自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。”——伽利略

（一）引子

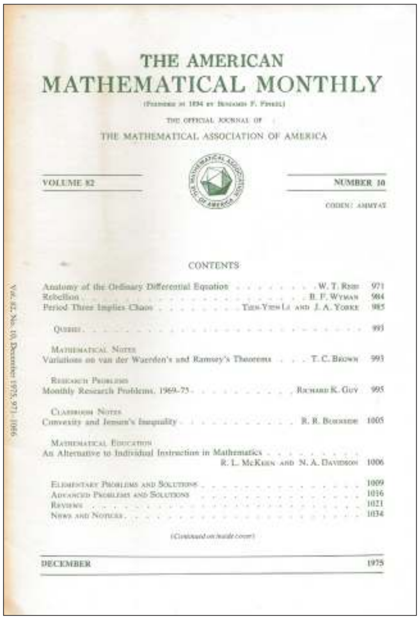
2009年的春天，新的一期《美国数学会会刊》（Notices of the American Mathematical Society）刊登的一篇题为“鸟与青蛙”的文章吸引了全世界许许多多的读者。这是生在英国、年逾八旬的美国普林斯顿高等研究院教授戴森（Freeman Dyson, 1923-）应美国数学会之邀所作的上年度“爱因斯坦讲座”的讲演稿。这位在学术界备受尊敬的理论物理学家和数学家形象地描绘了近代自然科学发展四百年来从十七世纪的英国人培根（Francis Bacon, 1561-1626）和法国人笛卡儿（Rene Descartes, 1596-1650）到二十世纪的匈牙利人冯•诺依曼（John von Neumann, 1903-1957）和中国人杨振宁（1922-）等典型的两类学术巨匠：大鸟般的俯瞰大地者与巨蛙式的深入探究者。

戴森在文章中描述了与那些“鸟”和“蛙”融为一体的几大学科，并不吝笔墨地用了近两页的篇幅来讨论混沌研究的发展。

戴森：“在混沌领域里，我仅知一条有严格证明的定理，是由李天岩和詹姆斯•约克在1975年发表的一篇短文‘周期三意味着混沌’中证明的。”（In the field of chaos I know only one rigorous theorem, proved by Tien-Yien Li and Jim Yorke in 1975 and published in a short paper with the title, “Period Three Implies Chaos.”）正如约克后来在寄给同一杂志的“读者来信”中第一句所述，他和李天岩“欣喜地”读到戴森接下来的评语：

“李-约克论文是数学文献中不朽的珍品之一。”（The Li-Yorke paper is one of the immortal gems in the literature of mathematics.）

为什么在演讲稿中甚至对大数学家冯•诺依曼都颇有微辞的戴森对李天


THE AMERICAN
MATHEMATICAL MONTHLY

THE OFFICIAL JOURNAL OF
THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA

VOLUME 82 NUMBER 10
CODEN: AMMYAT

CONTENTS

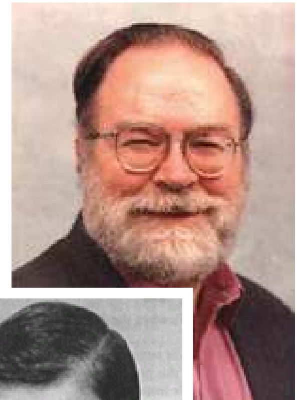
(Continued on inside cover)

DECEMBER 1975

Vol. 82, No. 10, December 1975, 971-1066

刊登李 - 约克论文的那期《美国数学月刊》

戴森（1923- ）



上图：约克（1941- ）；下图：李天岩（1945- ）

岩 - 约克的那篇“immortal”论文情有独钟？在这篇历史上第一次给予“混沌”这一普通名词之严格数学定义并在“混沌”、“分形”发展史上承前启后、继往开来的八页论文的背后，是什么样的风云变幻与扑朔迷离？

如今，混沌、分形的术语已在科学技术界家喻户晓。我们要追溯它们的历史，就必须首先请时光倒流一百年，去和被美国数学史家、1937 年初版的名著《数学伟人传》（Men of Mathematics）的作者贝尔（Eric Temple Bell, 1883-1960）称为“最后的全能数学家”的昂利 • 庞加莱（Henri Poincare, 1854-1912）来一番亲密接触。

（二）“三体问题”的困惑

真正意义上的现代物理科学大概是从意大利实验物理学家伽利略（Galileo Galilei, 1564-1642）著名的自由落体实验开始的。伽利略死后一年而生、“站在巨人肩膀上”的无与伦比的牛顿（Issac Newton, 1643-1727）24 岁前以“超过全人类的智能”，集前人研究成果之大成，提炼出他的“运动三大定律”，加上“万有引力定律”，构成经典力学的大框架。“英国人的骄傲”牛顿和“德国人的宠儿”莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716）各自独立发明的微积分，早已成为每一个理工科大学生的必修科目。

正如牛顿爵士的墓志铭上写着的，“他几乎神一般的思维力，最先说明了行星的运动和图像、彗星的轨道和大海的潮汐。”质量已知、外力给定，加上初始条件，运动物体在任何时刻的空间位置就可被牛顿定律所确定。有谁不赞叹他天才思想的洞察、神工鬼斧的创造？有谁不感谢他那颗智慧的大脑给我们的世界带来的亿万财富？

春夏秋冬、日复一日，太阳每天从东方升起，在西天落下，钱塘江每年一次涨潮落潮的壮观景象周而复始。每一天，当我们清晨早起，迎着灿烂的阳光走向工厂、农场、机关、学校的时候，我们会感到世界似乎是那么的有序，一切如同牛顿力学的“决定论”哲学思想所描绘的那样。

可是，无序无处不在。湍急的水流、物种的变异、股票的走向、心脏的跳动，甚至我们自己的喜怒哀乐，等等等等，无一不昭示着大自然和人类行为的随机性、不连续性、不稳定性这些不规则行为的方方面面。

对“世界有序”信条的第一次科学的挑战，在十九世纪末拉开了帷幕。正如美国记者格莱克（James Gleick, 1954-）在 1987 年出版的畅销书《混沌》的第一章“序曲”中所说：“混沌开始之处，就是经典科学终止之时。”

1885 年，瑞典和挪威国王奥斯卡二世（Oscar II, 1829-1907）为了庆祝他四年后的六十岁生日，提供 2500 克朗有奖悬赏求解我们赖以生存的太阳、地球、月亮这三大天体在相互之间万有引力的作用下，如果知道了在某个时刻它们的初始位置和初始运动，在后来任意的时刻它们的位置和速度是什么样？比如说，在一万年之后？这就是所谓的“三体问题”。两个物体的“二体问题”又叫做“开普勒（Johannes Kepler, 1571-1630）问题”，它早在 1710 年就已被约翰 • 伯努利（Johann Bernoulli, 1667-1748）首先解决了，他是瑞士历史上最令人吃惊的伯努利

家族的代表人物之一，该家族前后一百年间的三代人中就出现了八位“青史留名”的数学家，约翰•伯努利是第一代两兄弟中的弟弟。但增加一个物体，难度的增加几乎是无穷大。

牛顿万有引力定律说，两个物体之间的相互吸引力跟物体质量的乘积成正比，跟它们之间距离的平方成反比。根据牛顿运动第二定律，物体运动的加速度乘上它自己的质量等于作用在该物体上的外力。加速度是物体运动速度的变化率，换句话说，它表示速度的变化有多快，而速度又是物体在空间中位置的变化率。一个变量的变化率就等于微积分中的“因变量关于自变量的导函数”，即所谓“函数的导数”。所以物体的加速度等于“物体的空间位置”这个函数关于“时间”这个自变量的“导数的导数”，即所谓的“二阶导数”。这样一来，由于每个物体在空间中的位置由它的三个笛卡儿坐标表示，“三体问题”对应于求解九个“二阶非线性微分方程”，并检查当时间愈来愈远时解的最终性态。可惜的是，方程组的解虽然存在，但没有办法可以写出它的具体表达式，就像大多数自然界的应用问题一样。

新的方法应运而生，它来自庞加莱那颗杰出的“水牛般的大脑袋”。

庞加莱曾被无产阶级革命导师和辩证唯物主义哲学家列宁半褒半贬为一个“伟大的科学家，渺小的哲学家”。但在第一次世界大战中，当对法国充满敌意的一位英国将军询问他的同胞、数学家和哲学家罗素（Bertrand Russell, 1872-1970）谁是法国现代最伟大的人物时，后者立刻答道：

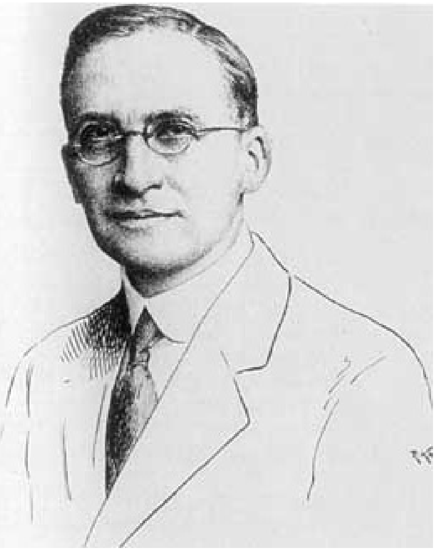
“庞加莱。”

“什么？那个家伙？”将军以为罗素指的是法国的总统雷蒙•庞加莱（Raymond Poincare, 1860-1934）。

当罗素知道那人如此惊愕的原因后，笑了一笑：

“我想到的是雷蒙的堂哥，昂利•庞加莱。”

庞加莱（1854-1912）



伯克霍夫（1884-1944）

庞加莱是数学研究领域包括纯粹数学与应用数学的几乎所有方面的最后一位数学通才，并在物理学许多领域，包括相对论，多有建树。他对数学和科学哲学的见解和论述，几乎让所有其他科学家难以望其项背。他的科学普及读物，像《科学与方法》，是科学专业人士和普通老百姓在巴黎的咖啡馆或公园里的读本，一百多年来被翻译成西方和东方多种文字出版，影响了几代人的科学思维和方法。由于其优美的语言表达和科学方法论著作的文学成就，他被选为法兰西学院文学部院士，这是对科学界人士的独特荣誉。

庞加莱出生于法兰西一个既显赫又杰出的家族，在童年时就显示出超群绝伦的智力。但有趣的是，已经成为那个时代一流数学家的他曾经参加过以同时代法国心理学家比奈（Alfred Binet, 1857-1911）名字命名的智力测验，结果是：如果他被当作孩子的话，大概属于“低能儿”。他一生当中的主要娱乐是阅读，其读书的速度快得令人难以置信，并有着比瑞士的大数学家欧拉（Leonhard Euler, 1707-1783）更强的记忆力，这大概和他与生俱来的差视力有关。与一般人通常用眼睛帮助记忆不同，庞加莱几乎是靠耳朵，但与后来在一些国家中盛行的“耳朵识字”伪科学无关。事实上，在大学念书时，因看不见黑板上的字，他坐在后排听，不记笔记，只靠耳朵，非同寻常的记忆力派上了大用场。看来，近视眼的学生，大可不必花钱配眼镜，坐在课堂的后面听讲也许是锻炼记忆力的一大秘诀。

庞加莱 17 岁以第一名的成绩考入了法国著名的巴黎高工。他的数学天才技惊四座，别人的数学难题一告诉他，“答案就像一支箭似地飞了出来。”但他不善体育，绘画入学考试零分，差点被拒绝在校门之外，就像中国的大学者钱钟书（1910-1998）当初报考清华大学时那样。

从 1878 年提交数学博士论文给巴黎的法国科学院，到他 1912 年因病辞世，庞加莱在他不长的 34 年学术生涯中留给全人类近 500 篇数学论文和 30 多本覆盖数学、物理和天文等众多学科的著作，还不包括那些科学哲学的名著和为大众撰写的通俗文章。他去世前不久发表了他未能证明的一生中

魏尔斯特拉斯（1815-1897）

埃尔米特（1822-1901）

米塔 - 列夫勒（1846-1927）

最后一个重要定理，给后来者提出了前景美好的新的重要问题。这条与三体问题也有关系的所谓“庞加莱最后的几何定理”很快就被一名后起之秀、年轻的美国数学家伯克霍夫（George David Birkhoff, 1884-1944）证明。为他一生画上句号的这条漂亮定理大意是说，如果你保持面积地双向扭曲一个像只垫圈的环形区域，让圆形的外边和内边分别按顺时针和逆时针方向旋转，则圆环中至少有两个点“不为扭曲所动”。

1889 年，庞加莱提交了他对三体问题的研究以及由此而生的对微分方程的一般讨论。这个理论不同于传统的那个只需要求出方程解公式的定量理论，而是探讨其表达式求不出的解的种种性质。虽然他未能完全解决三体问题，却在求解过程之中以及他生命的最后十年创立了“组合拓扑学”或“代数拓扑学”这一新学科。由当时健在的三个顶尖数学家，分别为德国人、法国人和瑞典人的魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass, 1815-1897）、埃尔米特（Charles Hermite, 1822-1901）和米塔 - 列夫勒（Magnus Gosta Mittag-Leffler, 1846-1927）组成的评奖委员会决定授于他奥斯卡国王的这一奖金。

魏尔斯特拉斯在写给米塔 - 列夫勒的评奖报告中赞美道，庞加莱的工作“是非常重要的，它的发表将在天体力学史上开创一个新的时代”。

但是，庞加莱获奖工作的基本假设是“同宿点不存在”。所谓的同宿点是关于一个不动点的稳定流形和不稳定流形在别处相遇的一个点。他起初认定这两个流形在别处不相遇，天下因此太平，大家都很高兴，他也拿到了 2500 克朗的奖金。

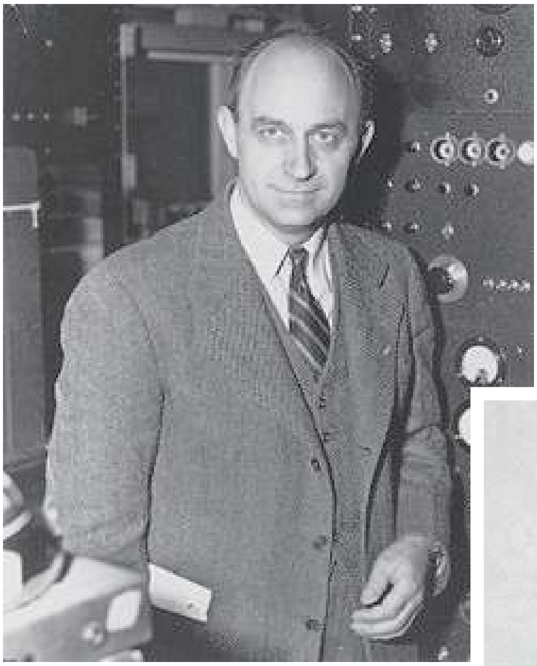
那一年的冬季，庞加莱的获奖论文开始印刷，准备发行。一名数学家和庞加莱本人在校对样稿时都发现了其中的一些地方证明不太清楚。认真负责任的庞加莱开始全力以赴地修改这些部分，并且通知杂志的主编收回了已经印出的杂志予以销毁。他还主动自掏腰包地付了 3585 克郎，赔偿出版社的经济损失。这就是说，除了贴上他的奖金，他还倒赔了一千多克郎。但这个人的小损失，换来了人类的大进步。修改后的文章增加了将近三分之一的篇幅。正是这次修改导致了他对“同宿点可能存在”的伟大发现。

最终，庞加莱的这篇长达 270 页的论文“关于三体问题的动力学方程”于 1890 年 10 月在瑞典领头数学家米塔 - 列夫勒所创办的《数学杂志》（Acta Mathematica）上发表。从此，他一不做二不休，乘胜前进，自 1892 年到 1899 年一口气地撰写了三大卷充满新思想的宏伟巨著《天体力学的新方法》。

庞加莱首先证明了三体问题不像二体问题，不可能通过发现各种“不变量”来把问题化繁为简以获得解析解，这就让他那一代的数学家们想找到三体问题显式解的梦想破灭，彻底地重塑人们研究微分方程的基本想法。

更为重要的是庞加莱发现，三体问题微分方程组的稳定流形和不稳定流形由于相交而产生同宿点，因此引起方程的一般解在某些区域具有异常复杂的状况，以至于对于给定的初始条件，几乎是无能为力来预测当时间趋于无穷大时，这个解曲线的最终命运。

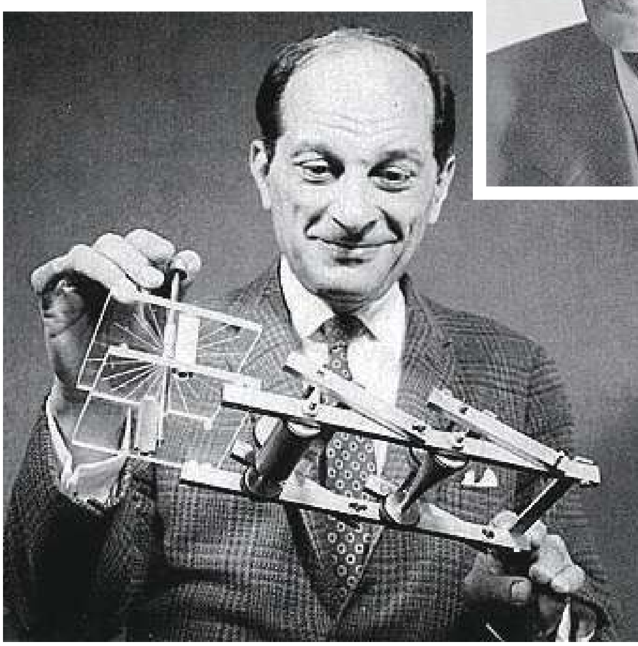
庞加莱对找不到解的解析表达式的微分方程解的一般理论，导致了用几何和拓扑方法研究微分方程解的定性理论的诞生。这门学问现在被纳入



费米（1901-1954）

特勒（1908-2003）

奥本海默（1904-1967）



乌拉姆（1909-1984）

费恩曼（1918-1988）

称之为动力系统的大范畴。他在研究天体运动的三体问题时已经清楚地知道它的解对初始条件的“敏感依赖性”，以及解的最终性态的“不可预测性”。可以说，他是人类历史上懂得自然界混沌可能性的第一人。

今天，即便是学过非线性微分方程初级理论的大学高年级学生也已知道，混沌可以出现在看上去很简单的双摆运动之中。为什么高中物理或大学普通物理课的老师并没有告诉这一事实？也许他们也被伽利略或荷兰大物理学家惠更斯（Christiaan Huygens, 1629-1695）这样的先知先觉所误导。我们高中第一学期曾经学过的没有阻

力的单摆运动是像一百年前上海资本家大亨家的客厅里那只时髦大挂钟下端的摆一样周而复始、来回不停的小幅摆动。在这种理想的小振幅情形下，十七世纪的实验物理学家们坚持不把摆动的角度改成它的正弦值这个精确数，只因为小角度的正弦值可以用测量角度的弧度值来代替，误差是微乎其微的。这样一来，万事大吉，正确的二阶非线性微分方程近似成简单的二阶线性微分方程，“非周期运动”的可能性就从这个忽略中溜走了。

如果我们的单摆可以摆动任意角度，惠更斯名垂青史的那个“摆的周期定律”就成了谬误。我们只好又回到那个精确的、基于牛顿力学的、包含摆动角度正弦的非线性微分方程。如果我们做一点点试验，把单摆的“初始角度”取得比较大，再给它某一些“初始角速度”，也许能见识到其他类型的摆动形式。几十年来，一些喜欢动动手玩玩游戏的混沌学家制作了基于摆的混沌装置，如太空球和球面摆，它们有时有条不紊地有节奏摆动着，有时却处于变化莫测的混沌运动之中。

庞加莱的获奖论文和那三卷大书奠定了现代天体力学和动力系统研究的基础，尽管他的众多想法要等几十年以后才慢慢地被一批“思考者”所领悟而进一步推进。他太超越一百年前的那个时代了。直到近半个世纪之后，由于第一个“遍历定理”的证明，第一台电子计算机的问世，成就了第一代的“非线性分析”的先驱们，从而兴起了后来者们混沌学研究的热浪。

（三）非线性分析的先驱

位于美国西南部靠近墨西哥的新墨西哥州的洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）国家实验室是世界上第一颗原子弹诞生的摇篮。被公认为“原子弹之父”、第二次世界大战后曾任普林斯顿高等研究院院长的美国物理学家奥本海默（Robert Oppenheimer, 1904-1967）领导了这个代号为“曼哈顿工程”的原子弹研制工作。李政道（1926-）芝加哥大学博士论文导师、1938 年在瑞典参加他荣获诺贝尔物理奖的颁奖仪式后即赴美国定居的意大利人费米（Enrico Fermi, 1901-1954），杨振宁在同系的博士论文导师、长寿的匈牙利人特勒（Edward Teller, 1908-2003），“电子计算机之父”、特勒的同胞冯•诺依曼，“氢弹之父”、波兰人乌拉姆（Stanislaw Ulam, 1909-1984），以及聪明绝顶而又风趣盎然、且于 1965 年成为诺贝尔物理奖得主之一的美国人费恩曼（Richard Feynman, 1918-1988）等物理学大家、数学天才聚集在奥本海默的周围，为了击溃法西斯、赢得二战胜利献出了他们的智慧。有点悲剧性的是这些极度爱国的科学家中那些直接接触过放射源的宝贵人才，如费米、冯•诺依曼和费恩曼，都患癌症英年早逝，就像中国的“原子弹之父”邓稼先（1924-1986）那样。

冯•诺依曼（1903-1957）

约翰•冯•诺依曼大概是上世纪全世界最聪明的数学家，让美籍德国物理学家、“曼哈顿工程”理论部主任、1967 年诺贝尔物理奖获得者贝特（Hans Bethe, 1906-2005）感叹不已：

“冯•诺依曼这样的大脑是不是意味着存在比人类更高一级的生物物种？”

比冯•诺依曼大一岁并同在匈牙利一个精英中学相差一届毕业的魏格纳（Eugene Wigner, 1902-1995; 1963 年诺贝尔物理奖获得者）终生对他似乎有一种近乎自卑的情结藏于心中：

“不管多么聪明的人，和冯•诺依曼一起长大就一定会有挫败感。”

虽然冯•诺依曼被视为“现代计算机之父”和“博弈论之父”，但他认为自己最重要的贡献都在数学上：希尔伯特空间的自共轭算子理论、量子力学的数学基础和以他名字命名的“冯•诺依曼平均遍历定理”。然而，在他临终前的美国首都华盛顿里德医院病房里，对现代数学几乎一窍不通的美国国防部正副部长、陆海空三军司令以及其他军政要员“围聚在他的病榻前，聆听他最后的建议和非凡的洞见。”

作为洛斯阿拉莫斯国家实验室的顾问，当时最受美国政府尊敬的数学家冯•诺依曼邀请了他终生的朋友和知音、比他小五岁多的另一位数学奇才斯坦•乌拉姆加盟洛斯阿拉莫斯。从此，这位不到二十岁就以证明无穷集合重要定理而留名数学史的神童和具有非凡创造力的理论家，就开始与物理学家为伍，一只脚从纯粹数学的天空跨进了应用学科的地盘。

和冯•诺依曼一样，乌拉姆也是犹太人，生于律师之家。在其 1976 年初版的自传《一个数学家的经历》一开头，他回忆到四岁时就对家中东方地毯的复杂图形着迷。十一岁前，当他目视着父亲书房内一本欧拉的书《代数》，那种“神秘的感觉”油然而生。在那个现在国际数学界已名闻遐迩的“苏格兰咖啡店”，年轻的乌拉姆和他的老师之一、现代数学分支“泛函分析”集大成者、二战结束时因长期饥饿和重病而壮志未酬的杰出波兰数学家巴拿赫（Stefan Banach, 1892-1945）等数

学师友们持续不停地提出、讨论、争执以及解决数学问题，其集体思维磨擦出的阵阵火花被他们及时地记录在著名的“苏格兰笔记”上。乌拉姆自己也经常惊奇“黑板或草稿纸上的一些乱涂会改变人类发展的进程”。

乌拉姆是科学计算中十分有用的“蒙特卡罗法”的提出者之一。他 1960 年出版的一本仅有 150 页的“小”书《数学问题集》是启迪跟随者们研究灵感的凝聚物。他的两本文集《集合、数及宇宙万象》和《科学、计算机及故友》，充满令人称奇的数学智慧和超越时代的科学思想。他无愧于去世后，世人慷慨赠与他的“贤者”（Sage）这一崇高称号。

正如冯 • 诺依曼的一位传记作者所说，招入乌拉姆是冯 • 诺依曼“对原子弹做出的两大贡献之一”。这两大贡献，一是找到了帮助洛斯阿拉莫斯实现数学化的快捷方式，二是爆聚炸弹。对于后者，在 1945 年 5 月德国投降后的 6 月 6 日冯 • 诺依曼写给乌拉姆的信中，他认为是乌拉姆的数学而不是其他的什么人做出了最大的贡献。信中说：

“当我听说物理学向集合论无条件投降时，特别高兴。我认为独特的问题就应该有独特的解决方法才对。尽管基地知识界鱼龙混杂，你几乎可说是这个想法之父。”

无独有偶，在几年后的氢弹研制中，乌拉姆再一次发挥了神奇的作用。1991 年再版的乌拉姆自传之后记中，他法国出生的太太弗兰科斯 • 乌拉姆回忆了令她牢记在心的 1951 年 1 月 23 日那一天中午：

“我发现他正在家中起居室表情奇怪地凝望着窗外的花园，说道，

‘我找到了一个让它工作的途径。’

‘什么工作？’我问。

‘氢弹’，他回答道。

‘这是一个全然不同的方案，它将改变历史的进程。’”

乌拉姆过世后，美国主流新闻杂志的悼念文章中说他“确实是氢弹之父”。乌拉姆和特勒在洛斯阿拉莫斯的上司贝特早在 1968 年就评述道：

“氢弹被造后，记者开始称特勒为氢弹之父。为了历史起见，我认为这样说更精确：乌拉姆是父亲，因他提供了种子；特勒是母亲，因他‘十月怀胎’。至于我，我猜我则是助产士。”

尽管笼罩在战时的紧张气氛之中，洛斯阿拉莫斯国家实验室自由、宽松的学术研究气氛，与乌拉姆的工作方式很合拍。他不必按时上下班，在帮助科学家、工程师们进行原子弹设计计算之余还可以继续他天马行空般的、与原子弹无直接关系的数学研究。

四十年代的中后期，随着冯 • 诺依曼帮助研制成功的第一台现代电子计算机的出现，方便而又快速的数值计算极大地帮助了创造型数学家的大脑思维，成了他们提出问题、解决问题的好帮手。作为最早接触现代计算机的数学家，在与像费米这样的大物理学家合作解决物理问题的过程中，冯 • 诺依曼、乌拉姆就和费米等人成了“非线性分析”这一集数学、物理、计算机等学科于一身的科学领域的开创者。

我们生活的世界在“时间”这位统帅的率领下昂首阔步地向前进，直到乐观主义者的“无穷远”，或到悲观主义者“世界末日”的有穷远为止。不管怎么样，天生具有好奇心的人类都想预测未来，甚至是最终的未来。一门新学科“非线性分析”由此而诞生，它不久也被称为“动力系统理论”。对于这门学科和后来的混沌学的联姻关系，乌拉姆曾戏称道：

“把混沌研究称为‘非线性分析’，好比是把动物学叫做‘非象类动物的研究。’”

非线性分析的目的主要是探索任何随时间而变化的量当时间走向无穷大时的最终性态。时间是一个连续的自变量，它对应的函数变量往往满足一个微分方程，就像十九世纪末期庞加莱研究三体问题以及二十世纪中叶洛伦茨预测天气变化用到的那些根植于牛顿力学的微分方程。研究微分方程那样的解当时间趋于无穷大时表现的那部分动力系统称为“连续动力系统”。为了把一些复杂的问题简单化一点，我们也可以把时间的长轴分成同等长度的无穷多个时间段，最方便的划分是让时间取所有的正整数值 1, 2, 3, 4, 5, … 。这样，微分方程解的渐近性态就成了“解在时间为 1 时的值”所定义的某个函数的逐次迭代之渐近性态。这就是被称为“离散动力系统”的另一个学科所要做的事。

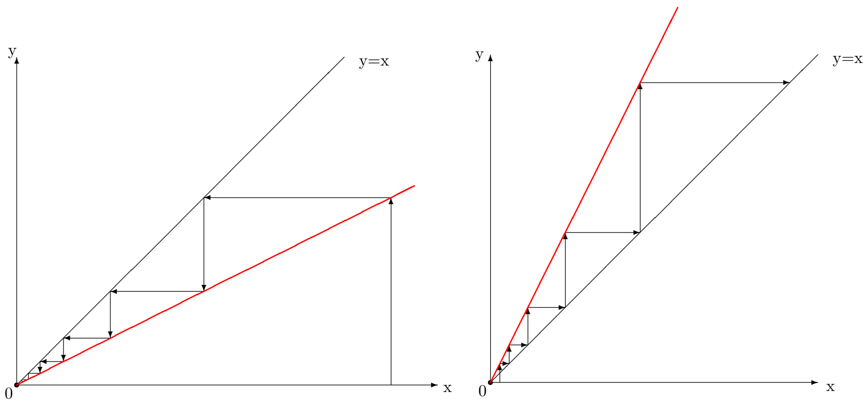
想象力丰富并且喜欢做“梦”的我国先秦时期的哲学家庄子（约前 369- 前 286）无意中曾经叙述了一个离散动力系统问题：

“一尺之锤，日取其半，万世不竭。”

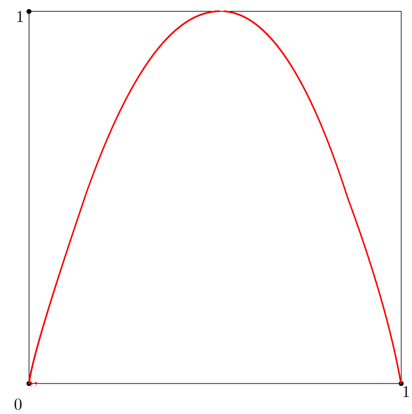
这不光包含了古人关于“无穷”的思想，而且，用离散动力系统的语言说，他所表达的问题就是从初始数 1 开始，每次除以 2，无穷次地除下去，最后的数将趋向于 0，这是该计算过程之前就可以预测到的未来结果。

在数学上，庄子的问题可翻译成迭代简单的线性函数 $f(x) = x/2$。中学生都知道，线性函数的图像是一条直线，这条直线和笛卡儿发明的 xy- 直角坐标系的东北 - 西南方向对角线有一个交点，这个交点的横坐标和纵坐标相等，所以该函数在这一点的值等于自变量的值，称之为函数的“不动点”。如果我们嫌计算函数迭代太花费时间，有一条“几何的快捷路径”可走：

首先在 x- 轴上代表初始值 x_0 的那个点沿着竖线走，直到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着横线走，一直走到和对角线相交，这个交点就代表第一个迭代点 x_1。然后从这点沿着竖线走，一直走到和函数的图像相交，在交点处向左或向右转弯沿着横线走直到和对角线相交，这个交点则代表第二个迭代点 x_2。如



函数迭代的几何途径法



逻辑斯蒂模型的图像

此走下去，我们就依次得到对角线上代表迭代点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \cdots$ 的一个点列。

把这个快速的几何方法用到一个线性函数，我们发现，随便从哪一个初始点出发，对角线上那些迭代点的序列要么趋向于函数图像和对角线的那个交点，要么越走越远，最终走到无穷远。无论如何，这些迭代点的最终性态是可以预测的，这可不是未来的混沌学家想要看到的那样。因而，线性函数的迭代是没啥可看的。幸运的是我们生活的世界几乎处处是非线性的。

对于非线性的函数，更有趣的现象纷至沓来。譬如说，冯•诺依曼曾经建议用如下的简单方法来产生区间 [0, 1] 上的随机数：任取一个六位小数，平方一下，再砍掉小数点后的前六位数字，得到下一个六位小数。重复同一过程就得到一列随机数。这相当于无穷次迭代非线性函数 $f(x) = 1000x^2$ (mod 1)，其中括号内的符号意思是砍掉函数值结果的整数部分。

对于一般的非线性函数，早在 1931 年，在不到 30 岁那几年已经硕果累累的冯•诺依曼就证明了第一批遍历定理中的第一个。这就是被他自己视为一生中三大数学贡献之一的“冯•诺依曼平均遍历定理”。受他工作的灵感启发，美国本土成长的哈佛教授伯克霍夫很快证明了“伯克霍夫逐点遍历定理”，并抢先一步发表，这让解决问题太快的冯•诺依曼有点儿自责：为什么自己不多走几步呢？这些第一代遍历定理大致是说，如果无穷次地迭代一个“遍历”的非线性函数，迭代点序列访问“相空间”内某一区域的频率恰恰等于这个区域关于整个空间的相对大小。这个事实简称为“时间平均等于空间平均”，从而奠定了统计力学中不太坚实的“波尔茨曼（Ludwig Boltzmann, 1844-1906）遍历假设”之严密的数学基础。可惜这位现在看来越来越伟大的奥地利物理学家再也不能破涕为笑了，因为早了四分之一个世纪他就因长期忧郁而最终自缢身亡。

1947 年，乌拉姆和冯•诺依曼研究了当今已成为混沌学这个学科中最有名气的混沌函数之一、所谓的“逻辑斯蒂模型” $f(x) = 4x\,(1-x)$。这是一个初中生都认识的二次多项式函数。它的函数图像是个开口朝下的抛物线。因为当 $x = 0$ 或 $x = 1$ 时函数值都等于 0，这个抛物线通过 xy- 直角坐标系中 x 轴和 y 轴的交点，称为直角坐标系的原点，和 x- 轴上位于原点右边与原点相距为 1 的那个点。更进一步地细看，这个抛物线顶点的横坐标为 $x = 1/2$，纵坐标为 $y = 1$。所以当自变量 x 限制在 0 和 1 这两个数之间时，对应的函数值也位于 0 和 1 之间。这样一来，函数 f 把线段 [0, 1]“映入”到它自己之中，即 x 属于区间 [0, 1] 隐含着 $f(x)$ 也属于 [0, 1]。

于是，闭上眼睛在 [0, 1] 区间中随机地捡一个数 x_0，我们可以不断地迭代函数 f，得到位于 [0, 1] 区间上的一系列数。我们可以设想 f 是一个“函数机器”，它输进的“毛胚”是自变量值 x，输出的“产品”是对应的函数值 $f(x)$。迭代函数就相当于不断地把当前的函数值再输回到函数机器内得到下一个函数值。如此循环地做下去，我们就得到下面的无穷点列：

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2),\ x_4 = f(x_3),\ \cdots。$$

乌拉姆和冯•诺依曼知道这些迭代点依次在线段 [0, 1] 上像俄罗斯作曲家柴可夫斯基（Peter Ilyich Tchaikovsky, 1840-1893）的芭蕾舞剧《天鹅湖》中的可爱白天鹅那样翩翩起舞，跳来跳去。它们会像波兰伟大的爱国钢琴家肖邦（Frederic Francois Chopin, 1810-1849）的指尖在琴键上弹奏出他那大气磅礴的钢琴曲“革命”吗？

乌拉姆和冯•诺依曼想知道这些看上去无序排列的迭代点是否在某种意义下“有序”。这个意义就是或然率，在数学上它有一个专门化的名词：概率。

概率的问题到处可见。乌拉姆的祖国同胞和“非线性分析”的接棒人、已故波兰科学院院士洛速达（Andrzej Lasota, 1932-2006）这样讲概率：

“你准备离开一间屋子时，你出门的时侯有可能前后相差一分钟。随着时间的推移，又有不同的概率及可能发生的事要去考虑。比如，有百分之十的可能，你会发生车祸，而被送往医院；或许，有百分之十的机会，你会遇见从未谋面的漂亮女子，而深深为之倾倒，一切皆是偶然。所以事情会演变得愈来愈复杂，所有的事都牵涉到概率。”

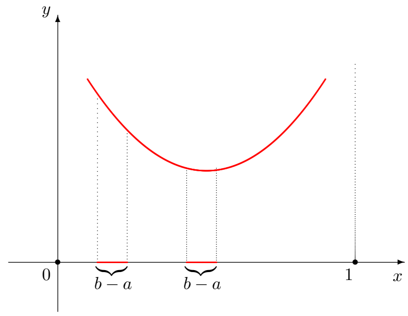
故有人曾经略微夸张地宣称：数学是概率的一部分。

乌拉姆和冯•诺依曼考虑了如下的概率问题：任取 [0, 1] 区间内的一个子区间，记为 $[a, b]$，这些迭代点的无穷序列的每个点跳进这个子区间的总的或然率为多少？算出或然率，就要先算出总数为有限的点列中符合要求的那些点出现的频率。假如 10000 个点中有 4000 个点进入 $[a, b]$ 子区间，那么频率就是前一个数被后一个数除，等于五分之二。同样的道理，在

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \cdots,\ x_{n-1}$$

这 n 个点中，若有 k 个点进入 $[a, b]$ 子区间，那么进入该子区间的点的频率为一个分数 k/n。所有迭代点中进入 $[a, b]$ 子区间那些点的或然率就等于 当 所有迭代点的个数 n 越来越大直至无穷时，对应的频率值愈来愈趋近的那个数，如果这个“极限”数的确存在的话。

乌拉姆和冯•诺依曼发现，对所有的子区间 $[a, b]$，这些概率值不光存在，而且等于位于 $[a, b]$ 上方的一个“曲边矩形”的面积，并且对于“几乎处处”所取的初始点 x_0 都一样，即概率值只依子区间而定，而与初始点的选取无关。这个矩形的上边是一条形状像下垂的绳子的曲线，该曲线是他们找到的“概率密度函数” $y = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\}$



概率密度函数 $y = 1/\{\pi[x(1-x)]^{1/2}\}$ 的图像

的图像。

因此，乌拉姆和冯•诺依曼告诉我们：“无序”排列的迭代点列在概率的意义下可以是“有序”的。

从这个密度函数图像的形状可以看到，它在左边半个区间上是“递减函数”，像下山，在右边半个区间上是“递增函数”，像上山。并且当 x 的值越靠近 0 或 1 时，函数值越来越大，最后趋向无穷大。由此可知，区间 [0, 1] 内两个小区间，即便有同样的长度，若一个比另一个更靠近 [0, 1] 的两个端点之一，则它对应的曲边矩形的面积比另一个大一点，因而迭代点序列进入第一个小区间的概率比第二个小区间的更大。这说明逻辑斯蒂模型这个二次多项式函数的迭代点序列在区间 [0, 1] 上不是“一致分布”的：在区间两端点旁比中央部分聚集着更多的点。如果好奇心强的读者还想看看这些点到底是怎样密密麻麻地分布的，可以进入美国波士顿大学数学系教授、斯梅尔（本文第五节将要遇到的拓扑动力系统开山祖师爷）的弟子中动力系统教科书写得最多的蒂凡尼（Robert L. Devaney, 1948-）的“动漫网站”（http://math.bu.edu/people/bob），去亲手体验函数迭代的乐趣。

这是乌拉姆和冯•诺依曼的非线性分析在数学分支遍历理论的花园中为我们采集的一朵绚丽的小花。遍历理论研究“确定性”动力系统诸多的概率统计性质，是集测度论、泛函分析、拓扑学、近世代数等知识于一身的综合性纯数学科目，同时也在物理、生命科学和工程科学中应用广泛，如统计物理、电子线路，以及与我们日常生活密切相关的无线电话，甚至目前最有人气的网络搜索引擎谷歌（Google）的研究也用到它。

然而，非线性分析的星星之火并没有很快在科学的茫茫大地上燎原开来，直到十年后一位终生喜爱天气的美国人无意中点燃了新的火种。

（四）蝴蝶效应

天气预报是个古老并与我们的日常生活密切相关的问题。我们每天都要看看天气预报以决定出门是否带伞。远古时代的天气预报大概主要靠猜或根据经验，故传统的方式不太像科学，更像感官性的技术。现代天气预报基于求解描述大气运动的微分方程组。理想的情况是我们能够预报长期的天气走向。如果能知道明年的今天天气是怎么样，那多么好啊，但是中央电视台的天气报告员就要伤心难受，因为饭碗可能要丢。这个科学幻想小说中可能描绘过的美好前景能够实现吗？

上世纪在非数学的领域中对全人类可能贡献最大的纯粹数学家冯•诺依曼是天气预报的乐观主义者。在他短暂的五十三年寿命最后的几年中，牛顿式决定论哲学思想占据着他智慧的大脑，这一思想是由法兰西皇帝拿破仑•波拿巴（Napoleon Bonaparte, 1769-1821）十六岁时在军事学校的考官拉普拉斯（ Marquis Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827）发扬光大的。冯•诺依曼认为描述天气的方程就像描述行星的方程一样，都由牛顿力学确定，既然彗星能被精确预见多少年后再次光临，天气为什么不能被精确地预报呢？不光如此，他热情地展望，随着大规模科学计算的可能性跟随着计算机的发展接踵而至，人工控制天气的

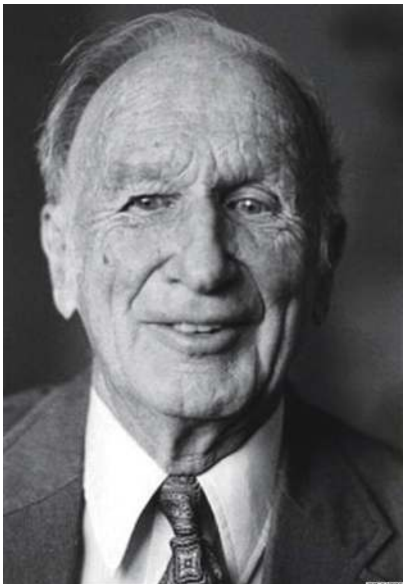
美好时代也将会随之到来。

天气变化是一个复杂的过程，但它被流体力学的基本定律支配着。天气预报依赖的是求解对应的偏微分方程组，它们的解是温度、气压、风速等这样的函数变量，它们以时间及其地球表面上空一定高度内所有点的三个坐标数作为自变量。要确定从某个初始时刻起以后依赖于时间和空间位置的天气变化的方程解，我们必须知道在那个初始时刻的温度、气压、风速等的空间分布。而这些初始数据可以通过密布全球的观测站收集。所谓的数值天气预报，就是数值求解偏微分方程组离散化后的代数方程组，观测资料越多，这些方程组的尺寸就越大，天气预报的准确度也就越高。但这在现代计算机出现之前的几百年间是难以做到的。

自从冯•诺依曼五十年代初在位于美国新泽西州的普林斯顿高等研究院造出第一台计算机，他就立下矢志，让越来越强大的计算机成长为一位“人造的英雄”，为天气预报以及更进一步控制天气发挥重要作用。真可惜，他千万没有想到，操纵天气变化的微分方程内在的性质即将扮演着反英雄的角色，让他所有的雄心壮志化为乌有。

1961年冬季的一天，爱德华•洛伦茨（Edward Norton Lorenz, 1917-2008）教授像往常一样地走进他任教的美国麻省理工学院气象系的办公室，继续用他的那台Royal McBee型的简陋计算机来计算与天气预报有关的三个简单非线性微分方程的初值问题的数值解。

洛伦茨1917年出生于美国东北部新英格兰地区的康涅狄格州西Hartford市，从小就是一个气象迷，每天都在他家房子外面注视那个测量气温的温度计上的记录。他先后在达特茅斯学院和哈佛大学学数学，分别获得学士和硕士学位。在第二次世界大战中的1942年直至战后的1946年，



爱德华•洛伦茨（1917-2008）

他如愿以偿地成为美国空军的一名气象预报员。二战结束后，他又回到了学校读书，兴趣自然转向到气象学研究，故决定学气象，并从麻省理工学院拿到这个领域的两个学位，包括1948年的博士学位。他最终成了这所名校的气象学教授。

一年前，也就是1960年，洛伦茨选择数值天气预报方程时，选取了十二个微分方程来决定十二个变量，用计算机来模拟天气。一打方程，对于当时的计算机计算起来还是有点多。最后，他决定从耶鲁大学某个教授研究过的一组七个方程中选出三个，这些方程描绘流体的对流运动，即受热流体的上升运动，就像当我们夏天走在被太阳烤热的柏油马路上看到的冉冉升起的气流那样。这三个方程是非线性的，却是十分简单的非线性，只有二次项出现，并能对他制造的“玩具天气”令人信服地模拟。

这一天，与往常一样算了一阵子之后，为了去喝咖啡，洛伦茨暂停了计算，只是把计算机终端上的数据抄了下来，作为再次计算的初始数据输入计算机，然后他穿过大厅下楼喝咖啡去了。

一小时之后他回到办公室，十分吃惊地看到计算机并没有精确地重复老结果，这不是理所当然的事。照理说，程序一样，初始值一样，输出结果也应该一样。难以理解的是，他发现新的计算结果同上一次的计算结果随着时间的推移迅速偏离，面貌全非。不到几个“月”时间，“天气”完全不一样了。严谨而又细心的他将信将疑地重新算了几次，类似的现象在反复试验中总是出现。他的脑海里立刻闪过一个念头：计算机坏了。

但是，计算机完好无缺。一霎那，洛伦茨明白了。这个伟大的理解，借用格莱克的语句，“播下了一门新科学的种子。”

原来，计算机内存中的数据保持六位小数，输出时为了节省空间，只打印了四舍五入后留下的三位小数，比如0.123456打成0.123，0.456789打成0.457。他喝咖啡前抄下的数据只有三位小数，与旧的计算结果仅仅相差不到千分之一而打进计算机的初始值，新的计算结果和原先预期的计算结果就会大相径庭，这真是奇怪的现象，与人们通常的观念相悖。

通常的观念是：小的输入误差导致小的输出误差。这是一切物理、几何测量的依据。任何测量都有误差，但只要误差足够小，结果就足够精确。譬如要算出一个正方形的面积，经验告诉我们，只要边长量得足够仔细，算出的面积就足够满意。

但是，小的输入误差也会导致大的输出误差。如果我们用天文望远镜来观察月亮上的一个物体，望远镜仰角极小的增加就会把我们的视线落在另一个相距甚远的目标上。这是因为地球和月亮之间的距离，作为角度测量误差导致弧长误差的“放大因子”，是太大了。

即便放大因子不太大，重复不断的放大也会“聚沙成塔、集腋成裘”。

让我们做个简单的数学实验。随便取一个 0 和 1 之间的数，加倍一下。如果结果还在 0 和 1 之间，就得到下一个数，再做同样的事；如果结果比 1 大，就砍掉它的整数部分，得到下一个数，再做同样的事。如此周而复始，给出一个迭代过程，所有的迭代点都落在 0 和 1 之间。

这个迭代产生的数列的每一个数都是前一个数乘以 2，再去掉整数部分。例如，如果第一个数是 0.1，那么它后面的数为 0.2，0.4，0.8，0.6，0.2，等等。如果第一个数有了 1% 的误差，那么第二个数的误差就为 2%，第三个数的误差为 4%，以后依次为 8%，16%，32%，64%，等等。我们看到，第七个数的误差就比初始误差放大了 $2^6=64$ 倍。

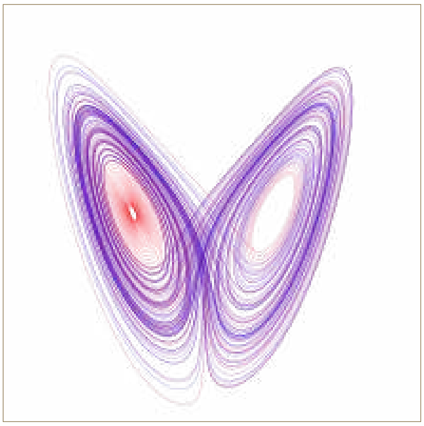
洛伦茨在他的计算中看到了这种“对初始值的极端敏感性”。他终于领悟到这一异常现象根植于天气预报所依赖的微分方程组的这个内在特性，而不是什么计算过程中的舍入误差在作怪。后来，在他写的《混沌的本质》这本有中文译本的书里，他再一次回忆到他当时的想法：

“如果实际大气的形态像这一简单模式的话，那么长期天气预报将是不可能的。温度、风以及其他和天气有关的量，确实不能精确地测量到三位小数。即使能够这样，但在观测点之间进行内插也不能达到类似的精确度。我有些激动，并且很快将我的发现告诉了一些同事。最终，我确信小的差别的放大是缺乏周期性的原因。”

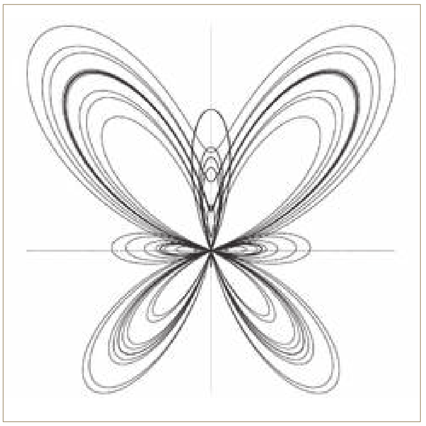
洛伦茨由此得出结论：

“一个确定性的系统能够以最简单的方式表现出非周期的形态。”

洛伦茨把他的发现和分析写成了论文“确定性的非周期流动”，发表在《大气科学杂志》1963 年的第 20 卷上。日后，他把这一现象形象地比喻成“蝴蝶效应”，用在了他 1979 年 12 月 29 日在美国科学促进会的演讲题目：“可预见性：一只蝴蝶在巴西扇动翅膀会



蝴蝶效应



费的蝴蝶图像

在得克萨斯引起龙卷风吗？”

天气预报的蝴蝶效应由于格莱克 1987 年那本面向大众的国际畅销书《混沌》而成为路人皆知的一个形象说法、一个专用名词。美国南密西西比大学数学系的费（Temple H. Fay, 1940-）教授找到一个简单的三角函数，用极坐标画出的图像看上去是一只美丽绝伦的蝴蝶。他的漂亮作品发表在 1989 年 5 月期的《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly）上（见维基百科网页 http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_curve_(transcendental)）。

约克对“不可预测性”的概念也有过形象的说明：

“生命中是充满着小改变导致大变化的情形。例如说车祸，假如人们早个或晚个十秒钟出门，或许就可避免一场车祸。所以小小的改变可以导致很大的变化。”

这也体现在中国的成语“差之毫厘，谬以千里”之含义中。“控制论之父”、美国第二个“国家科学奖”的获得者维纳（Norbert Wiener, 1894-1964）曾引用过这样的一首民谣：

钉子缺，蹄铁卸；
蹄铁卸，战马蹶；
战马蹶，骑士绝；
骑士绝，战事折；
战事折，国家灭。

它十分形象地描绘了日常生活和社会变革中随手拈来的混沌现象。

在自然科学领域，混沌现象的发现与相对论、量子力学一起被一些科学家们誉称为二十世纪物理学上的三大革命。混沌这门学科的第一次国际会议 1977 年颇具意义地在文艺复兴时代的发源地意大利召开。大会组织者之一、美国佐治亚理工学院的物理学家福特（Joseph Ford, 1927-1995）说：

“相对论除去了绝对空间与时间的幻想，量子力学清扫了可控测量过程的牛顿梦，而混沌学则宣告了拉普拉斯决定论式可预测性的幻灭。”

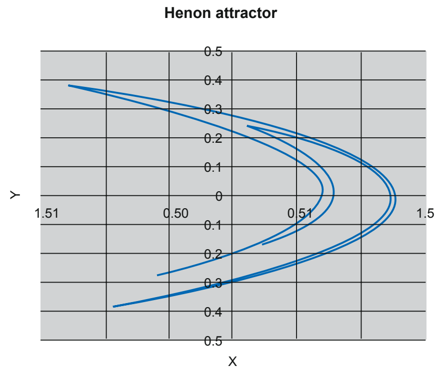
劲头十足的动力学家们继续研究混沌。法国庞加莱未竟事业的继承人之一、在巴黎郊外那个可视为美国普林斯顿高等研究院对等物的高等科学研究所钻研数学和远足探险并举的物理学家茹厄勒（David Ruelle, 1935-）和他的访问者、荷兰数学家塔肯斯（Floris Takens, 1940-2010）1971 年发现令人生畏的湍流与充满混沌的一种他们命名为“奇异吸引子”（Strange Attractor）的几何结构有关。他们的题为“湍流的本质”这篇论文，虽然全是数学风格，充满定义、定理和证明，却给了求解这一物理难题一个全新的视野。

所谓“奇异吸引子”是指一个动力系统的解曲线最终被一个混乱的吸

引子吸去了。也就是说，若我们跟随这些曲线走，最后会趋近于一团混乱的状态，毫无规则可寻。这种奇异现象在二维空间的微分方程里不会发生，这是因为庞加莱 - 本狄克森（Ivar Otto Bendixson, 1861-1935）定理所致：在二维平面内，从任一点出发并不能自我相交的有界的一维解曲线，就像那些极权专制国家的人民那样无甚自由度，无处可跑，只好趋向于一个平衡点或称之为“极限环”的一条闭曲线这个周期解。在像洛伦茨所碰到过的三维或更高维的微分方程，空间的自由度加大了，颇像自由的公民享用的民主政治，解曲线可以肆无忌惮、见缝插针地到处乱窜，就有可能产生“奇异吸引子”。

一下子奇异吸引子成了引人入胜的热门话题。研究者们，包括美国的威廉斯（Robert F. Williams, 1927-），首先对准了洛伦茨那个名气最大的天气模型。洛伦茨在他 1963 年的论文里附了一张像无穷大符号“∞”的图，看上去也像阿拉伯数字 8 夜间躺下睡觉的样子，右边只有两条曲线，而左边有五条，这是他的微分方程组的解作为“运动的点”在“相空间”的一部分轨迹，是 500 次相继计算的结果。这个图看上去也像蝴蝶的一对翅膀，这是否已经预测了他未来的蝴蝶效应这一说法？

实际上洛伦茨画出的只是茹厄勒和塔肯斯所发现的奇异吸引子的最初几根线条。虽然洛伦茨已经看到了比他图中画的更多的东西，但他仍对这个扑朔迷离的“一团麻线”难以想象。这个吸引子是稳定的和非周期的，它像螺旋线般的无穷多个环线永远不与自己相交，但在有限空间里宛如一只惊恐的小飞虫在两对蝴蝶翅膀之间随机地乱飞，忽上忽下、忽左忽右，行踪像魔鬼一样地飘忽不定。当茹厄勒十年后得知洛伦茨的工作提供了他自己理论的一个实际模型时，其惊讶和



埃依映射 $h(x, y) = (y + 1 - a x^2, b x)$ 的奇异吸引子

激动的表情是可想而知的。

虽然洛伦茨没有明确地定义混沌的精确意思，但作为继庞加莱之后第一个揭示自然界的不可预测现象的科学家，他被广泛地尊崇为“混沌之父”，获得了像日本“京都奖”这样的许多荣誉。他的那篇划时代论文，成了十年后点燃“李 - 约克混沌”概念思想火花的“火花塞”。

沿着气象学家洛伦茨的道路，一些使用非线性微分方程的工程学家继续在“混沌的家族”中添砖加瓦。加州大学伯克利校区电子工程与计算机科学系的菲律宾华裔教授蔡少棠（Leon Ong Chua, 1936-）1983 年以他发明混沌的“蔡 - 电路”而一鸣惊人，而从 2010 年起接替他担任《国际分支与混沌杂志》主编的香港城市大学电子工程系讲座教授陈关荣（1948-）也以他 1999 年作为洛伦茨系统之“对偶物”的混沌“陈 - 系统”而享誉工程界。他也是国际上“混沌控制”学说的早期开拓者之一和“混沌反控制”理论的创始人。2008 年以他为首的研究小组获得中国“国家自然科学奖”的二等奖。对经典的三体问题推广之后的“多体问题”有诸多贡献的美国数学家萨内（Donald G. Saari, 1940-）2001 年甚至出版了名叫《混沌选举》的一本学术专著。（顺便提一句，他优秀的中国学生夏志宏（1962-）在其 1988 年

徐悲鸿笔下的“骏马铁蹄”

的博士论文中解决了关于多体问题的一个百年猜想。）

有趣的是，蔡少棠的大女儿蔡美儿（生于虎年，现为耶鲁大学法学院讲座教授）在 2010 年出版了一本回忆为母十八年的书《虎妈妈的战歌》，其中记载的对一双女儿苛刻要求的“十不准”原则引发了东西方“育儿经”孰是孰非讨论的“天下大乱”：赞美之、诅咒之、理解之、茫然之、笑纳之、悲泣之，不一而足。这本新作在读者大众中激起的混沌程度绝不亚于她已经颐养天年的老爸当年创造的混沌电路！

整个六十年代，关于混沌还有一点零星的其他发现，如法国的天文学家埃依（Michel Henon, 1931-）研究了银河系的轨道，并以一类“埃依映射”这一平面映到自身带两个参数的混沌变换留名。但是，只有眼光敏锐、思想深邃的数学家们试图从整体上来理解不规则行为的真正原因。这样的洞察好像让我们再次看到了中国大画家徐悲鸿（1895-1953）笔下的“骏马铁蹄”。

未完待续