
2005 年 5 月，李天岩教授在庆祝他 60 岁生日时接受台湾新竹清华大学赠送的“公鸡”礼物

传奇数学家李天岩

丁玖

2005 年是爱因斯坦狭义相对论发表一百周年，为此美国数学会专门设立了“爱因斯坦讲座”，每年请一位世界杰出科学家作公众演讲。2008 年 10 月，在位于加拿大西海岸美丽城市温哥华的不列颠哥伦比亚大学召开的美国数学会与加拿大数学会联合会议上，爱因斯坦讲座的讲者属于年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院英国裔物理学家戴森（Freeman Dyson）教授，但他因故未能赴会，便在 2009 年 2 月的《美国数学会会刊》中发表了一篇题为“鸟与青蛙”的演讲稿。文中他描述了两类伟大的研究学者：鸟瞰大地者与深入探索者，而杨振宁和冯 • 诺依曼分属为之。他又写道：“在混沌领域里，我仅知道一条有严格证明的定理，1975 年由李天岩和詹姆斯•约克（James Yorke）在他们题为‘周期三意味着混沌’的短文中证明的。李 - 约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。”（“In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title ‘Period Three Implies Chaos’. The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.”）

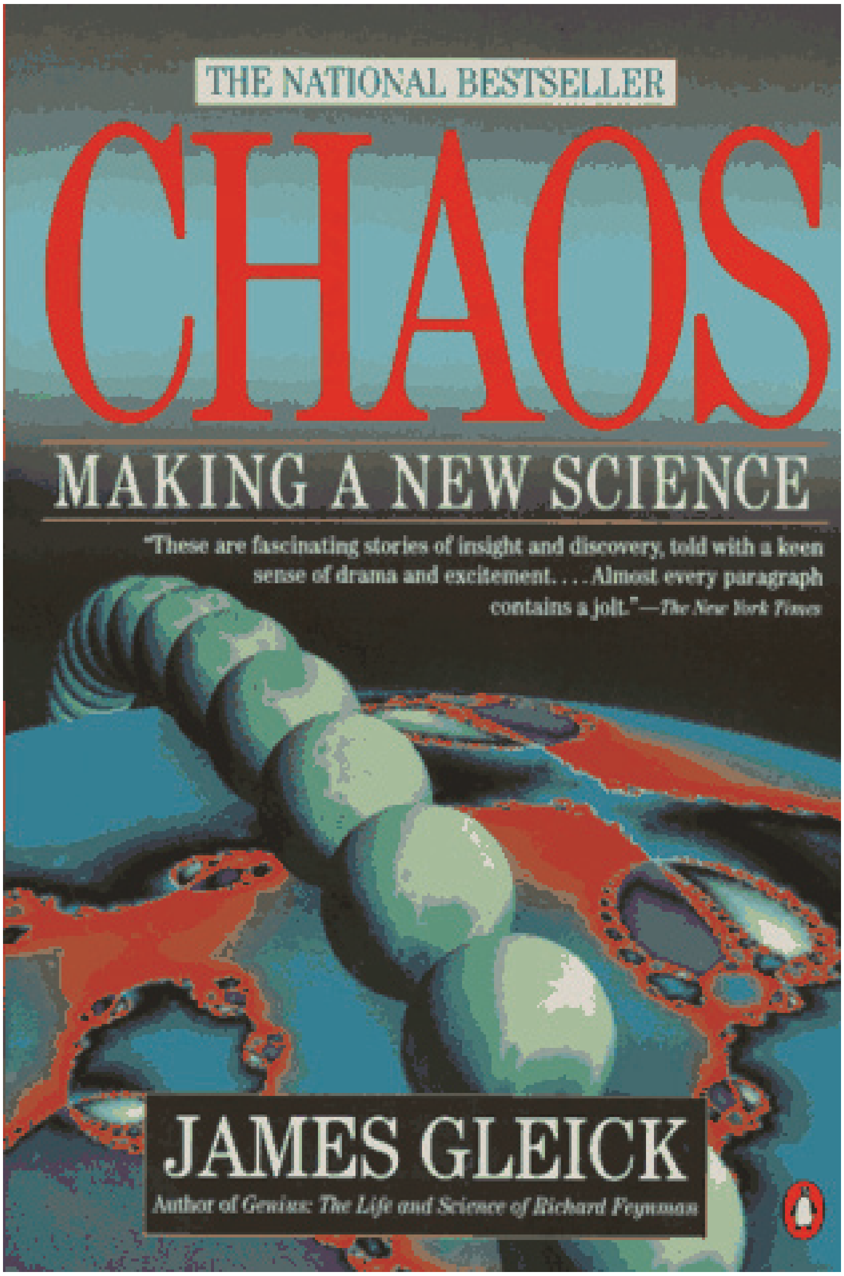
戴森提到的李天岩，是本文的主人公。他祖籍湖南，1945 年 6 月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获医学博士，1934 年回国任教湖南湘雅医

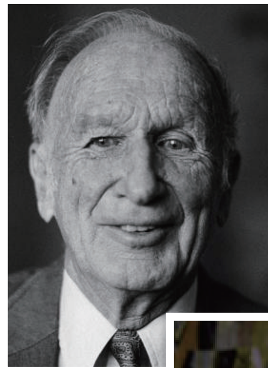
李天岩教授1976年后一直在密西根州立大学数学系工作；目前是这所大学的杰出讲座教授

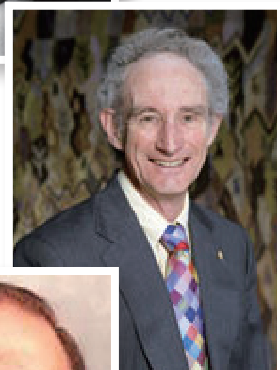
李天岩教授的博士导师 James Yorke（左）

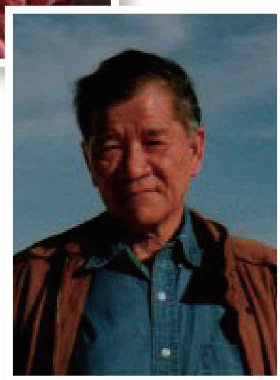
学院，1939年起任福建省省立医院院长。李天岩三岁时随父母及全家定居台湾，在那里接受教育直至大学毕业。他1968年为台湾新竹清华大学数学系第一届毕业生，在按规定服兵役一年后，于1969年赴美国马里兰大学数学系攻读，1974年获博士学位，其论文指导老师就是约克。

李天岩1976年至今一直在美国密西根州立大学数学系任教，其中1976年至1979年为助理教授，1979年至1983年为副教授，1983年至今为正教授，1998年起被赋予杰出讲座教授（University Distinguished Professor）头衔。他1995年荣获美国著名的哥根哈姆（Guggenheim）奖，1996年获密西根州立大学杰出教授奖，同年又获数学系弗莱明杰出教学奖，2002年获台湾清华大学理学院杰出校友奖，2006年获







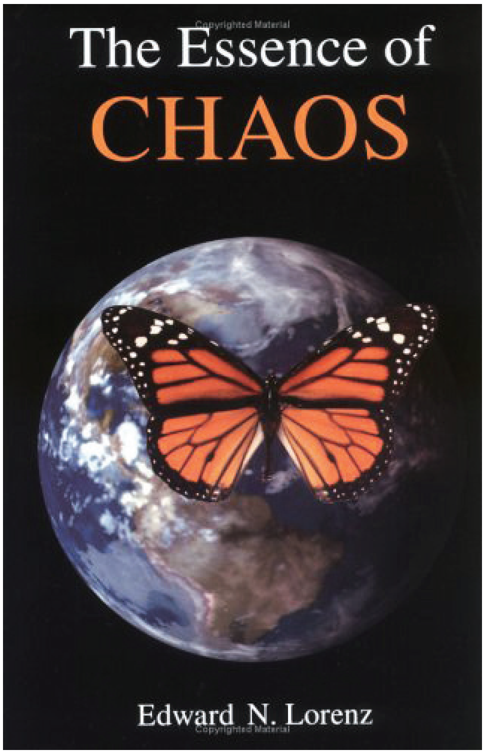


左图：著名科普作者 Gleick 的关于混沌的畅销书；右图：混沌现象和理论的部分重要贡献者 (从上至下)： Lorenz, May, Yorke, 李天岩

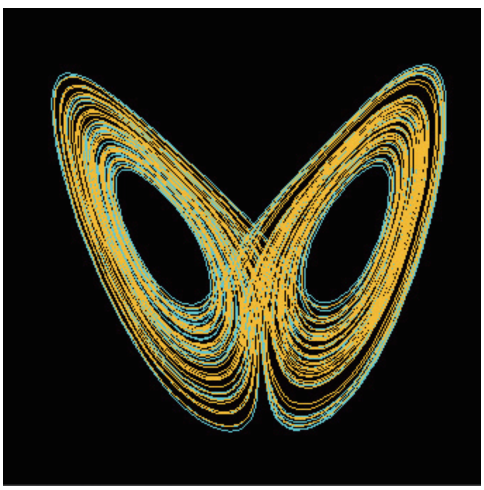
密西根州立大学理学院杰出导师奖。

李天岩曾在应用数学与计算数学几个重要领域中作出了开创性工作，成就非凡。他与约克的上述论文在数学中第一次引入了“混沌”的概念；他对乌拉姆（Stanislaw Ulam）猜想的证明是动力系统不变测度计算理论与算法研究之奠基性工作；他与凯洛格（R. B. Kellogg）及约克关于计算布劳威尔（L. E. Brouwer）不动点的思想和数值方法，开辟了现代同伦延拓算法研究的新天地；他和他的合作者们以及学生们关于代数特征值问题以及一般多变量多项式系统的同伦方法之广泛与深入的研究，为他赢得此领域领袖人物之一的称号。

2005 年 5 月，李天岩的母校台湾新竹清华大学主办了庆祝他六十周岁生日的“数值分析与动力系统国际研讨会”。约克用如下引人入胜的开场白开始了会议的第一个报告：“一百年前，



混沌之父 Lorenz 的著作《混沌及其基本原理》



Lorenz 蝴蝶效应现象

爱因斯坦发表了划时代的四篇论文。三十年前，李天岩完成了三个杰出的工作；它们分别是混沌概念、乌拉姆猜想、同伦算法。”约克如此奇妙的比较，正是对他优秀弟子原创性贡献的绝妙概括。

“周期三意味着混沌”

现今世界上稍微了解一点动力系统的人，无人不知李天岩与约克于 1975 年 12 月在《美国数学月刊》杂志上发表了一篇极其重要的论文“周期三意味着混沌”。该文首创了“混沌”的数学定义，开拓了整个数学界、科学界对混沌动力系统理论和应用研究的新纪元。

在自然科学领域，混沌现象的发现与相对论、量子力学一起被誉称为二十世纪物理学上三大发现。约克对混沌概念有过形象的说明：“生命中充满着小改变导致大变化的情形。例如说车祸，假如人们早个或晚个十秒钟出门，或许就可避免一场车祸。所以小小的改变可以导致很大的变化。”这也是中国成语“差之毫厘谬以千里”之奥秘所在。早在十九世纪末，1936 年被美国数学家贝尔（Temple Bell）在其名著《数学伟人传》中称为“最后的全能数学家”庞加莱（Henri Poincare）在研究天体运动的“三体问题”时已知道其牛顿运动微分方程组的解对初始条件的敏感性。二十世纪六十年代初，美国麻省理工学院气象学教授爱德华 • 洛伦茨（Edward N. Lorenz）用三个简单的常微分方程来计算可用于天气预报的对流扩散问题时意外发现了长期天气预报的不可行性，即俗称的所谓“蝴蝶效应”：北京的蝴蝶翅膀轻轻一拍，两周后可能导致纽约的一场风暴。七十年代初美国普林斯顿大学生物学教授罗伯特 • 梅（Robert M. May）在用“逻辑斯蒂模型”$S(x) = rx(1-x)$ 来研究生物种类的数量变化时惊讶地发现当参数 r 接近 4 时，其迭代序列将变得愈加复杂。在这些科学研究的背景下，混沌的数学概念在李天岩与约克的著名论文中应运而生。

1961 年冬季的一天，具有数学学士学位并在第二次世界大战中为美国空军从事气象预报工作的洛伦茨教授在他麻省理工学院的办公室，与往常一样用 Royal McBee 型的一台简陋计算机计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程初值问题。算了一阵子之后，为了下楼喝咖啡，他暂停计算，只是把计算机终端上的数据抄了下来。一小时回来之后当他重新输入刚才的数据，却十分吃惊地看到与旧初始值仅仅相差约万分之一的新计算结果和原先预期的计算结果大相径庭，面貌全非。开始他以为这仅仅是计算过程中的舍入误差在作怪吧。但严谨而又细心的他经过反复试验、仔细推敲，终于领悟到这一异常现象根植于该微分方程组的内在特性：初值问题解对初始值的极端敏感性。他的发现随即发表在《大气科学杂志》上，成了十年后点燃“李 - 约克混沌”思想火花的火花塞。洛伦茨 2008 年 4 月以 90 高龄去世，他留给世人的“洛伦茨吸引子”成为混沌学领域中最有名的奇异吸引子。

1972 年，美国马里兰大学气象学费勒（Allen Feller）教授将洛伦茨关于气象预测模型的那四篇在气象学家眼里理论性太强、数学味太浓的论文递给了同在流体力学及应用数学研究所的数学系约克教授，认为数学家们也许会感兴趣。约克一生致力于数学与科学的联姻，对英国纯粹数学家哈代（Godfrey H. Hardy）以“无用”引为自豪的纯之又纯“象牙塔”式研究颇不以为然。哥伦比亚大学本科一毕业，他就直奔马里兰大学读数学博士，只因那里有一个流体力学及应用数学研究所这一巨大的“吸引子”。多亏了费勒的引见，约克和他的博士研究生

李天岩才能接触到洛伦茨的论文。他们的确甚感兴趣，约克甚至将文章复印数份，四处寄出，这就是为何坊间曾经流传“约克‘发现’洛伦茨”。

1973 年 3 月的一天下午，当李天岩来到约克的办公室时，约克对他说，“我有个好主意给你！”（I have a good idea for you）这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。那时李天岩正在做微分方程方面的研究，以为他所谓的好主意是关于那方面的高深想法，就半开玩笑地打趣道：“Is your idea good enough for the Monthly?” Monthly 指的是《美国数学月刊》这个一般学生都能看懂的浅近杂志。当李天岩听完约克说完这个好主意后，马上感慨地说，“这将是《数学月刊》一个完美的工作。”因为它所牵涉的语言非常基本。两周后，运用他得心应手的微积分技巧，具体地说，巧妙不断地运用微分学的“介值定理”，李天岩完全证明了这个后来出了名的李 - 约克定理：若实数轴一区间到其自身的连续函数 f 有一个周期为三的点，即存在三个互不相等的数 a, b, c，使得函数 f 在 a 的值为 b，在 b 的值为 c，在 c 的值为 a，则对任意正整数 n，函数 f 有一周期为 n 的点，即从该点起函数 f 迭代 n 次后又第一次返回到该点。更进一步，对“不可数”个的初始点，函数从这些点出发的“迭代点序列”之最终走向将是杂乱无章的，无规律可循。当文章写好后，尽管李天岩心里想到的是投给令人尊敬的高等专门杂志，却按照约克的意图，他们寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》。但不久文章被退回，理由是该文过于研究性，不太适合此期刊所重点面向的大学生读者群。但编辑同意若作者能改写文章到一般学生都能看懂的地步，可以投回《美国数学月刊》。但是，由于李天岩忙于微分方程等方面的博士论文研究，没功夫改它，也不知怎么改。于是乎，这篇文章就在他桌上被束之高阁将近一年。

1974 年是马里兰大学数学系生物数学的“特殊年”。在这一年里，每星期都要请生物数学这个领域里最杰出的学者来校演讲。在五月的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。梅 1959 年在澳大利亚悉尼大学获得理论物理博士学位，两年博士后在哈佛大学从事应用数学的研究，回到母校做到理论物理正教授之后“心血来潮”地对生物学着迷，1973 年成为普林斯顿大学动物学讲座教授，硕果累累。在其最后一天在马里兰的演讲中，梅教授讲了逻辑斯蒂模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的解释，想像中也许只是计算上的误差所造成的吧。约克听完梅的演讲后，在送他上飞机时，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关于李 - 约克定理的文章给他看。梅看了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大解释了他的疑问。约克从机场回来后立即找到李天岩说，“我们应该马上改写这篇文章。”文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

1985 年夏，李天岩第一次来祖国大陆学术访问，南至中山大学、北至吉林

李天岩（奶奶怀抱者）及母亲（最左边）；前左是哥哥李灵峰，现为台湾清华大学著名物理教授

李天岩 1970 年全家照：前面中间是父母，后排右一为李天岩，后排左一为哥哥李灵峰

1996 年李天岩获密西根州立大学 " 杰出教授奖 " 时与母亲合影

1996 年李天岩获密西根州立大学数学系 " 弗莱明教学奖 " 时与母亲合影

大学，东到杭州、西临西安，中达北京中科院理论物理研究所，马不停蹄地讲解“混沌”与“同伦”。笔者当时刚获硕士学位不久，留校教书，由系领导特批，飞往他讲学第一站广州，首次聆听他极富魅力的讲座。在中国的演讲中，李 - 约克论文的题目“Period Three Implies Chaos”被他形象地翻译成“周期三则乱七八糟”。这篇令他一举成名、篇幅不长的论文，第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义。尽管早在 1964 年，前苏联数学家沙可夫斯基(A. N. Sharkovsky)证明了较李 - 约克定理第一部分更为一般的结果，但只有李 - 约克定理之第二部分才深刻地揭示了混沌现象的本质特征：混沌动力系统关于初始条件的敏感性以及由此产生的解的最终性态的不可预测性。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一，已被引用了超过两千次。

乌拉姆猜想

在日常生活中，概率问题到处可见。波兰科学院院士洛速达（Andrzej Lasota）曾这样讲述概率：当你准备离开一间屋子时，你出门的时侯有可能前后相差一分钟。随着时间的推移，又有不同的概率及可能发生的事要去考虑。比如，有百分之十的可能，你会发生车祸，而被送往医院；或许，有百分之十的机会，你会遇见从未谋面的漂亮女子，而深深为之倾倒，一切皆是偶然。所以事情会演变得愈来愈复杂，所有的事都牵涉到概率。因此约克曾经略显夸张地宣称：数学是概率的一部分。

遍历理论是研究确定性动力系统诸多概率统计性质的一门数学分支，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等于一身的综合性学科，在物理和工程科学中应用广泛，如统计物

理、电子线路，以及与我们日常生活密切相关的无线电话。遍历理论的一个重要论题是关于非线性映射的绝对连续不变测度的存在及计算问题。这一问题又归结为相应的定义在勒贝格可积函数空间上的弗洛比尼尔斯 - 派农（Georg Frobenius 和 Oskar Perron）算子的不变密度函数的存在性与计算问题。对于混沌动力系统，这样的不变测度给出了迭代点的混沌轨道在其相空间中的概率统计分布，并与像熵及李雅普诺夫（Aleksandr Lyapunov）指数这样的重要数学概念密切相关。

1960 年，被誉为美国“氢弹之父”的杰出波兰裔数学家乌拉姆在其名著《数学问题集》中对于计算将单位区间 [0, 1] 映到自己内的非线性映射 S 所对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子的不变密度函数提出了一种数值方法。他将区间 [0, 1] 划分为 n 个子区间，然后他定义了一个 n 乘 n 阶矩阵。这个矩阵的每个元素都是位于 0 与 1 之间的实数。事实上，该矩阵位于第 i 行第 j 列相交处的那个数就是第 i 个子区间中被 S 映到第 j 个子区间中的那些点的比例。计算这个非负矩阵的关于特征值 1 的一个非负左特征向量并将其规范化，就可得到对应于 [0, 1] 区间如上划分的一个逐片常数密度函数。此密度函数可看成弗洛比尼尔斯 - 派农算子的近似不变密度函数。对于这一基于概率想法的数值方法的收敛性，乌拉姆提出了他在计算遍历理论领域现已著名的猜想：当子区间总数 n 趋向于无穷大时，这些近似不变密度函数将收敛于弗洛比尼尔斯 - 派农算子的一个不变密度函数。

1973 年，洛速达与约克在现已成为研究弗洛比尼尔斯 - 派农算子不变密度函数存在性问题的一篇经典性论文中解决了乌拉姆在其《数学问题集》中提出的一个问题：若 S 为一个足够“简单”的映射（例如逐片线性映射或多项式映射），其导数绝对值不小于 1，将一区间映到自身，则对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子是否存在不变密度函数？事实上，他们证明了如下的“存在性定理”：若区间映射 S 为一逐片二次连续可微映射，且其导数绝对值在该区间上都不小于一大于 1 的常数，则对应的弗洛比尼尔斯 - 派农算子存在不变密度函数。这个定理证明的关键是用到约克发现的关于有界变差函数与其在某一子区间上的限制之变差之间关系的一个不等式。

1997 年李天岩在儿子密西根大学本科毕业时与之合影

当李天岩读到上述的洛速达 - 约克定理的证明时，开始了构造计算弗洛比尼尔斯 - 派农算子不变密度函数的数值方法，却全然不知乌拉姆十余年前提出的上述方法。首先他定义了对应于区间 [0, 1] 划分为 n 个子区间的有穷维离散算子。它将每一个可积函数映成在每一子区间上取值为该函数在这一子区间上的平均值的一个逐片常数函数。这一离散算子不光为将可积函数空间投影到逐片常数函数子空间上的迦辽金（Boris Galerkin）投影算子，也是保持积分不变的马尔可夫（Andrey Markov）算子。若将这一算子与弗洛比尼尔斯 - 派农算子复合起来，则该复合算子限制在逐片常数函数全体所组成的子空间上在其标准密度函数基底下的矩阵表示恰为乌拉姆方法中定义的那个非负矩阵。运用下一节所述的布劳威尔不动点定理，李天岩直接证明对每一 个自然数 n，复合算子有一不变密度函数。他进而敏锐地感觉到有界变差函数的概念以及关于有界变差函数序列的经典赫利（E. Helly）引理在证明他独立提出的方法对于洛速达 - 约克区间映射族之收敛性时应起的作用。借助于洛速达 - 约克不等式与赫利引理，他证明了这个逐片常数逼近法的收敛性。换言之，乌拉姆方法产生的近似不变密度函数序列当 n 趋于无穷大时的确收敛于弗洛比尼尔斯 - 派农算子的不变密度函数。

李天岩中学毕业时的集体照；第三排右一为李天岩

恰在李天岩将这一开创性工作整理成文之际，他才知道他所构造的方法就是“乌拉姆方法”，他所证明的一切就是对乌拉姆猜想的一个解答！自然，文章的题目也相应修改，乌拉姆猜想的说法第一次出现在数学文献当中。多年后李天岩对笔者坦言：“如果我早知这是与冯 • 诺依曼（John von Neumann）齐名的大人物乌拉姆提出的问题，大概吓得不敢去碰。”可是，正如本文后面所转述的，“一个问题，大人物解决不了，并不表示小人物也解决不了。”

李天岩这篇发表于 1976 年美国《逼近论杂志》，题为“弗洛比尼尔斯 - 派农算子的有限逼近——乌拉姆猜想的一个解答”的论文让 1960 年诞生的乌拉姆方法声名鹊起。三十多年来，不变测度的计算已成为遍历理论和非线性分析中的一个活跃分支。在几乎所有关于应用乌拉姆方法及其推广计算不变测度的文献中，这篇论文成了必不可少的被引用经典文章之一。此外，他的证明思想也启发了他的学生，即本文作者及其合作者、中国科学院数学与系统科学研究院周爱辉在 1996 年发表的论文中证明对于高洛 - 波亚斯基（P. Gora 和 A. Boyarsky）高维映射族乌拉姆方法的收敛性。

现代同伦算法

学过代数拓扑或非线性泛函分析的人都知道有名的布劳威尔不动点定理：n 维闭球到此自身的光滑映射必有不动点。此定理的一个漂亮证明是用反证法。若无不动点，则可定义一新的光滑映射，它把闭球上任一点映到由该点在前一映射下的像到该点的线段延长到与球面之交点。易知球面上每一点在这新映射下保持不变。这样我们得到一个由闭球到其边界上且在边界上为恒同映射的光滑映射。而微分拓扑学告诉我们，这是不可能的，因为球面上几乎处处的任一点在该映射下的逆像所构成的光滑曲线无处可跑。

1973 年，当李天岩在旁听美国马里兰大学数学教授凯洛格的研究生课程“非线性方程组数值解”时听到

布劳威尔不动点定理的属于美国微分拓扑学家赫希（Morris W. Hirsh）发表于1963年的如上证明时，一个奇妙的想法在他脑海中涌现：既然在赫希的证明中，若假设闭球映射无不动点时，则对如上定义的“射线球面交点映射”，球面上几乎处处任取一点在该映射下的逆像光滑曲线无处可跑，则它必然跑到原先映射的不动点集合中去。更精确地说，若令 F 为 n 维闭球到此自身的光滑映射的所有不动点组成的非空集合，则利用如上反证法的思想，我们就有将 F 在闭球中的补集映到球面如上定义的光滑映射。由微分拓扑的沙德（Arthur Sard）引理可知，几乎所有的球面上的点都是该映射的“正则值”，因而这些点在映射下的逆像为起始于该点的一条光滑曲线。这条曲线的另一端不能再回到球面上，也不能在映射的定义域中停止，故必定趋向于原先映射的不动点集 F。如果能数值逼近这条曲线，就能计算出闭球映射的一个不动点。在凯洛格和约克两位教授的鼓励下，李天岩开始了这一卓越思想的数值实现。

在接下来的两个月时间内，他几乎每天都与学校计算中心那台只能用卡片输入的计算机打交道，但总是无功而返，计算机吐出的厚厚一迭纸预示着程序的失败。但李天岩锲而不舍，坚持不懈地修改程序。改错、输入、再改错、再输入，从一个实际计算的门外汉逐步登堂入室。直到有一天，他惊喜地发现计算机仅仅输出一张打印纸，上面正是成功计算出的布劳威尔不动点！他成功了！一个全新的布劳威尔不动点算法诞生了。

有趣的是，凯洛格 - 李 - 约克关于布劳威尔不动点的计算，并非是历史上的首次尝试。尽管他们当时不知道，早在1967年，美国耶鲁大学经济学教授斯卡夫（H. Scarf）在研究数量经济学时，将求解一个经济模型的均衡点问题归结为求解定义在 n 维标准单纯形上的一个连续映射 f 的不动点问题。根据布劳威尔不动点定理，这样的不动点存在。斯卡夫采用了所谓的单纯三角剖分方法，运用组合数学中的斯泊讷（E. Sperner）引理，跟随一条折线来近似 f 的不动点，从而设计了一种单纯剖分不动点算法。在七十年代，此算法被推广成求解非线性方程组的单纯不动点算法，成了热极一时的研究领域。1974年，当在美国克莱姆森大学举行的第一届国际不动点算法大会组委会获悉凯洛格 - 李 - 约克的新方法时，他们提供了两张飞机票让他们赴会报告这一结果。正如斯卡夫在其会议论文集《不动点算法及其应用》序文中所述：“对我们众多与会者而言，克莱姆森会议之令人惊奇之处在于凯洛格 - 李 - 约克关于计算连续映射不动点的文章。他们提出了第一个基于微分拓扑思想——而不是我们习以为常的组合技巧——的计算方法。”

虽然单纯不动点算法的研究目前基本上已趋沉寂，以凯洛格 - 李 - 约克方法为“初始点”的现代同伦延拓法研究依然方兴未艾，在不同的领域生根发芽。古典的同伦算法早在上世纪五十年代就有研究，尤其是前苏

1992年李天岩毕业30年后与中学老同学在洛杉矶相聚（李在后排右二）

李天岩和他的学生们，从右至左：曾钟钢、黄良椒、李奎元、李天岩、张红、丁玖、王筱沈；摄于1990年

1991 年李天岩被聘为北京清华大学客座教授仪式

联数学家戴维登科（D. Davidenko）引入相应的常微分方程初始值问题来数值求解同伦方程。如果我们要计算一个非线性映射 f 的零点 x^*，我们可将零点 a 为已知的一个平凡映射 h（譬如说，$h(x)=x-a$）与 f“同伦”，即定义同伦映射 $H(x,t)=(1-t)h(x)+tf(x)$，其中参数 t 在 0 和 1 之中取值。传统的同伦算法的思想是假设 H 的零点集可表示成连接 h 的零点 a 与 f 的零点 x^* 一条关于 t“单调”的曲线 $x(t)$。若对恒等式 $H(x(t),t)=0$ 求关于 t 的导数，我们就得到可以数值求解的戴维登科常微分方程初值问题。由 $t=0$ 起数值积分到 $t=1$ 时，就可得到 f 的零点 x^*。然而，这一方法的致命弱点在于，在一般情况下同伦曲线不一定总能定义 x 为 t 的单值函数。凯洛格 - 李 - 约克同伦方法的革命性思想是：只要能保证 0 是映射 H 的“正则值”，则由于沙德引理以及隐函数定理，光滑同伦曲线必定存在。坐标变量 x 与参变量 t 应具有同等的地位，它们均可视为曲线长度 s 的函数。这样，无论曲线关于 t 是否“转弯”，运用“预测 - 校正”这一数值手段，我们均能追踪此同伦曲线而得到解。这是现代纯粹数学，尤其是微分拓扑，在计算数学领域中的重要应用。如今，李天岩与凯洛格和约克一道是目前世界上被公认为非线性问题现代同伦法数值计算的创始人，并且对此重要的领域作出了巨大的贡献。

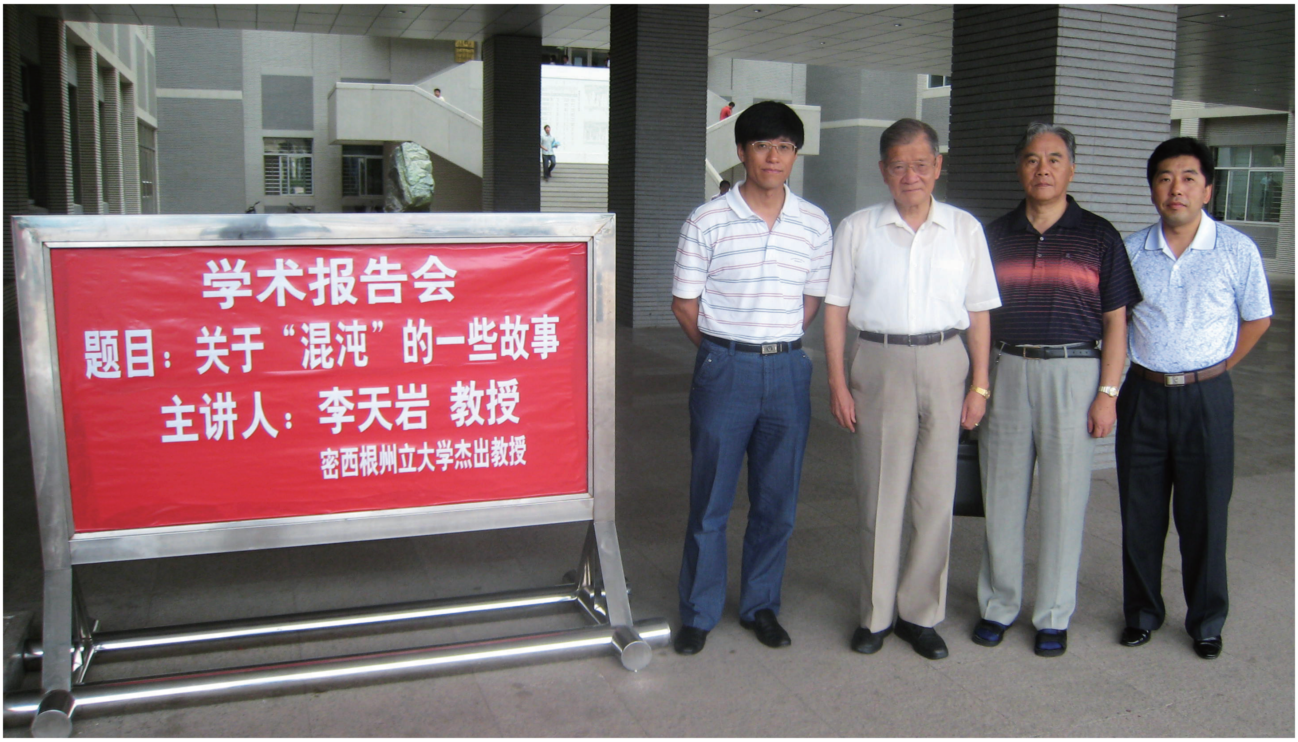
多项式系统数值解

自七十年代提出计算布劳威尔不动点的同伦方法后至今，李天岩一直在求解多项式系统同伦算法这一领域辛勤地开拓着。解多项式方程组的根是相当有趣而且经常出现在应用科学上的问题。譬如说电路分配问题、机械手问题等等。同时这种问题也出现在混沌理论的研究中，如洛伦茨研究的具有混沌现象的四维常微分方程组的定常状态事实上是其右端多项式方程组的解。李天岩在一次学术演讲中说过：“多项式方程组求解不光现在要用，两百年以后还是要用！”

对具有 n 个变数的 n 个多项式方程组，代数几何这一纯数学分支中古典的比左（Etienne Bezout）定理说此方程组所有孤立解总数的一个上界是所有多项式的阶之乘积。这个积称为对应于该方程组的比左数。但在绝大多数情况下，此上界远远大于实际孤立解的个数，其一典型例子为代数特征值问题。对应于 n 乘 n 阶矩阵的特征值问题的二次多项式方程组之比左数为二的 n 次方，但该矩阵最多只有 n 个特征值。

三十年来，用同伦算法来解多项式方程组“所有”孤立解的研究引起了很大的注意。1979 年，迦协 - 赞格维尔（C. B. Garcia 和 W. I. Zangwill）对解 n 元 n 个多项式方程组首先建立了一个同伦，将一所有解为已知的“初始平凡多项式组”与给定多项式组同伦起来。他们证明了：若 0 是该同伦正则值，则多项式方程组的每一个孤立解都是同伦方程的一个相应的解曲线当 $t=1$ 时的终点。重要的是，这些曲线关于同伦参数 t 绝不转弯朝回走。这样对同一常微分方程组求解初始值为选定平凡多项式组已知零点的不同初始值问题，我们就可以在数值上逼近同伦曲线，因此可找出被求解多项式组所有孤立解的逼近值。但该法的缺陷是，由比左定理知，最多比左数多的所有孤立解要通过数值跟随大大超过比左数个数的同伦曲线才能得到。这样当 t 趋于 1 时，许多曲线都跑到无穷远去了。跟随这些无用的曲线是个很大的浪费。

同伦算法计算多项式方程组所有孤立解的一大优点是它可并行化，因可在并行机器上同时求解对应于不同初始条件的同一常微分方程。为了克服上述迦协—赞格维尔同伦法的缺陷，周修义、莫莱特 - 派瑞特（J. Mallet-Paret）以及约克介绍了一个包含 n 平方个参数的同伦。他们证明，



李天岩访问大连理工大学并讲学；从左至右：于波，李天岩，王仁宏，罗钟铉

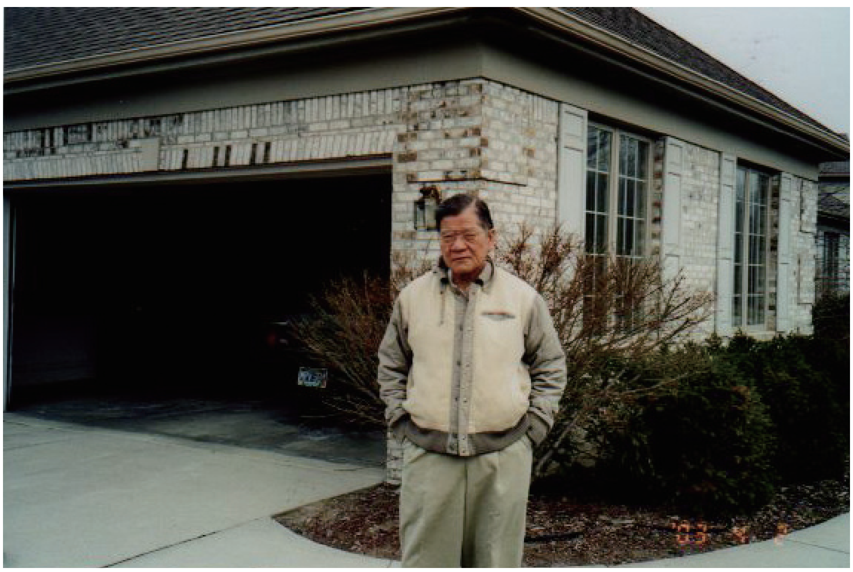
除了测度为零的集合外，对几乎所有的参数，追随同伦方程的所有比左数条解曲线，就可将多项式组的所有孤立解计算出来。

八十年代初，李天岩大大改进了同伦映射的构造。他证明，对于初始线性多项式乘积方程组，则对几乎所有的系数，追随同伦映射比左数条解曲线一样可以找到多项式方程组的所有孤立解。从那时起，他继续探索求解孤立解总数大大小于其比左数的多项式方程组。这样的方程组被称之为亏损方程组。若用同伦法求解这种多项式方程组，从 $t = 0$ 开始我们必须追随比左数条曲线，在 t 趋于 1 时，大多数的曲线都跑到无穷远去了，只能少数的曲线收敛，因此造成极大的浪费。

对于数值代数中最重要也是最常见的亏损多项式系统——矩阵特征值问题，李天岩与他的合作者们及学生们提出了用同伦思想求解大型矩阵所有特征值：将一个特征值为已知或易于求得的同阶矩阵与所求矩阵同伦，然后从 $t = 0$ 出发数值追随同伦矩阵的特征值和特征向量曲线，而当 $t = 1$ 时得到所求矩阵的特征值与特征向量。他和其韩国博士生李弘九第一个将这一思想在计算机上实现。此后他指导他的中国学生张红、李奎元、曾钟钢、黄良椒、丛栾、金鸣等进一步完善这一算法思想与数值实现。他们成功地发展了用于实对称矩阵、一般实矩阵、以及大型稀疏矩阵特征值计算的同伦算法。即使未考虑其可并行化的优势，仅用单个处理器，对许多大规模代数特征值问题，同伦算法优于基于 QR 分解的标准程序。

对于一般的亏损多项式方程组，构造一个好的同伦算法依赖于初始多项式系统的有效选取。这是因为不光所求多项式方程组的每一个孤立解均来自于初始多项式方程组的某个解出发的同伦曲线，更重要的是我们希望尽可能少的同伦曲线当 t 趋于 1 时趋于无穷。最理想的构造是这两个多项式组有同样数目的"在无穷远处的零点"。近二十年来，李天岩与索耶尔（T. Sauer）、约克以及他自己的学生王筱沈、李星、高堂安等人运用代数几何的理论和方法，先后发明出选取初始多项式组的一些行之有效的方法，如随机乘积同伦法和 Cheater 同伦法。十多年来，由于伯恩希坦（D. N. Bernshtein）定理的应用，基于解个数组合计数的多面体同伦法倍受青睐。在其中，所谓的"混合体积"之计算至关重要。李天岩与他过去及现在的学生们已取得一系列令人瞩目的新成果，其详情可见他 2003 年发表在《数值分析手册》第十一卷上的长篇综述性论文"求解多项式方程组的同伦延拓法"，在多项式方程组数值解领域，李天岩无愧于其领军人之一的称号。

李天岩访问昆明时留影



李天岩在自己家的车库门前留影（2003 年由本文作者摄）

逆境拼搏

令人难以置信的是，李天岩三十五年来在学术界的卓越贡献，却是在与身体上几乎无时无刻不受到的病痛作顽强搏斗中取得的。他在台湾清华大学读本科时，绰号叫作“棍子”，除了学业成绩名列前茅外，在体育运动上也是一流的，曾任清华大学篮球校队队长和校足球队队员。但当他 1969 年赴美国马里兰大学攻读博士学位的第二年开始，就感到肾脏逐渐不好，但他依然异常用功，至 1974 年完成了八篇学术论文并取得博士学位。毕业后仅仅六个星期，发现血压竟高达 220/160 毫柱。他于 1976 年 5 月 4 日起开始了长达五年半辛苦的洗肾过程，每周三次，每次五个小时，还不包括医院往返时间。当时他的研究工作大半是在病榻上完成的。与他积极向上的精神相反，当时密西根州立大学统计系聘用的一位印度籍助理教授因肾病而沉沦，最终导致解聘。

1980 年 1 月 29 日，李天岩首次接受换肾手术，然而因排斥效应之影响，不久以失败而告终。1981 年 7 月 15 日他成功地接受了他手足情深的妹妹的一个肾脏移植，在这之后的三年内，他的身体逐渐适应，康复不少。然而好景不长，1984 年 2 月 21 日，李天岩发生中风，右半身全部麻痹，并于 4 月 26 日作了脑血管动脉瘤的大手术。在之后的七、八年，他的身体还算平静，虽无大手术，但局部麻醉的小手术却仍然不断。然而，李天岩趁此机会抓紧时机，在此数年内发展了同伦延拓求解特征值问题和多项式方程组的重要理论及方法，并培养了一批从中国大陆直接招来的博士研究生。除此之外，在此期间他除了几乎每年回台湾进行重要的系列演讲，更于 1985 年 6 月至 7 月首度访问了祖国大陆十余所大学与中国科学院研究所，给出了若干关于混沌动力系统、同伦算法专题演讲，并开始挑选接受大陆研究生，对于将数学根植于国内及提携后进不遗余力。

1993 年 1 月 25 日，李天岩在密西根州立大学讲课时，身体突然感到不适而昏倒送医，经医生诊断为脑动脉血管阻塞。其后，他以极其坚韧的毅力与无比的信念战胜了疾病。然而，从 1992 年起他就开始感到腿痛，看遍了无数的中医西医，都没有办法找出病因。后来才知道是背脊椎骨关节炎所引起，最后终于在 1995 年 5 月 30 日动了一次大手术将发炎的部位割掉。在之后的五、六年间，他的身体状况基本平静。然而进入本世纪的第一年的 5 月 2 日，他又做了一次背脊椎骨

的手术。之后腿疾虽不时困扰他，但从 2003 年渐有起色。可是，就在笔者应邀为《中国数学家传》丛书第六卷撰写“李天岩传”之时的 2003 年 6 月，李天岩再次遭遇病魔的袭击。6 月 24 日医生对他心脏动脉血管的阻塞进行了及时的治疗与处理，运用刚刚问世不久的最新医疗技术为他动脉血管安装了八个支架。他近年来勤于运动保养身体，每天要游泳一千公尺或步行二英里，身体状况比以前明显好转许多。但由于他全身是病，遍体是伤，一不小心，伤病便会“卷土重来”。最新的例子是 2010 年 6 月他在杭州开会期间，晚间在西湖边意外跌倒，血流如注，在急诊室缝了八针。几天后他绷带在身依约去了东北大学讲学。

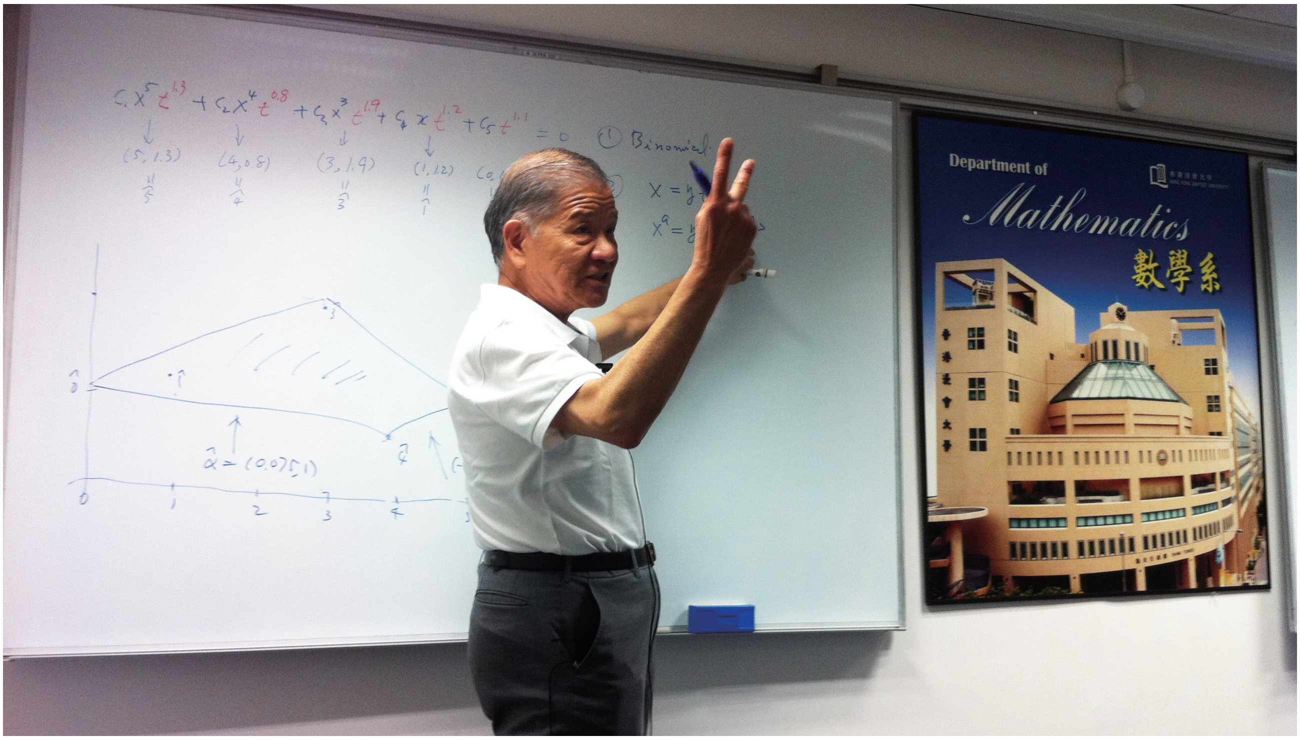
在过去的几十年中，李天岩长期遭受疾病的巨大痛苦，然而他在逆境中全力拼博，以乐观的大无畏精神一次次战胜病魔。至今，他全身麻醉的大手术已超过十次，局部麻醉手术则不计其数，全身都是开刀的伤痕。他是一个在逆境中求突破，“与病斗其乐无穷”的人，凭藉着一股坚强的毅力及终极的信念去克服一切困难，在最艰难的环境下作出了第一流的研究工作。他常对他的研究生们说，若他们在学习、研究中遇到困难，只要想到他是怎样克服病痛的巨大困难，一切困难就容易迎刃而解了。正是因为这种超人的精神，尽管直至今日依然病痛缠身，李天岩一直在从未间断过的美国国家科学基金会资助下高效多产地工作着、工作着。

李天岩 60 岁生日时和老师学生合影（二排中为博士导师 Yorke）

著名计算数学学者 Herbert Keller（右）参加了 60 岁生日聚会

治学之道

李天岩几十年如一日具有严谨的治学态度。他常认为，他的成功之道除了有象约克教授这样的好导师，其不二法门无它，就是坚持。他常常对他的学生说，自己并不聪明，而是否聪明过人其实并不重要，能将问题弄个水落石出才重要。他常强调他对问题的看法只不过是比别人多坚持了一分钟。那宝贵的一分钟可能就是造就成功之路的一分钟。一个问题，大人物解决不了，并不表示小人物也解决不了，大人物思考问题的路径也不等于解决问题的路径。“凭着一股牛劲，凡事坚持到底，绝不轻言放弃”，是他叮咛学生们的名言。他也常说读书做学问一定要作彻底的理解，尤其是作数学，一知半解地记忆表面上的逻辑过程是没有用的。他曾举例说，一个矩阵的行秩为什么会等于列秩呢？其实学过线性代数的大二学生都会证明。然而它实际上所代表的几何意义是什



2011 年 6 月李天岩教授在香港浸会大学讲学

么？物理上的涵义又是什么？从不同的角度来看这个问题时，你将会得到意想不到的结果。

李天岩对应用数学家和计算数学家的培养有独特的见解。一方面他极端看重在纯粹数学上下苦功，在理论分析上打下坚实的基础。记得当年笔者到达密西根州立大学第一天就听本系的中国同学说，要成为李教授博士研究生的一个必要条件（而非充分条件）是修过或考过卢丁（W. Rudin）的《实分析与复分析》。另一方面，他又特别强调学生们养成上机计算的好习惯，坚决反对“纸上谈兵”赵括式计算数学学习法。纵观科学发展史，许多激动人心的伟大发现起源于计算上的“好奇心”。十九世纪初，数学王子高斯曾花费大量的时间从事数值方面的计算，如数论中的质数之分布，科学计算中的最小二乘法的基本思路都可以追溯到他。上世纪下半叶，乌拉姆的蒙特卡洛法，洛伦茨的蝴蝶效应、梅的人口动力学、李天岩的同伦延拓，也无一不是“计算好奇心”催生的产儿。难怪约克在 2005 年参加完他弟子六十岁生日庆祝活动后被台湾数学界采访时语重心长地说：研究就是去发现叫人赞叹的想法，而动手计算则可能导致伟大发现。

李天岩在台湾上的大学，所以对中国高等教育中普遍存在的填鸭式教学深有体会，并深恶痛绝。他曾讲过这样的故事：一位数学研究生在博士资格考试的口试时，教授要考她证明特殊的吉洪诺夫（A. Tychonoff）定理：两个紧集的乘积也是紧的。她央求教授让她证明一般的吉洪诺夫定理：任意个数紧集之乘积也是紧的，因为她记得证明的每一个细节而不知道怎样证明更简单的两个紧集的情形。无独有偶，刚刚去世不久的俄罗斯领军数学家阿诺德（V. I. Arnold）在 2003 年一篇谈论他的老师、伟大的数学家柯尔莫果洛夫（N. Kolmogorov）的文章中，也讲到他 2002 年面试数学教授候选人时，问了一下二次型 xy 的符号差为几。那位已教线性代数多年并已发表几十篇论文的专家迟迟疑疑地解释道，他的电脑程序一小时可算出任何二次型的符号差，但他的人脑在十五分钟的时间内无法算出该题。

李天岩在发表于台湾《数学传播》杂志 31 卷 4 期上一篇基于在母校台湾清华大学两次讲演稿，题为“回首来时路”的文章中以颇具幽默的口吻回忆起当年大学同窗们如何像少年维特烦恼于恋爱那样对高深数学的烦恼，甚至有人差点留下“不想活下去”的遗书，藉以抨击教科书越难越好的教学方针。笔者曾听他清华学弟提到他当年成绩全班第三，但是他“回想起来，当时实在是一窍不通。”到美国求学以后他才知道，数学上的逻辑推理和对数学结构性的认知有相当大的差距。他认为抽象数学的出发点多半起始于对实际问题所建立的数学模型，

李天岩和学生摄于美国西佛罗里达大学数学系。从左至右：李奎元，李天岩，黄良椒，王筱沈，曾钟钢，丁玖

然后将解决问题的方式抽象成一般理论，以解决更普遍的同类问题。他觉得学习“高档次”的数学理论，绝对必须从低档次数学的理解出发，否则就会像上述两人那样“精通”高深理论而不能回答基于同一想法的初等问题。因此在学习一般的抽象理论之前，对原始概念的历史发展和来龙去脉要有基本的认识。否则，一开始就面对一大堆莫名其妙的抽象定义，推些莫名其妙的抽象定理，学生如坠迷雾，不知所云，只好背定义、背定理、背逻辑，应付考试。

李天岩坚决反对学生死记硬背，不求真懂。参加过他为自己学生设计的数学讨论班的历届研究生都不会忘记他对每一个报告者的基本要求：不要光讲“爱泼西龙—代尔它”语言，那仅仅是逻辑，要讲思想，要讲基本思想（basic idea）。他对弟子们生活上关心，学问上严厉。笔者记忆犹新的是某一学期“李天岩小组讨论班”第一周，他在“训话”中以幽默的口吻谆谆告诫大家：“我不希望你们今后在麦当劳快餐店端盘子！”在讨论班，他要求学生在演示证明一个一般定理时，要先将具体的或特殊的情形解释清楚，坚决反对一开始就在抽象的概念里捉迷藏。几乎所有学生都因讲得不得要领而被他“挂黑板”，但“平时多流汗，战时少流血”的学生们后来大都成为会讲课的大学教授。李天岩坚信，若是真正了解一门学科，就会讲得连高中生也能听得懂。他这样认为，也用这样的准则来训练他的学生，同时也是这样身体力行。他在世界各地应邀所做的数学演讲总是从最初等的概念入手，用最直观的观察引导，听众无不被他深入浅出的生动报告所折服。1986 年，当刚到美国攻读博士学位的笔者在他办公室里准备给他报告菲尔茨奖得主斯梅尔（Stephen Smale）的学生、美国康奈尔大学数学系雷列加（J. Renegar）教授的论文“关于逐片线性道路追踪算法平均情形的复杂性理论”之时，他的第一句话便是“你要把我当成笨蛋，我什么也不知道。”当时笔者十分纳闷，自己慕名而来求学的堂堂大教授，居然“什么也不知道”。正因为面对的是一个“什么也不知道”的数学家，他的弟子们学会了什么是研究数学，什么是讲数学。

正因为李天岩独特的研究方法和讲课艺术，他不光获得密西根州立大学的杰出教授奖和杰出教学奖，也影响了他一批又一批的研究生在研究与教学上齐头并进。他的治学之道对一个数学家的成长具有典型的启发性。

2010 年 8 月 17 日写于美国哈蒂斯堡

2011 年 5 月 11 日定稿于香港