀到顶峰。请让我介绍下面的故事，钟先生与许先生的友情亦由此可见一斑。

1947 年，当时还在美国的许先生在研究无穷小随机变量三角阵列的行和依分布收敛到一个给定的无穷可分分布的充要条件。他于当年 5 月 12 日给钟的信中提及初步结果，并担心与别人的研究撞车；于 5 月 26 日给钟开莱的信中宣布了最终结果，并在回国前将证明的完整手稿交给钟。许很久后才知道了 Genedenko 于 1944 年的文章。许于 1950 年给钟的信中承认 Genedenko 的优先权，只是请钟代为许保管自己惟一的手稿。这个极限定理历经 Lévy，Khintchine, Kolmogorov 等大家的研究；而许“从零开始”，独辟蹊径，在方法上更加直接。1968 年钟先生将 Kolmogorov 和 Genedenko 的书《独立随机变量之和的极限分布》从俄文译成英文时，将钟的文章作为附录加在此书中。而许先生在生前并未看到此书。

我最近在德国的 Oberwolfach 数学所学习，这里的图书馆藏书按照作者名字排列，并于一大厅之一角收藏各数学家的文集。我见到许宝騄、华罗庚先生各自的文集并肩而立，不胜感叹。翻阅许的全集，看到上述许给钟的信件的照片和许关于极限定理的文章，不禁惊讶。

欧阳顺湘

2010 年 11 月 15 日

汤涛教授：

由于冯康 1993 年突然去世，关于他早期的辛几何算法工作成了一个悬案。

在“冯康全集”及秦孟兆执笔的“ Hamilton 系统的辛几何算法”中，都写 1984 年双微会议上冯康报告了辛几何算法。而 1983 年 Ruth 提出辛算法在先。我认为与历史不符。

2010 年 9 月 9—12 日在北京计算所纪念冯康诞生 90 周年学术会议上，11 日我报告“Hamilton 系统有限元长时间性质——能量，辛和轨道，证明冯康猜想”中讲到，“我有幸在 1979 年 11 月广州流花宾馆召开的全国计算数学会议上，首次聆听了他对一般的 Hamilton 系统报告《辛中点格式》。他曾惊讶地指出，此前这里是一片空白，他作了大量数值实验表明，大多数经典数值方法是不合适的。如经典的前向后向 Euler 格式、Adams 方法等，计算几千几万步后，其轨道曲线已面目全非（偏差按时间的平方增长！）。他说了一句很风趣的话‘人造卫星落到地球中心去了’，引得全场大笑。他说：可惜中点公式只有 2 阶精度，但是计算轨道一直保持很好（偏差按时间线性增长！）。首次阐述了他的深刻认识，早于 1983 年 Ruth 的工作”。

对此“悬案”引发了两个问题的探讨。

第一，时间 1979 年 11 月问题：已知 6 人参加会议听了冯康报告，但记不清是辛格式。

石钟慈说听过冯报告，应在 81 年以前，因他 82 年到德国去两年。在广州流花宾馆，他有照片。林群说听过冯报告，记得是在广州流花宾馆。崔俊芝说听过报告，他说 1978 年在北京昌平会议上决定第二年在广州开会。时间应是 1979 年 11 月，不会相差半个月，因为那次选石根华为计算数学会（常务）理事，但他 80 年就出国了。王兴华和郭本瑜说听了冯报告。陈传淼听了冯报告，记得 79 年下半年在流花宾馆，当时天气有点冷。问秦孟兆，但他没有参加此会。

第二，冯康是否报告内容为辛算法。

陈传淼这是第一次听冯康报告辛中点格式，当时我不知道什么是“辛”，但大致内容记得比较清楚，前面已述。但其他人都记不清冯报告什么了。石钟慈证实，他 70 年代末在中国科大任教时，冯先生是科大计算数学教研室主任，冯先生曾在科大报告过辛算法，他当时不知道什么是辛。

我讲冯先生 1979 年报告辛算法的事，尚在久很吃惊：他说从来没有听说过此事。他曾问过冯先生，冯说他在 70 年代末就研究辛算法了。但他一直不知道冯在 1983 年之前已经报告了辛算法。尚在久认为：“这件事很重要，因为国外 Ruth 在 1983 年对可分系统提出了一个辛格式，登在 IEEE。现在开会时有些老外常问，并怀疑：冯是不是知道了 Ruth 的工作？我们没有肯定的材料，解释不清。如果冯在 1983 年前已经报告了，那他就是世界第一人了。”

鉴于上述原因，你们写冯康开创辛几何算法的历史时，应该将此事弄清楚才好。现在是最好，也是最后的时刻了。希望不要让此“原创工作”成为“历史悬案”了。

我建议从几个方面了解：

1. 北京科学院计算中心是否有当年的会议报告安排计划。当时的秘书长是计算中心的人，我记不清名字了。当年不一定有现在流行的会议文摘要？

2. 冯先生的遗物中能否找到当年的报告，我记得当年只能用投影仪（79 年到 93 年，只有 13 年，他可能保留了）；

3. 中山大学的同志是否还有会议材料，应是校长李岳生组织的，什么人参与组织？有陈仲英吗？

4. 请其他参加此会的老先生回忆，可发 E-mail 或计算数学网发征询通知等。

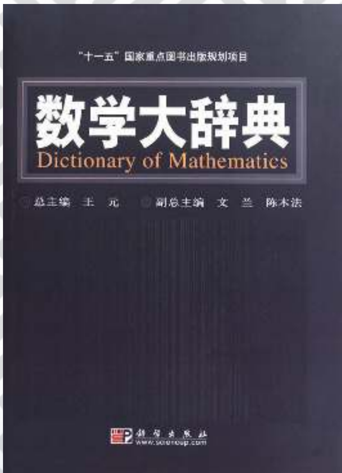
你们对冯先生的传记写得非常好，读了很感人。我认识冯先生 10 多年，感情很深。我 1978 年研究有限元超收敛（冯先生曾称赞），研读过他的论文。2004 年研究有限元解 Hamilton 系统，再读他的论文，最近证明了“冯康猜想”，我应算冯先生的“粉丝”了。

但是，我回忆冯先生一生的科研和工作，觉得社会给了他很不公正的待遇。65 年开创有限元理论（你们文章中写得对，该文只在 H^1 空间讨论了收敛性，没有收敛阶估计——那是 1968 年捷克名家 M.Zlamal 的工作），但他这项工作在文革中被淹没，他的专著书稿在文革中出版社都丢了。文革后报国家奖只给了二等。辛算法为国际首创，又冒出个 1983 年 Ruth 在先的问题，冯生前没有作出澄清（他自己也有失误）。虽 1997 年获国家奖一等奖，但愿他在天有知。我常为他的一生感到惋惜。 现在政治环境和工作条件都比当年好得多了，但却又出现了新问题。看现在的许多学者，多过于浮躁，像冯先生那样坚毅不拔，追求创新，实为我们学习的楷模！所以你们的纪念文章，对我们，特别对年轻一代，更应该有教育作用。我想，这就是你们开办“数学文化”能起的特殊作用！

陈传淼

2010 年 10 月 9 日

科学出版社 Science Press



数学大辞典

总主编：王元　副总主编：文兰 陈木法

本书是一部综合性的数学大辞典，涵盖数理逻辑与数学基础、数论、代数学、分析学、复分析、常微分方程、动力系统、偏微分方程、泛函分析、组合数学、图论、几何学、拓扑学、微分几何、概率论、数理统计、计算数学、控制论、信息论、运筹学等学科，以常用、基础和重要的名词术语为基本内容，提供简短扼要的定义或概念解释，并有适度展开。正文后附有数学发展历史纪要、人名译名对照表等附录，并设有便于检索的中、英文索引。

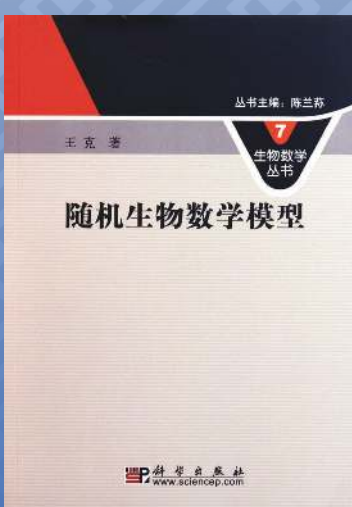
本书可供数学及相关专业的科技工作者，大专院校师生，中学数学教师，数学爱好者，以及具有大专以上文化程度的其他读者参考使用。

华罗庚文集（数论卷III）

王元 潘承彪 贾朝华 编译

本书精选、翻译了华罗庚在各个时期数论方面的代表性论文，这些论文是关于华林问题、Tarry 问题、指数和估计、Vinogradov 中值定理、整数分拆、Pell 方程的最小解、最小原根、圆内格点等重要数论问题的研究。

本书适合数学专业的大学生、研究生、教师、科研工作者以及对华罗庚学术思想有兴趣的读者阅读。



随机生物数学模型

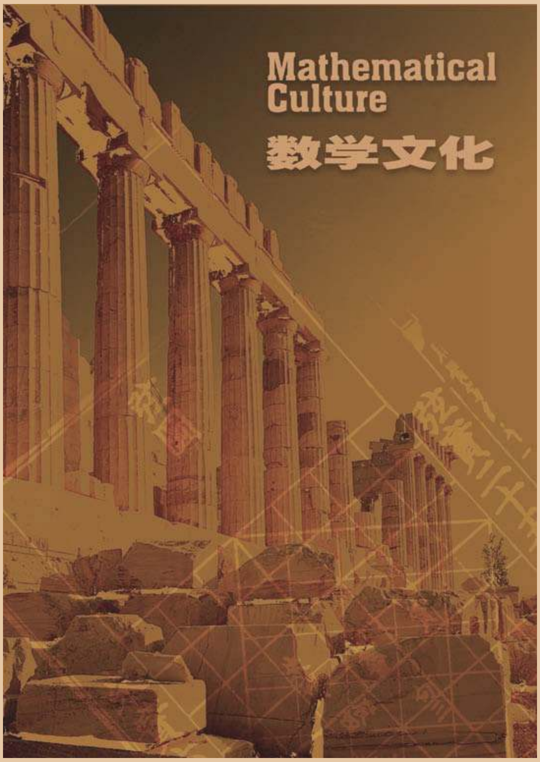
王克　著

本书的作者结合现有文献中的材料，详细地介绍了随机生物数学模型建模的一些注意事项、随机模型研究的一些主要方法、已经取得的结果和一些有待解决的问题。该书文笔流畅，条理清晰，相信那些对随机生物数学有兴趣的读者会从中了解到这个方向的基本动态和方法上的特色，从而有所裨益，同时也很适合生物数学方向的科研人员和研究生们阅读参考。

Mathematical Culture

数学文化

图书信息



主编：

刘建亚　　山东大学
汤　涛　　香港浸会大学

图书介绍

《数学文化》于2010年正式创刊。本刊主要发表高质量的带有普及性的文章；主要面向大学生，大学老师和研究生，以及中学老师和学生。本期刊初步设计的栏目包括数学人物，数学史林，数学烟云，数学趣谈，数学经纬，数学教育，好书推荐。本刊的主要目的是弘扬数学文化，推动数学教育。本刊初步定为每年四期。

ISSN：2070-545X
每年四期
2010 年创刊
网址：http://www.global-sci.org/mc

2011 年定价：

大陆订户：

电子版（8 期）：500 元（单位），200 元（个人）
纸质版（全年 4 期）：120 元 (单位)，90 元（个人）
电子和纸质版：600 元（单位），270 元（个人）
集体订购（20 本以上）：每期 18 元，全年 60 元
征订代理：
北京中科进出口有限责任公司
地址：北京市东皇城根北街 16 号
邮编：100717
电话：010-84039343 转 633
传真：010-84038208
电邮：periodical@bjzhongke.com.cn

香港订户：

全年订费 HK$140 (包含邮费）
每期订费 HK$40 (包含邮费）

中国大陆和香港之外订户：

全年订费 US$25 （包含邮费）
每期订费 US$8 （包含邮费）

- 订费请用港币或美元支票、港币或美元银行本票或直接汇款入星展银行，抬头写“Global Science Press Limited”（注意 Limited 不可省略）
- 通 讯 处：香港沙田新城市广场第一座 1521 室
  Global Science Press
- 电　　话：(852) 3105 1607
- 传　　真：(852) 3105 0207
- 电　　邮：staff02b@global-sci.org
- 银行账户资料
  银行名称：星展银行 DBS Bank (Hong Kong) Limited
  银行账号：016-478-7881097250
  户口名称：Global Science Press Limited
  SWIFT Code：DHBKHKHH

所有订户均可以选用信用卡支付；
请点击 http://www.ajr.hk

中科进口公司
2011 年期刊征订

加入SIAM[工业与应用数学学会]理由众多

工业与应用数学学会有超过13,000名学者分别来自数学，计算机，工程，物理和多个其他学科。SIAM会员由超过95个国家，工作在工业界，实验室，政府部分和研究机构的研究学者，教育工作者，实际工作者，学生组成。

SIAM热诚欢迎您的加入，欢迎您成为我们国际性、多学科社区的一员。

处于前沿

- 您可以定期收到 SIAM Review 期刊并且拥有权限进入从1997 年以来此期刊的电子版本。SIAM Review 每年出版 4 期，提供应用数学学科的整体概览。
- 您可以收到我们应用数学社区的新闻期刊SIAM News。
- 您可以收到 SIAM 的电子新闻通讯 Unwrapped。
- 您可以注册收到任何SIAM期刊的内容提要。

参与帮助建设更强的应用数学和计算科学社区

- SIAM 一直致力于提高对应用和工业数学及计算科学重要性的认知和鼓励青年学者加入本行业研究。您的加入将是对此事业的强力支持。
- SIAM 是国际工业与应用数学会议 (ICIAM) 的创始会员并且是将于加拿大不列颠哥伦比亚省温哥华市召开的 ICIAM 2011 会议的组织者之一。

在专业化的发展和认可中提升您的事业发展

- 在会议上，在 SIAM 职业信息网站，在 SIAM 职位发布公告栏，通过 SIAM News 新闻稿，您可以找到您需要的职业信息。
- 通过获得 SIAM 奖，得到 SIAM 资助，成为 SIAM 院士您可以得到同事和同行的认可。

充分利用网络的机会

- SIAM，AMS，MAA，AWM，AMATYC 和 MPS 有超过53,000 个会员。您可以使用这些协会的联合会员信息。
- 您可以网上加入 17 个 SIAM 活动小组 (SIAGS) 中的和您有共同研究兴趣的一个小组。
- 您可以网上参加您所在区域同行组织的活动。

购买SIAM 期刊和书籍的优惠

- 会员在购买 SIAM 书籍，期刊，电子期刊，SIAM Locus 和其他 SIAM 产品时享受 30% 到 95% 的特殊折扣。

为您的学生找到更多资源

- 您可以推荐两个学生免费成为会员。
- 您可以告知您的学生 SIAM 提供免费和折扣入会资格，学生旅行资助，本科生网络出版物和学生分会。

siam.

现在加入
仅需70元人民币

立即加入：

www.siam.org/membership/individual/china.php
www.siam.org/joinsiam

中国大陆申请人可以通过SIAM在北京的联络人付人民币申请入会。
申请人需要填写完整的会员申请表格，用人民币支付会费给
林群院士
北京中关村东大街55号
中国科学院数学与系统科学学院 100190
电子信箱：siamchina@siam.org
办公电话：0086-10-62624806