

大道至简 厚德载物¹

——我心目中的王元



方开泰

我和王元院士从认识到合作已有三十多年。他学术造诣深，善于将复杂的问题用简单的语言来表达，所谓“大道至简”。他为人处事一向低调，是厚德载物的典范，人们喜欢称呼他元老。他曾多次和我讲，他一辈子主要有两个方面的贡献，一是哥德巴赫猜想，一是数论方法。他对哥德巴赫猜想的贡献是众所周知的，曾与陈景润、潘承洞一起获国家自然科学基金一等奖。他在数论方法的贡献相对报道不多，本文想着重介绍他在这方面的贡献，我和他的合作以及他的人格魅力。

王元祖籍为江苏镇江市，曾在江苏省扬州中学就读²，在扬州中学校庆100周年纪念册的校友院士栏目下，有他的照片。我出身在江苏泰州市，曾在扬州中学就读六年，也作为扬州中学的杰出校友出现在同一纪念册的同一页。我和元老家乡相近，曾就读过同一所中学，又在同一个研究所——中国科学院数学研究所许多年，与元老可以讲天生有缘。1963年，我考入中国科学院数学研究所，成为越民义先生的第一位研究生。越先生和元老都是华罗庚数论研究团队的骨干，为了响应理论联系实际，科学为工农业服务的号召，越公在运筹室建立了“排队论”研究组。数学所的办公室分散在两处，一处称为大楼，与中国科学院计算所合用，而运筹室位于一里以外的两层楼内，与中国科学院微生物所、电工所、化学所的办公室相依为邻。元老在大楼办公，我在小楼办公，只有在食堂吃饭时才有机会见面，但似乎从来没有机会说话，他那时已有名气，我是一个普通的研究生，研究方向也完全不相关。



王元院士

数论方法在近似分析中的应用

1957年俄国数论学家 N.M. Korobov^[1] 用数论的工具来解决高维数值积分的问题，从而开辟了一个全新的研究方向——“数论方法”又称“伪蒙特卡罗方法”。数论方法主要手段是在高维矩形内产生均匀分布的点集。例如，在一个单位正方形中如何分布 n 个点使之在正方形内分布均匀。这表面上是一个数值分析或几何问题，与数论无关。但 Korobov 却巧妙地用数论工具试图来解决这一问题，并且提出了一些产生均匀布点的切实可行的方法，例如好格子点法，其算法简单，效率高，半个多世纪过去了，该方法依然得到使用者的青睐，华罗庚院士很快发现了 Korobov 的文章，建议王元投入这个刚刚兴起的方向。

王元和华罗庚共同做的这个项目是数论在近似分析中的应用，主要应用于多重（高维）积分的近似计算。这个问题本身是计算数学的问题，但他们用的方法是数论，也用到了函数论和分析论的很多东西，是交叉学科。他们很快有了一系列的成果，论文发表在《中国科学》期刊上。1974年，第17届国际数学家大会在加拿大温哥华召开，大会邀请华罗庚报告他们的

¹ 纪念王元教授八十寿辰。

² 1942-1946年，王元就读位于四川合川的国立第二中学，该校是抗日战争期间，扬州中学内迁四川组建而成，所以王元是扬州中学校友。



与华老一起(油画)

Hua Loo Keng Wang Yuan

Applications of Number Theory to Numerical Analysis

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York
Science Press, Beijing

《数论在近似分析中的应用》

研究成果,国际学术界将他们的定理称为“华-王方法”。由于“文革”还没有结束,华老未能成行。幸运的是他们的论文是“文革”前用英文发表的,所以海外的数学家们能发现他们的论文。元老说:“文革让我们吃了亏,许多该发表的文章都没有发表,因为《中国科学》关门了。”于是,王元和华罗庚首先将他们的方法介绍给中国的读者,撰写了《数值积分及其应用》^[2],于1965年由科学出版社出版。1981年,德国斯普林格出版社出版了两人的英语专著——《数论在近似分析中的应用》^[3]。元老说:“这是改革开放后,中国第一本在斯普林格出版的书,这是交叉学科的一个成果。”很快书评如云,专家们对这本专著给予了极高的评价,也奠定了华罗庚和元老在“数论方法”研究领域中的崇高地位。

我年轻时有买书和看新书的喜好,知道华-王的中文专著《数值积分及其应用》,但并未仔细解读。1975年我参加了冶金部“合金结构钢标准鉴定”的项目,汽车和拖拉机的重要部件是用合金结构钢制造的。所谓合金结构钢,是在炼钢时,除了控制碳元素外,还要在钢内加入铬、锰、镍、钼、硅等元素,这些元素的含量必须落入国标规定的范围,钢炼好后,轧成钢材,按国标的五个机械性能,如强度、弹性等必须超过某个阈值。那时全国有十多个工厂在生产合金结构钢,如北京钢厂、抚顺钢厂、大冶钢厂、齐齐哈尔钢厂等。他们发现,即使化学元素碳、铬、锰、镍等完全符合国标,也不能保证钢的机械性能全部合格。如齐齐哈尔钢厂,合格率才达38%。众所周知,合金结构钢十分昂贵,如果不合格,生产厂将承受巨大的经济损失,于是,

不少钢厂认为国标有问题。冶金部告之,该国标是解放初从苏联引进的,谁也不知其原理。为了弄清该国标的合理性,冶金部委托所属北京钢铁研究院来鉴定,由于要处理极为复杂的生产数据,钢铁研究院求助于数学研究所,我参加了这个项目。在研究中要计算一大批五重积分,如果用传统的方法,在当时的计算机的速度下,几乎不可能。在一筹莫展之际我突然想到了华-王的中文专著,由于任务的紧急,看书不如直接求教于元老。

这是我入所后第一次和元老正式交谈,他非常平易近人,在了解了我的来意后,从书架上取了一本论文集,其中有一批表用来生成好格子点集,利用这些表可以得到高维积分的数值解。元老详细地向我讲解了好格子点的使用方法。由于算法十分简单,我半信半疑地去试用他解释的方法来算一些已知结果的五维正态分布概率,其中一例才用了1069个点,已获得满意的精度,这么高的效率使我敬佩不已!真是“大道至简”!我向元老告知了我的感想:“好格子点布点真均匀,也许可以用于试验的设计”,元老微笑地赞许我的感想和想象。

均匀设计的诞生

1978年原七机部三院赵利华工程师等在三个导弹指挥仪的项目中遇到困难。问题中,在知道系统的输入(用 x_1, \dots, x_p 表示),可以通过一组微分方程求得系统的输出(用 y_1, \dots, y_q 表示,或简记为 y),由于当时计算机的运算速度限



王元和方开泰

制，解微分方程组需要一天的时间，从而远远达不到实际的需要。能否用一个近似模型来代替原模型，在知道了输入后，近似模型能以极快的速度（例如万分之几秒）算出输出。用 $y=f(x_1, \dots, x_p)$ 表示原模型，用 $y=g(x_1, \dots, x_p)$ 表示近似模型，希望在 x_1, \dots, x_p 的变化区域内 $|f(x_1, \dots, x_p) - g(x_1, \dots, x_p)|$ 充分地小。为了获得近似模型 $g(x_1, \dots, x_p)$ ，需要预先做一批试验。记 n 为试验的数目，基于试验的数据，用数学建模的技术可以获得可行的近似模型。这个思想如图 1 所示，就是当今计算机试验的设计和建模。

“文革”十年，国内看不到任何新的外文文献。1976 年“文革”结束后，百废待兴，图书资料尚需时日来填补，何况计算机试验的设计与建模是我们提出的一个全新的概念，没有参考文献可查，解决上述试验的设计只有靠“自力更生”了。这个项目要求多个输入变量至少要有 18 个不同的值来覆盖取值范围，若有 6 个这样的变量，则全部的组合数至少有 $18^6=34,102,224$ ，对一天解一个方程组的速度而言，这是一个天文数字，而该项目要求用不超过 $n=50$ 次的试验

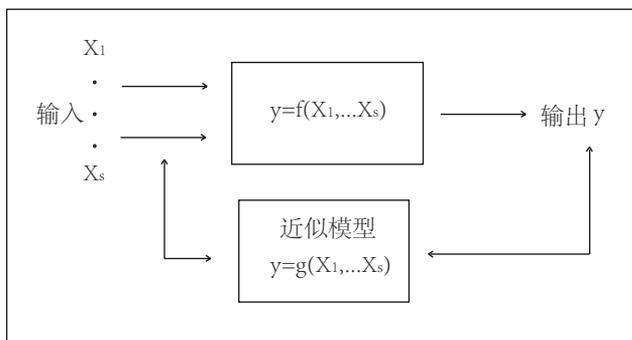


图 1 计算机实验的思想



2004 年，王元、方开泰和原七机部三院合作的工程师：张建舟（左一）、黄树山（左二）、赵利华（右三）、关世义（右一）

来建立一个好的近似模型，用传统的试验设计方法是望洋兴叹的。这时我想到了“数论方法”或许可能帮助试验的设计，即在六维的矩形内设计 $n(<50)$ 个点，使之在矩形内分散均匀，这不正是数论方法的专长吗？于是我立即去找了元老，原原本本地告之问题的背景、要求、我的初步思路，元老非常兴奋，立即同意我们共同来开发，并约定每周见面讨论一次。那时普遍使用的均匀性测度称为星偏差，它的表达式涉及阶梯函数、绝对值、极大值等，没有好的算法，加之那时计算机的计算速度也远远达不到要求。元老不愧为是“数论方法”的世界级专家，为了能实现设计均匀性的比较，元老介绍了一个可计算的均匀性测度，我负责编程计算。鉴于计算机速度和使用计算机的人很多，需一周前预约。那时用穿孔纸带来输入程序和数据，纸带被打断的事故时有发生，大大影响工作的进展。与元老每周的碰面总能得到他的鼓励，经过三个月的共同努力，终于算出第一批“均匀设计表”，并且于 1978 年公布在内部资料《概率统计通讯》第一期上，并同时正式向《应用数学学报》投稿。在准备稿件时，用到数论的许多基本知识，如数的同余运算、同余逆、数的素数分解、欧拉函数、素数的原根等概念。我在大学没有机会修“数论”，借此机会拜读了华罗庚的《数论导引》^[4]，收获很大。在计算的过程中，我发现元老提供的公式敏感性不够高，若作适当修改可以提高区分设计的分辨率。元老对我的建议十分支持，并提供修改公式的理论证明，充分体现了元老虚怀若谷能吸纳别人的建议。在投稿时，元老表示不参加署名，我觉得不妥，他为了支持年青人，坚持用我一人的名义去投稿。于是我在文章的引言中声明：“这项工作是在研究员王元同志的指导和热情帮助下进行的，有些数论证明是他提供的，对他的指导和帮助表示衷心的感谢”。元老对年轻人的

支持使我十分感动。文章^[5]顺利地于1980年发表。

我详细地向七机部有关项目的工程师介绍了“均匀设计”的方法，并提供了用于试验的均匀设计表和用多项式回归模型的建模方法。1980年赵利华工程师到我家，报告了其中一个项目使用均匀设计的情况，他们找到的近似模型完全达到精度标准。这一好消息使元老和我心中的一块石头终于落下了，并相信均匀设计在另外两个项目中也会成功。元老很快去了欧洲访问，几乎同时我去美国访问了两年，我们未能跟进这些项目后来的发展。几年以后才知道，按照均匀设计的理论和方法，七机部三院的赵利华、王济成、马恒华、张炳辉、张建舟、黄树山、谷巨卿、柯繁等分别给出了三种型号的指挥仪数学模型中弹道坐标的两种形式的回归关系式，这是“均匀设计”在电脑仿真试验中的三项先驱的应用。

直至上世纪九十年代才知道，上述七机部的三个项目是在钱学森院士的领导下进行的，直接领导的是梁守槃院士。在课题组中的黄树山工程师曾用一周时间向梁院士详细介绍了均匀设计的思路和建模的方法，使梁院士理解了我们的做法是科学的、合理的，同意在有关文件上签字。三个项目经过了理论研究、测试等一系列的考核，最后都非常成功，先后获得了国家和部级多种奖励，其中一项获得国家科技进步特等奖。由于参加项目的人数很多，王元和我并未在得奖名单上。1988年项目组成员之一的张建舟高工找到我家，向我报告了这一好消息，并送给我们庆祝导弹项目成功的一本画册。

为了使“均匀设计”能够让国外同行了解，元老建议用英文发表，并亲自执笔写了一个短的文章，投《科学通报》。投稿后，有一个审稿报告对均匀设计抱怀疑态度，因为均匀性作为主要的准则在试验设计中是没有的，而在数据分析中又一反传统的方差分析唱主角的做法，用多元多项式的回归模型来建模。在方差分析中，是假定模型已知，在我们提出的建模方法中并未假定模型已知，要探索不同的模型。可以毫不夸大地讲，均匀设计的框架是对传统试验设计的重大突破，审稿人的不理解和怀疑是不足为奇的，元老立即给《科学通报》编辑部写了一封信，表示科学的发展要允许不同的思路，文章^[6]于1981年发表。

最近《科学时报》记者采访元老时，他说：“均匀设计理论的发展是从任务到学科，由任务来带动的，任务来自军工。在讲解时，实际背景被抽掉了，问题是这样的：天上有一架飞机，这架飞机有速度、方向和风向；然后，在船上要发一个导弹来击中飞机，导弹也有速度、方向和风向，如何设计才能让两边正好撞上？因为飞机和导弹的速度都很快，所以要很快算出来，算慢了就打不着了。这个问题用老方法算不出来，或者算出来但所需时间太长了，所以要有新方法，这就要用到数论的方法。”

钱学森院士的高度评价

1993年航天总公司三院张建舟高工组织了一个全国性的研讨班，由我主讲“回归分析和均匀设计”，与会代表介绍他们使用均匀设计的成果。元老由于前列腺肿大，那时在301医院动手术，未能到会。从代表们的介绍中，知道除了航天和军工项目之外，民用的成功项目很多，例如国内各大药厂几乎都在用均匀设计来探索新药的工艺和配方，石油化工方面也有许多成功的案例。《中国科技日报》资深记者刘序盾到会采访，他看出了均匀设计应用的广泛前景，在内参写了一篇报道，并建议成立中国均匀设计协会。钱学森院士在第一时间发现了这个报道，立即将报道送国防科工委主任朱光亚院士，建议推广均匀设计和成立有关的学会。

钱老的批示引起了《中国科学报》的极大关注，1993年11月24日在第一版以三分之二的篇幅报道均匀设计的成功和应用成果，题目为“基础研究必须参加世界竞争，方开泰、王元首创‘均匀设计’法，引起国际数学界的高度重视”。随后《人民日报》和《中国科学报海外版》分别报道，标题为“应用开发路遥识马力，基础研究妙笔巧生花，‘均匀设计’法应用十二年成效斐然”。中国科学院院长周光召院士，于1994年题词“均匀设计法”，“重视基础，开展应用，数学理论，前途无垠”。

1993年11月30日，钱老又专门给元老写信，对我们的成果给予高度的评价，信中写道：“王元同志：我近日来在报刊上多次读到您和方开泰研究员创立的‘均匀设计法’的报道，得知其在实际应用中的重大意义，心中十分高兴！我写此信向您和方开泰同志表示衷心的祝贺！祝贺您们为国家，为世界人类进步做出了重要贡献！”

在钱老的鼓励和航天总公司三院等的要求下，元老支持在中国数学会下成立一个二级学会来促进均匀设计的研

均匀设计法
周光召

重视基础
开展应用
开辟前途
数学理论
前途无垠

周光召
九四年九月

100080
北京市海淀区中关村中国科学院世界研究所
王元同志：
我近日来在报刊上多次读到您和方开泰研究员创立的“均匀设计”法的报道，得知其在实际应用中的重大意义，心中十分高兴！我写此信向您和方开泰同志表示衷心的祝贺！祝贺您们为国家，为世界人类进步做出了重要贡献！
以月味为荷，或祝寿
还早日健康健康！
此致
敬礼！

钱学森
1993-11-30