

*Riemann*

## 黎曼猜想漫谈(五)

卢昌海

### 23 哈代定理

就在玻尔和兰道研究零点分布的同时，另一位为黎曼猜想而着迷的数学家——哈代——也没闲着。1914年，即与玻尔 - 兰道定理的提出同年，哈代的研究也取得了突破性的结果。这便是我们在第1节中提到的那个“令欧洲大陆数学界为之震动的成就”。在黎曼猜想的研究中，这一结果被称为哈代定理：

**哈代定理：**黎曼  $\zeta$  函数有无穷多个非平凡零点位于 critical line 上。

哈代一生对数学有着诸多的贡献，哈代定理这一名称有时也被用来表示复变函数论中的一个定理。

我们知道（详见第22节），无论阿达马、Vallée-Poussin，还是玻尔，兰道，在哈代之前人们所做的有

关黎曼猜想的所有解析研究，都没能证明哪怕一个零点落在 critical line 上。那时人们所知的有关 critical line 上的零点的全部结果只有我们在第8节中提到的1903年格拉姆给出的15个零点以及1914年（与哈代定理同年）Backlund 计算的79个零点。全部都是零星计算，且涉及的零点数少得可怜。而忽然间，来自英伦岛上的哈代居然不动声色地一举把 critical line 上的零点数目扩大到了无穷，不仅远远超过 Backlund 的区区79个零点，也远远超过了后世所能给出的任何具体计算结果。因为无论用多高明的计算方法，无论用多强大的计算设备，也无论用多漫长的计算时间，任何具体计算所能验证的零点数目都是有限的，而无论多大的有限数量相对于无限来说都只是一个“零”。

# Riemann



哈代  
Godfrey Harold Hardy

因此哈代定理虽没有给出 critical line 上任何一个具体的零点数值，但它通过对这些零点的存在性证明为黎曼猜想提供了强有力的支持 [注 23.1]，这种支持从某种意义上讲超越了任何可能的具体计算。这样一个结果出现在人们对黎曼  $\zeta$  函数非平凡零点还知之甚少的 1914 年，而且还出现在与欧洲大陆数学界颇为疏离的英国，不能不令欧洲大陆的数学家们感到震动。

哈代定理的证明可以从一个有关  $\zeta(s)$  的积分表达式

$$\frac{2\zeta(s)}{s(s-1)} = \int_0^\infty \left[ G(x) - 1 - \frac{1}{x} \right] x^{-s} dx$$

入手。这里  $0 < \operatorname{Re}(s) < 1$ ，被积表达式中的函数  $G(x)$  定义为：

$$G(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x^2}.$$

我们在第 5 节中介绍过， $\zeta(s)$  的零点与黎曼  $\zeta$  函数的非平凡零点重合，并且它是一个整函数，性质比黎曼  $\zeta$  函数来得简单。在黎曼猜想的研究中这是一个十分重要的辅助函数。证明哈代定理的基本思路便是设法从上式中找出与  $\zeta(s)$  在 critical line 上的零点分布有关的约束条件来。为此，第一步是从上式中解出  $G(x) - 1 - 1/x$ 。这与我们在第 4 节中介绍过的从  $\ln\zeta(s)$

与  $J(x)$  的积分表达式中解出  $J(x)$  来是完全类似的，其结果也类似：

$$G(x) - 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{2\zeta(z)}{z(z-1)} x^{z-1} dz,$$

其中积分上下限中的  $a$  满足  $0 < a < 1$ 。从  $G(x)$  的定义中不难看到（读者可以自行证明） $G(x)$  在复平面上  $-\pi/4 < \operatorname{Im} \log(x) < \pi/4$  的楔形区域内解析。进一步的研究还表明，在这一楔形区域的边界上  $G(x)$  存在奇点，特别是，当  $x$  从楔形区域内逼近  $i^{1/2}$ （即  $e^{\pi i/4}$ ）时， $G(x)$  及其所有导数都趋于零。

另一方面，假如  $\zeta(s)$  在 critical line 上只有有限多个零点，那么只要  $t$  足够大， $\zeta(1/2+it)$  的符号就将保持恒定（请读者想一想这是为什么？）。换句话说，只要  $t$  足够大， $\zeta(1/2+it)$  要么是恒正函数，要么是恒负函数。由于  $\zeta(s)$  在 critical line 上为实数（参阅第 11 节），且  $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s})$ （参阅第 22 节）， $\zeta(1/2+it)$  作为  $t$  的函数是一个偶函数，因此我们只需考虑  $t > 0$  的情形即可。显然， $t$  的这种大范围特征对上式右端的积分（积分限中的  $a$  取为  $1/2$ ）会产生可观的影响。这种影响究竟有多大呢？哈代经过研究发现，它足以破坏  $G(x)$  在  $x \rightarrow i^{1/2}$  时的所有导数都趋于零这一结果。这就表明  $\zeta(s)$  在 critical line 上不可能只有有限多个零点！而这就是哈代定理。

限于篇幅，我们略去了证明，概括的讲，它主要包括三个步骤：1.（容易）消去左端的  $-1 - 1/x$  及右端被积函数中的  $1/z(z-1)$  以简化表达式。具体做法是用算符  $x(d^2/dx^2)x$  作用于  $G(x)$  的积分表达式的两端。2.（容易）证明简化后的左端  $H(x) = x(d^2/dx^2)xG(x)$  在

## 注 23.1

在历史上，这种存在性证明由于其非构造性的特征，曾被以 L.E.J.Brouwer( 1881-1966 )，赫尔曼·外尔，A.Heyting ( 1898-1980 ) 等为代表的数学哲学“三大流派”之一的直觉主义 (Intuitionism) 所排斥。但是存在性证明是数学中极其重要的方法，在很大程度上体现了逻辑与推理的力量，就像一个高明的侦探不需要跑到罪犯家中将之拿下就可以断定谁是凶手。直觉主义抛弃的东西实在太多，最后就连代表人物之一的外尔也不得不承认，在直觉主义中“数学家们痛苦地看着数学大厦中自己深信基础坚实的许多部分在他们的眼前化为了迷雾”。

## Riemann

$x \rightarrow i^{1/2}$  时具有与  $G(x)$  一样的行为，即所有导数都趋于零。3. (较难) 证明  $\zeta(1/2+it)$  在  $t$  很大时具有恒定的符号对  $2\zeta(z)x^{z-1}$  的积分产生的贡献足以使得  $H(x)$  在  $x \rightarrow i^{1/2}$  时的高阶导数无法为零。

哈代定理在研究黎曼猜想的征程上无疑是一个了不起的成就。但是它距离目标究竟还有多远呢？却是谁也答不上来。从字面上看，黎曼  $\zeta$  函数共有无穷多个非平凡零点，而哈代定理所说的正是有无穷多个非平凡零点位于 critical line 上，两者似乎相差不多。可惜的是，“无穷”这一概念却是数学中最微妙的概念之一，两个“无穷”之间非但未见得相同，简直可以相距要多遥远有多遥远，甚至无穷远！因此为了知道我们离目标究竟还有多远，我们还需要比哈代定理更具体的结果。

幸运的是，这样的结果很快就有了，离哈代定理的出现仅仅相隔了七个年头。在研究黎曼定理的征程中，时间动辄就以几十年计，因此七年应该算是很短的时间。这回出现在英雄榜上的人物除了哈代外，还有李特尔伍德 (John Edensor Littlewood, 1885-1977)。

## 24 哈代 - 李特尔伍德定理

哈代一生除了对数学本身的卓越贡献外，还有两段与他人合作的经历在数学史上被传为佳话。其中一段是与印度数学奇才拉马努金 (Srinivasa Aiyangar Ramanujan, 1887-1920) 的传奇合作，另一段便是与李特尔伍德。李特尔伍德与哈代一样，是英国本土的数学家。我们曾在第 1 节中介绍过，英国的数学界自牛顿 - 莱布尼茨论战以来渐渐与欧洲大陆的数学界孤立了开来。1906 年，当李特尔伍德还是剑桥大学三一学院 (Trinity College) 的一位年轻学生的时候，这种孤立所导致的一个有趣的后果落到了他的头上。他当时的导师巴恩斯 (Ernest William Barnes, 1874-1953) 在那年的暑期前随手写给了他一个函数，轻描淡写地告诉他说这叫做  $\zeta$  函数，让他研究研究这个函数的零点位置。初出茅庐的李特尔伍德不知  $\zeta$  函数为何方神圣，领命而去倒也罢了，但巴恩斯居然能漫不经心地把这样的课题交给当时还是“菜鸟”（尽管算是比较厉

害的“菜鸟”）的李特尔伍德，说明他对欧洲大陆在近半个世纪的时间里对这一函数的研究，以及由此所显示的这一课题的艰深程度基本是一无所知。

不过巴恩斯虽有对“敌情”失察之过，把任务交给李特尔伍德却是找对了人，因为李特尔伍德很快就成为了英国第一流的数学家，而在这过程中巴恩斯所给的这个课题不无促进之功。若干年后，当李特尔伍德终于体会到黎曼猜想的艰深程度，甚至开始怀疑其正确性（参阅第 9 节）的时候，他并没有后悔当时接下了这一课题，因为一位真正优秀的数学家在面对一个绝顶难题的时候，往往会被激发出最为敏锐的数学灵感。

拿到课题后的第二年，李特尔伍德就发现这个  $\zeta$  函数与素数分布之间存在着紧密的关联。对于欧洲大陆的数学家来说，这种关联已不足为奇，因为它早在四十八年前就被黎曼发现了。但在闭塞的英国数学界，欧洲大陆在这方面的工作当时还鲜为人知。这其中恰好与李特尔伍德同在三一学院的哈代是一个例外。尽管李特尔伍德的发现不是原创的，但他能独立地重复黎曼的部分工作，其功力之不凡还是给年长的哈代留下了深刻的印象。此后李特尔伍德在曼彻斯特大学教了三年书，1910 他获得三一学院的教职后重返剑桥，由此开始了与哈代长达三十七年亲密无间的合作生涯，直至 1947 年哈代去世为止。



李特尔伍德  
John Edensor Littlewood

# Riemann

哈代与李特尔伍德的合作堪称数学史上的典范。在他们合作的极盛时期，欧洲学术界流传着许多有关他们的善意的玩笑。比如玻尔（玻尔 - 兰道定理中的玻尔）曾开玩笑地说当时英国共有三位第一流的数学家：一位是哈代，一位是李特尔伍德，还有一位是哈代 - 李特尔伍德。而与之截然相反的另一个玩笑则是说李特尔伍德根本就不存在，是哈代为了自己的文章一旦出现错误时可以有替罪羊而杜撰出来的人物。据说兰道（玻尔 - 兰道定理中的兰道）还专程从德国跑到英国来证实李特尔伍德的存在性。

哈代 - 李特尔伍德对 critical line 上零点的研究起点与哈代定理相同，也是上面提到的  $G(x)$  与  $\zeta(s)$  之间的积分表达式。在哈代定理的证明中，如我们在上文及注释中看到的，着眼点是  $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$  在整个 critical line 上的积分。这一着眼点其实已经为哈代定理的结果埋下了伏笔，因为既然研究的是整个 critical line 上的积分，所得到的当然也就只是有关整个 critical line 上零点总数的笼统结果。为了得到能与黎曼猜想对零点的描述相比较的结果，我们需要的不仅是对整个 critical line 上零点总数的研究，更重要的是要了解 critical line 上位于区间  $0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T$  的零点数目。为此，哈代 - 李特尔伍德研究了  $2\zeta(s)x^s/s(s-1)$  在 critical line 上任一区间的积分，即：

$$I(x, s, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-ik}^{s+ik} \frac{2\zeta(z)}{z(z-1)} x^{z-1} dz ,$$

其中  $\operatorname{Re}(s)=1/2$ 。通过对这一积分的细致研究，哈代与李特尔伍德发现 critical line 上不仅有无穷多个，而且其趋于无穷的速度起码是  $KT$ （其中  $K$  为大于零的常数）。他们发表于 1921 年的这一结果在数学界并无确切的名称，我们在这里将它称为哈代 - 李特尔伍德定理 [注 24.1]，它的完整表述如下：

## 注 24.1

在数学界，以哈代 - 李特尔伍德命名的最主要的定理是 Hardy-Littlewood Maximal Theorem，但这一定理并不经常被简称为哈代 - 李特尔伍德定理，因此“哈代 - 李特尔伍德定理”这一名称可算是半个空缺，这里我们就用他们在黎曼猜想领域内的这一成就来填补这个空缺。

**哈代 - 李特尔伍德定理：**存在常数  $K>0$  及  $T_0>0$ ，使得对所有  $T>T_0$ ，黎曼  $\zeta$  函数在 critical line 上  $0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T$  的区间内的非平凡零点数目不小于  $KT$ 。

那么哈代 - 李特尔伍德定理距离目标——黎曼猜想——有多远呢？我们可以回忆一下第 5 节中黎曼的三个命题中的第一个，即：在  $0 \leq \operatorname{Im}(s) \leq T$  的区间内（不限于 critical line 上），黎曼  $\zeta$  函数的零点总数大约为  $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$ 。这个命题于 1905 年被曼戈尔特 (H. C. F. von Mangoldt, 1854-1925) 所证明，这也是黎曼的三个命题中迄今唯一得到证明的命题。与这个命题相比，我们可以看到一个令人沮丧的结果，那就是哈代 - 李特尔伍德定理所给出的 critical line 上零点下限的渐近估计相对于零点总数来说，其渐近比例为零！真是不比不知道，一比吓一跳，原来花了这么大功夫所得到的这些结果从纯比例的角度看竟是如此地“微不足道”。这就是我们与黎曼猜想的距离，这就是黎曼猜想的难度。

但尽管如此，哈代 - 李特尔伍德定理是有关黎曼  $\zeta$  函数非平凡零点在 critical line 上具体分布的第一个解析结果。在当时也是唯一一个这样的结果。这一纪录总共维持了 21 年，直到 1942 年才被塞尔伯格所打破。

## 25 数学世界的独行侠

在二十世纪的数学家中，塞尔伯格 (Atle Selberg, 1917-2007) 是非常独特的一位。当数学的发展使得数学家之间的相互合作变得日益频繁的时候，塞尔伯格却始终维持了一种古老的独行侠姿态，他所走的是一条独自探索的道路。塞尔伯格于 1917 年

## 注 25.1

这一公式叫做哈代 - 拉马努金公式，它所描述的是将一个任意正整数分解为正整数之和的可能方式数。但是哈代 - 拉马努金公式虽然非常复杂，却仍只是一个近似的结论。Rademacher 及塞尔伯格所做的正是将它改进为精确的结论。

# Riemann



塞尔伯格  
Atle Selberg

出生在寒冷的北欧国家挪威。年少的时候他常常一个人独自静坐在他父亲的私人图书室里阅读数学书籍。那段经历与他后来近乎孤立的研究风格遥相呼应。就在那时，他接触到了有关印度数学奇才拉马努金的故事。那些故事，以及拉马努金的那些有如神来之笔的奇妙公式深深地吸引了他。随着阅读的深入，塞尔伯格自己的数学天赋也渐渐显现了出来。在二十岁那年，他已经可以对哈代与拉马努金的一个著名的公式作出改进 [注 25.1]。遗憾的是，同样的结果在一年之前已经由德国数学家 Hans Rademacher (1892-1969) 做出并发表了。

在二战期间，欧洲的许多科学家被迫离开了家园，整个欧洲的科学界变得沉寂凋零。但塞尔伯格仍然留在了挪威，在奥斯陆大学 (University of Oslo) 独自从事数学研究。随着战事的深入，学校里不仅人越来越少，到后来连外界的学术期刊也无法送达了。塞尔伯格与数学界的交流彻底地中断了。但这种在常人看来十分可怕的孤立，在塞尔伯格眼里却有一种全然不同的感觉。他后来回忆当时的情形时说：“这就像处在一座监狱里，你与世隔绝了，但你显然有机会把注意力集中在自己的想法上，而不会因其他人的所作所为而分心，从这个意义上讲我觉得那种

情形对于我的研究来说有许多有利的方面”。这个道理虽然浅显，但真正能忍受这种孤立的环境，并善加利用的人却是少之又少，塞尔伯格是其中之一。

战争结束后的 1946 年，塞尔伯格应邀出席在丹麦首都哥本哈根举行的斯堪的纳维亚数学家大会 (Scandinavian Congress of Mathematicians)，并做了报告，向数学界介绍他在战争期间所做的工作。这其中最重要的就是我们将在下节中介绍的他在黎曼猜想方面的成就。在那段战火纷飞、纳粹横行的黑暗岁月里，欧洲的数学界几乎分崩离析，数学家们走的走，散的散，下岗的下岗、参战的参战，真正留在本土从事研究且作出重大贡献的人很少，以至于玻尔 (Harald Bohr) 曾对来访的美国同行戏称说战时整个欧洲的数学新闻可以归结为一个词，那就是塞尔伯格！

塞尔伯格的卓越贡献一经曝光很快引起了著名的美国“猎头公司”普林斯顿高等研究所的注意。普林斯顿高等研究所我们曾在第 17 节中提到过。与那些每一条林荫道、每一间咖啡屋都散发着悠远历史的欧洲学术之都相比，创建于 1930 年的高等研究所显得十分年轻。但它却在极短的时间内声誉鹊起，成为了世界级的学术中心。这一崛起在很大程度上得益于它在二战期间吸引了从欧洲来到美国的许多第一流的学者，这其中包括像爱因斯坦 (Albert Einstein, 1879-1955) 与哥德尔 (Kurt Gödel, 1906-1978) 这样的绝世高手。战争结束后，在高等研究所任教的赫尔曼·外尔 (Hermann Weyl, 1885-1955) 向塞尔伯格发出了邀请。外尔本人就是被普林斯顿高等研究所“猎取”的来自欧洲的顶尖数学家，他曾是希尔伯特在哥廷根大学的继任者，但外尔的妻子是犹太人，这使他们在德国难以立足。塞尔伯格接受了外尔的邀请，于 1947 年来到高等研究所，1949 年成为正式成员。1950 年，塞尔伯格因其在黎曼猜想及其它领域的杰出贡献，与法国数学家洛朗·施瓦茨 (Laurent Schwartz, 1915-2002) 共同获得了数学界的最高奖：菲尔兹奖。

菲尔兹奖委员会对塞尔伯格获奖贡献的描述是：发展推广了 Viggo Brun 的筛法 (The Sieve Methods)；获得了有关黎曼  $\zeta$  函数零点的重要结果；(与保罗·埃尔德什一起)给出了一个素数定理的初等证明，以及对任意算术序列中素数研究的推广。