图论中的经典问题简介

史永堂

图论是一门古老的数学分支，主要研究用某种方式联系起来的若干事物之间的二元或多元关系。关于图论的文字记载最早出现在欧拉 1736 年的论著中，即著名的哥尼斯堡七桥问题。图论中很多重要的结果都是在 19 世纪得到的，大部分都跟电子网络相联系（电子工程可能是图论成功运用的第一个领域）。直到 1936 年匈牙利数学家 Konig 出版了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》，图论才以一个独立的数学学科出现在人们的视野中。目前，由于研究方法和内容的不同，图论已产生了若干分支，如代数图论、极值图论、随机图论、拓扑图论、应用图论等。

20 世纪中叶以后，由于生产管理、军事、交通运输、计算机网络等领域的需要，出现了很多的离散问题，而图论可为离散问题的研究提供数学模型。近代电子计算机的出现和发展，促使图论及其应用迅猛发展。图论与线性规划、动态规划等优化理论的内容和方法相互渗透，促进了组合优化理论和算法的研究。图论的引进改变了计算机科学、网络等领域的面貌。当前应用图论来解决化学、物理学、生物学、运筹学、网络理论、信息论、控制论、经济学、社会科学等学科的问题，已显示出极大的优越性。同时，对图论中古老问题以及经典问题（如最短路问题、旅行售货商问题、中国邮递员问题等）的研究，促进了图论本身的发展。著名数学家金芳蓉教授在《信息时代的图论》（Graph Theory in the Information Age, 2010）一文中指出：图论发展正处于一个新的征程，成为信息革命的核心部分。

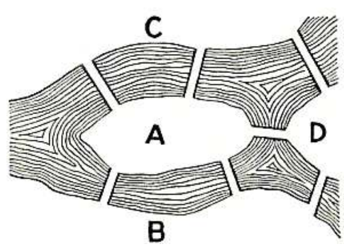
著名数学家、沃尔夫奖获得者 Lovasz 教授在《图论 45 年的发展》（Graph Theory Over 45 Years，2011）一文中写道：“在过去的十年里，图论已经变得越来越重要，无论是它的应用还是它跟数学其他分支的紧密联系方面。”在文章中，通过对图论跟组合优化（离散优化）、计算机科学、概率论、代数、拓扑、网络等其他学科之间联系的描述，详细地回答了“今天图论在数学中占有什么样的地位？”这一问题。

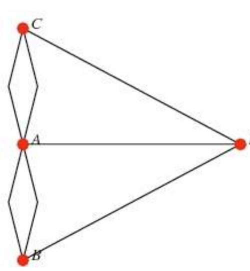
本文我们将简单的介绍图论中的几个经典的问题。

1. 哥尼斯堡七桥问题

风景秀丽的哥尼斯堡城（今俄罗斯加里宁格勒）是德国的一座历史名城，也是哥德巴赫的出生地。普莱格尔河贯穿整个哥尼斯堡小城，这条河有两条支流，它们环绕一个小岛，在这两条支流上有七座桥（见下图）将岛与河岸连接。城里的居民晚饭后喜欢到这里散步，久而久之，就有了这样一个问题：一个人怎样才能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点？大家都试图找出问题的答案，但是谁也解决不了这个问题。

于是问题就被送到了正在俄国圣彼得堡（原列宁格勒）的科学院做研究的大数学家欧拉手里。1736 年 29 岁的欧拉向圣彼得堡科学院递交了《哥尼斯堡的七座桥》的论文。欧拉并没有跑到哥尼斯堡去走走，他将陆地和小岛用点表示，而将七座桥用线表示，于是七桥问题就等价于下图中图形的一笔画问题了。欧拉用严格的数学方法证明了这种画法是不存在的。对于类似的更一般的图形，欧拉也找到了一个简便的原则，可以判定它能否一笔画出：





它们是连通的，且奇顶点（通过此点边的条数是奇数）的个数为 0 或 2。

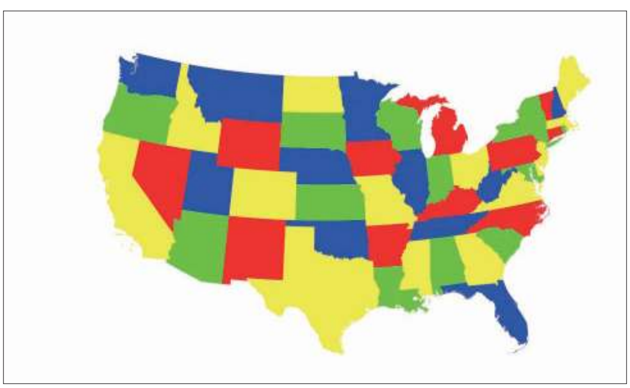
这就是“一笔画”定理，也称为欧拉定理，经过每个点恰好一次的回路也称为“欧拉回路”。欧拉通过对七桥问题的研究，不仅圆满地回答了哥尼斯堡居民提出的问题，而且由此开创了数学的两个新的分支——图论与拓扑。

随着时间的推移，图论不断发展，欧拉回路问题也有所拓广。就这样到了二十世纪，又出现了一个新的问题：邮递员从邮局出发，每次要走遍他所负责街区的每一条道路，投递完毕后仍须回到邮局，他应走什么路线才能使总路程最短。这个问题就是著名的“中国邮路问题”（China Route Inspection Problem）或“中国邮递员问题”（Chinese Postman Problem），首先由我国数学家管梅谷教授于 1962 年提出，而美国国家标准和技术研究院（NIST）的 Alan Goldman 首先将此问题命名为中国邮路问题。

若用顶点表示交叉路口，用边表示街道，那么邮递员所管辖的范围可用一个赋权图来表示，其中边的权重表示对应街道的长度。中国邮递员问题可以用图论语言叙述为：在一个具有非负权的赋权连通图中，找出一条权最小的环游。这种环游称为最优环游。无向图的中国邮路问题是容易解决的，而有向图的中国邮路问题是 NP 难问题。关于 NP 难的问题可参考任何一本组合优化或者算法复杂性的教材，这里推荐李学良教授和史永堂博士翻译的《组合优化》教材（高等教育出版社，2011），作者为 William J. Cook, William H. Cunningham, William R. Pulleyblank, Alexander Schrijver。

2. 四色问题

印制地图时，为了便于区分，常把相邻（有公共边界）的地区印成不同颜色。人们在实践中发现：不论地图上的行政区划多么复杂，最多使用四种颜色，一般都能保证相邻地区使用不同颜色。实践中这样的结果，要在理论上证明却不那么容易。这就是著名的四色问题——世界近代三大数学难题之一。



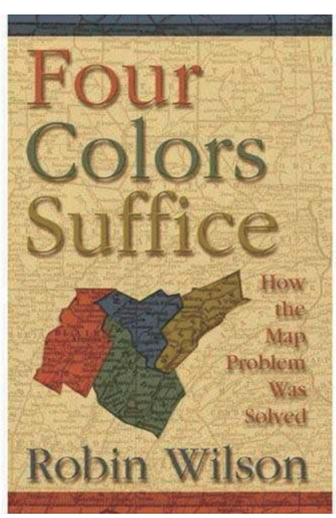
四色地图示意图

四色猜想的提出源自英国。1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯•格思里（Francis Guthrie）工作时，发现了一个有趣的现象：看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色。这个结论能不能从数学上加以证明呢？他和在大学读书的弟弟格里斯决心试一试。兄弟二人几经努力却没有进展。于是，他的弟弟就请教他的老师、著名数学家德•摩根，摩根也没找到解决途径，于是写信向著名数学家哈密尔顿爵士请教。哈密尔顿接信后开始研究，直到 1865 年逝世也没能解决。

1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题。世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战。1878-1880 年两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。11 年后数学家赫伍德以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，泰勒的证明也被人们否定了。后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获。

于是，人们开始认识到这个貌似容易的题目并不简单。进入 20 世纪以来，科学家们的证明基本上是按照肯普的想法在进行。1913 年伯克霍夫在肯普的基础上引进了一些新技巧，美国数学家富兰克林于 1939 年证明了 22 国以下的地图都可以用四色着色。1960 年又推进到了 50 国。后来这种推进仍然十分缓慢。

电子计算机问世以后，大大加快了对四色猜想证明的进程。1976 年，美国数学家阿佩尔与哈肯在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1200 个小时，



作了 100 亿次判断，终于完成了四色定理的证明。为了纪念这一历史性的时刻，两位数学家所在的伊利诺伊大学邮局在每个邮件上盖上了这样的邮戳“Four Colors Suffice”（四种颜色足够了）。

四色猜想的计算机证明轰动了世界。它不仅解决了一个历时 100 多年的难题，而且有可能成为数学史上一系列新思维的起点。1997 年罗伯逊、桑德斯、西摩和托马斯简化了阿佩尔和哈肯的证明，但是证明的过程仍需借助于计算机。直到现在，数学家们仍在寻求一个纯粹数学的更简洁的证明。

3. 拉姆齐问题

“假如要求在组合数学中举出一个而且仅仅一个精美的定理，那么大多数组合数学家会提名 Ramsey 定理”，这是美国数学家 Gian-Carlo Rota 对 Ramsey 定理的评价，也是对 Ramsey 定理在组合数学中地位的评价。“世界上完全的无序是不可能存在的”、“任一个足够大的结构中必定包含一个给定大小的规则的子结构”，这富有哲理的格言恰是 Ramsey 理论的主导精神。

创立了 Ramsey 数和 Ramsey 理论的拉姆齐（F. P. Ramsey, 1903-1930），堪称旷世奇才。在如下领域都做出了相当有影响的成就：逻辑学、经济学、概率论、认知心理学、科学方法论等。1930 年去世时只有 26 岁，《图论杂志》（Journal of Graph Theory）在 1983 年 7 卷 1 期为纪念其 80 诞辰的专刊里，全面地介绍了他的生平、贡献以及 Ramsey 理论的发展。

拉姆齐（1903-1930）

1958 年，《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly）上登载着这样一个有趣的问题：“任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人相互认识，或 3 个人相互不认识”。对 Ramsey 理论作出重大贡献的组合数学家 Spencer 在 1983 年描写了他第一次得知这个问题——也是他第一次接触 Ramsey 理论时的情形：“当时我正在中学读书，得知这个问题后，回家花了很长时间才费劲地搞出了一个分很多种情况来讨论的冗长证明，我把我的证明带给老师，老师就给我看下面的简单明了的标准证明。此论证的简单扼要当时使我非常欣喜。”这个证明描述如下：用 A，B，C，D，E，F 分别表示聚会的 6 个人，若两个人相识，则在代表这两人的点之间用红边相连，否则连一条蓝边。这样把每对点都用红边和蓝边连好之后，原来的问题就等价于证明图中有红边三角形或者蓝边三角形。考虑从某一点（设为 A）连出 5 条边，根据抽屉原理，其中必有三条同色，不妨设它们是三条红边 AD, AE, AF。再考虑三角形 DEF，如果它有一条红边，不妨设为 DE，则 ADE 就是一个红边三角形；如果三角形 DEF 没有红边，则 DEF 自身就是一个蓝边三角形。论证完毕。

上面的聚会问题虽然产生于 Ramsey 理论的几十年之后，但它确实是 Ramsey 定理的一个最简单的特例。“6 人聚会问题”可以推广到“n 人聚会问题”：经典 Ramsey 数 $R(n, n)$ 表示满足如下要求的最小正整数 N，使得对完全图 K_N 的边进行任意二着色（红蓝两色），总存在单色的完全图 K_n。后来人们又对这一定义进行了推广：对于 n 阶完全图 K_n 进行边的红蓝二着色，只要 n 充分大，其红色边导出的子图必包含一个预先给定的图 G，或者其蓝色图包含一给定的图 H，上述的临界值 n，即最小的符合要求的整数 n 被称作 Ramsey 数，并记作 $R(G, H)$。

如果 $G=K_n$, $H=K_m$ ，则记 $R(G, H)$ 为 $R(n, m)$。

拉姆齐在 1930 年证明了 Ramsey 数 $R(n, m)$ 的存在性，这就是著名的 Ramsey 定理。然而确定 $R(n,m)$ 的精确值是非常困难的，美国数学家 Radziszowski 在《组合数学电子刊》（The Electronic Journal of Combinatorics）发表了关于 Ramsey 数的综述文章 Small Ramsey Numbers（文章自 1993 年 2 月起不断更新），下页图是其中部分 Ramsey 数的上下界的数据（2011 年 8 月的修改版）。

著名数学家、Ramsey 理论的主要推动者之一爱多士（Erdos）对此曾有过一个玩笑：外星人要挟人类说，必须在一年内交出 Ramsey 数 $R(5, 5)$ 的值，不然将毁灭地球。那么人类应集中所有的计算机去计算这个值；若改成 $R(6, 6)$ 的话，那么人类只能拼命了。

1947 年，爱多士创造性地利用了概率方法，给出了经典 Ramsey 数的下界，为之后的概率方法在组合数学中的运用，包括随机图理论、随机算法的发展走出了第一步。

现在 Ramsey 理论已经成为图论乃至整个数学研究的一个重要课题。数学家 Frank Harary（1921-2005）曾说道：“毫无疑问，Ramsey 理论现在是组合学中一个业已确

k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1139	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3705	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10581	15263	22116
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27490	41525	861 63620
9							565 6588	581 12677	22325	39025	64871	89203	
10								798 23556		81200			1265

部分 Ramsey 数的上下界的数据

立且兴旺发达的分支。其结果（在被发现后）往往易于陈述但难以证明；这些结果既精巧多彩又十分优美。尚未解决的问题不可胜数，而且有意义的新问题还在以超过老问题获解的速度不断涌现。”有很多知名数学家都对 Ramsey 理论作出过贡献，其中有：P. Erdos（1984 年沃尔夫奖得主）、J.H. Kim（1997 年 Fulkerson 奖得主）、W.T. Gowers（1998 年菲尔兹奖得主）、L. Lovasz（1999 年沃尔夫奖得主）、R.L. Graham（2003 年 Steele 奖得主）、N. Alon（2005 年 Godel 奖得主）、陶哲轩（2006 年菲尔兹奖得主）等等。

关于 Ramsey 理论的相关内容，可参考

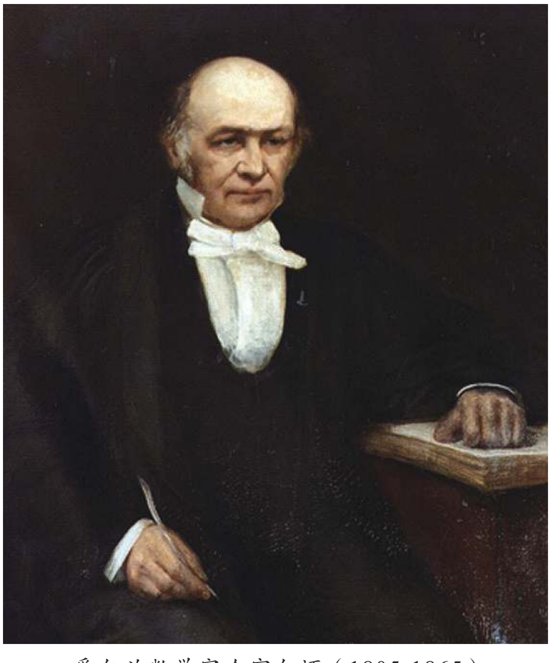
【1】 Alexander Soifer. Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow. Progress in Mathematics Volume 285. Springer, 2010.

【2】 李乔，李雨生，拉姆齐理论——入门和故事，大连理工大学出版社，2011.

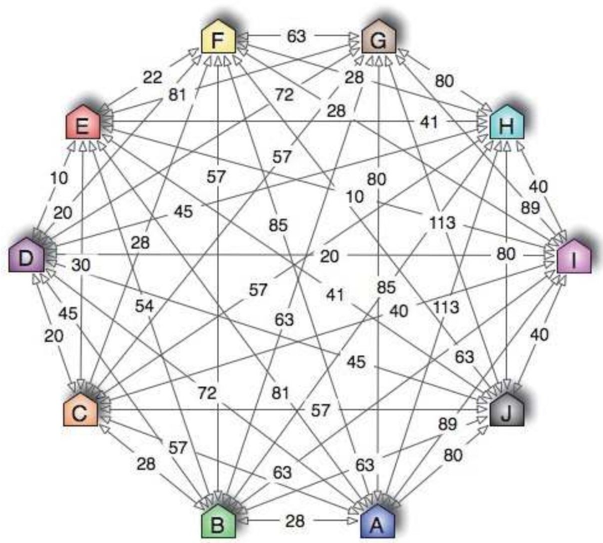
4. 旅行售货商问题

1856 年，爱尔兰数学家哈密尔顿（William Rowan Hamilton, 1805-1865）提出了一个周游世界的“正十二面体”游戏：一位旅行者，如果从伦敦出发，游历 20 个城市诸如巴黎、罗马、莫斯科、纽约等等，每个城市只能经过一次，然后回到伦敦，他该如何选择旅行路线呢？在若干个旅行路线中，哪条路线距离最短呢？经过图中所有顶点的回路称为“哈密尔顿回路”。这个命题引起数学家们极大的兴趣，被命名为“赋权哈密尔顿回路最小化问题”。数学家们希望找到，在一个多节点的回路中存在最小化哈密尔顿回路的充要条件，解决了这个理论问题将给工程设计与实施带来极大的经济利益。遗憾的是，数学家们没有找到满意的答案，这个看似简单的问题也成为了数学史上著名的难题。

上世纪 30 年代，数学家 Karl Menger 在哈佛大学首先研究了旅行售货商问题的一般形式，很快普林斯顿大学的 Hassler Whitney 引入了“旅行售货商问题”这一名词。现在也称为货郎担问题：一个旅行售货员想去访问若干城镇，然后返回他的出发地。给定各城镇之间的距离，应怎样计划他的路线，使他能访问每个城镇恰好一次且总路程最短？这个问题即为旅行售货商问题（Travelling Salesman Problem），简称 TSP。用图论的语言可描述为：



爱尔兰数学家哈密尔顿（1805-1865）



一个 Travelling Salesman Problem 的例子

在赋权完全图中，找出一个具有最小权的哈密尔顿圈。

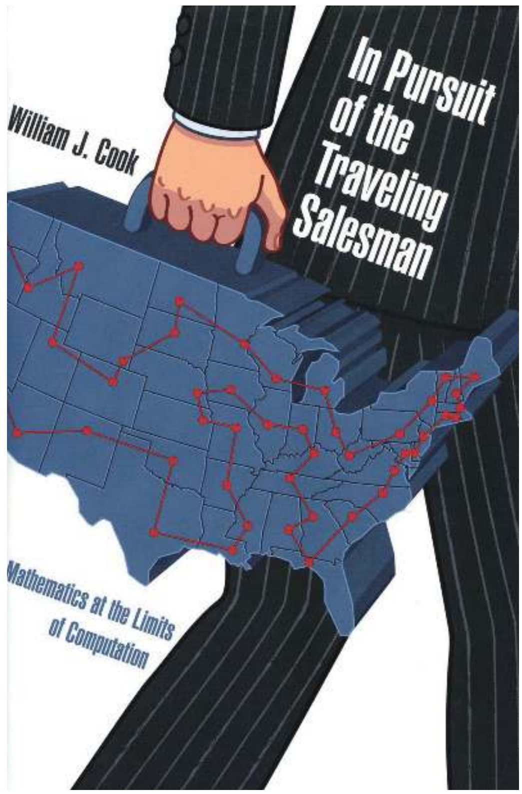
到了上世纪五六十年代，越来越多的数学家们参与到这一问题的研究中来，也提出了很多不同类型的 TSP。1972 年 Richard M. Karp 证明了哈密尔顿圈问题是 NP 完全的，从而意味着 TSP 是 NP 困难问题。

TSP 在逻辑学、遗传学、制造业、通讯及神经系统科学等许多领域都有广泛的应用，因而寻找其实际而有效的算法就显得颇为重要。由于 TSP 叙述的简洁性和求解的困难性，使得它为研究一般组合最优化问题的方法提供了一个平台。因此 TSP 的算法研究一直备受青睐，并且取得了相当的进展。在 1954 年，Dantzig, Fulkerson 与 Johnson 利用线性规划的方法找到了包含 49 个城市的 TSP 的最优圈，取得了第一个重要的突破。此后城市个数逐渐增加，120，550，2392，7397，19509…… 目前最大的进展是，继 2004 年 Cook 等人找到了包含瑞典 24978 个城市的 TSP 的最优圈之后，Cook 等人又于 2005 年解决了包含 33810 个城市的问题。

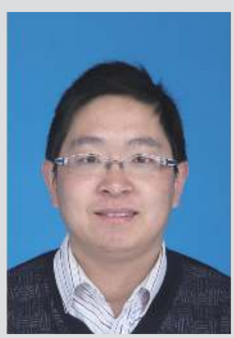
数学家 Jack Edmonds, Nicos Christofides, Brian Kernighan, George Dantzig, Ray Fulkerson, Selmer Johnson, Martin Grötschel, Michael Held, Richard Karp 等人均在 TSP 上作出过突出的贡献。例如，对于边的权重满足三角不等式的 TSP，Nicos Christofides 在 1976 年将欧拉和 Edmonds 的方法联系起来，用生成树、欧拉环游和完美匹配给出了一个近似比为 1.5 的近似算法（即算法得到的解为最优解的 1.5 倍）。这一算法现在称为“Christofides 算法”，在当时看来非常得简单，然而，三十多年过去了，仍然没有看到任何的改进。事实上，寻找近似比为 a（其中 a <1.5）的近似算法是个公开问题。

有关 TSP 的详细论述，可参考前面提到的李学良教授和史永堂博士翻译的《组合优化》教材（高等教育出版社，2011），也可参考 Cook 的最新力作《In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation》以及下面两个关于 TSP 的网站：http://www.tsp.gatech.edu/index.html

TSPLIB：http://www2.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/index.html



William J. Cook 关于旅行售货商问题的最新力作



作者简介：史永堂，博士，南开大学组合数学中心讲师，主要研究方向为图论与组合最优化。