微积分
——人类文明史上的一株奇葩

曹之江

文化，似乎是一个很复杂的范畴，人们很难用简单的话对它进行扼要的概括，它的内容也许可以有很多的方面，如哲学的方面、美学的方面等等。本文由于是论述数学的文化，因此，论述侧重在哲学方面，即知识与逻辑演绎的方面。

一、数学文化的初级阶段。人类社会形成之初就有了最原始的文化形态。在这个阶段，人的思维是简单的，不懂什么是理性的推演和逻辑演绎，他们的语言只是周围事物的简单反映，比如在数量上他们只懂得反映事物的多寡与大小的几个自然数（这也是数学的发端）。提到数学文化的初级阶段我们需要总结下列几点：

1、自然数系的发现。人们发现可以通过少量几个符号的不同排列组合去表示出所有的自然数，这就是进位计数法。例如我们现在用的 0, 1, 2, …, 9 等十个符号，用它们不同的排列组合去表示任何位数的自然数，这就是十进位记数法。然后我们又发现自然数的自然演算——加法与乘法，这样我们就得到了人类第一个无穷数系——自然数系。

2、有理数系的建立。人们为了表现事物的局部，就将自然数自然的推广到分数与小数以及它们的四则运算，这就是人们所称的有理数系。在应用上，人们可以用有理数系去表示任何物体的大小与多寡。

3、坐标方法的发现。人们后来发现，可以用两个有序的数去表示平面上的一个点，可以用三个有序的数去表示三维立体空间上的一个点。根据这样的原理，我们就可以将一条无限长的直线用一个二元一次方程式来表示，将一个无限扩展的平面，用一个三元一次方程式来表示。这样我们就可以用解析的方法去研究直线和平面，或者说我们将几何形体的研究归入到了解析的或数的范畴。

4、人们从二元一次的直线方程式中发现了匀速直线运动方程式，这时候，一个量是时间，另一个量是物体行径的距离。人们由此进一步发现了两个量之间的正比关系，也就是 $\Delta y/\Delta x=k$，这里 x,y 是指两个不同物体的量，Δ 是指它们的增量，k 是一个常数。若将上述增量成正比的关系展开，就成了一个二元一次方程式。因此增量成正比的量的关系也称为线性关系。这个线性关系虽然是最简单的关系，但下面就能够发现这也是世界万物最普遍的变化关系，是微积分原理的基础。

二、变量数学的兴起。人类文明进化到了中世纪就已不能满足这初级形态的文化，在前一时期，任何数都不过是孤立、静态量的一种表述。然而到了中世纪，人们就需要了解事物的各种各样的运动和变化形态，并给予精确的描述和演算。如人们需要了解地球及各种行星的运动，以及地球上万物的运动变化关系等，这就需要把事物的量从孤立、静止的形态转化成变化的形态。这就要求数学的文化从初级形态深化到变量数学的高级形态。于是，我们就将静态的数的研究与表述转化成为动态的变量与函数的研究表述。这就使人类文明进入到新的时代，在这个时代面前，高高耸立着“微积分”这三个大字。微积分是人类两种文明的界石，是人类现代工业与物质文明的先导。它不是造物主的自然赐予，而是人类理性主义智慧的产物。因此，微积分是人类文明史上的一株奇葩。

然而，要将静态数学上升为动态的变量数学却谈何容易。首先，造物主并没有给出变量数学的理想平台，造物主所赐予的只是人类在感觉误差以内的数学的应用平台，即前面所说的自然数系及其推广的有理数系。然而，这个有理数系可以描述任何人的感官所及的物体，它决不是一个可资逻辑演绎的理想平台。有理数系虽然可以表示万物无处不在，但它却缺少理想的“致密性”。简单地说，我们若将所有的有理数都映射到一条无限长的直线上（数轴），就会产生许多不能用有理数来表述的空隙，比如，纪元 500 年以前古希腊人已经发现了单位长的正方形的对角线，其长度不能用数（有理数）来表示，人们后来把这样的长度称为无理数。以后有人证明这样的无理数何止千千万万！它们占满了整个数轴的长度，而只留给有理数为 0 尺度的地盘。显然，这样残缺

曹之江编著的图书

不全的有理数系是完全不理想的，是不能满足理性主义思维需求的，这样建造一个变量数学所谓理想平台的任务就完全落在了人类自己的头上。这个理想数域平台就是实数域。它们在19世纪下半叶由德国数学家康托、戴德金等人用严谨的逻辑演绎加以完成了。这个实数域就是与一条无限长的数轴同构的有致密性的理想数域。基于这一实数论域，严格的变量与函数的论述就变得畅行无阻。

三、微积分学应运而生。在滚滚的历史潮流推动下和几代千百个代表人物的努力下，作为新一代的文化——变量数学的主体微积分学终于脱颖而出了。我们说它是应运而生的，因为它是时代和历史的产物，是千千万万人共同努力的结果。首先伴随它出现的是极限理论。学习微积分的人们都可发现微积分的任何一个新概念，都是以极限来定义的，由此可见极限是连接旧与新的两种文化的桥梁，是微积分的前奏，是从有理数到实数域平台的一种必要的转化。其次是初等函数系的形成。变量数学的任务是要描述并演算客观世界中千千万万的运动变化关系。然而，要用文字来完全表示出这无数个运动变化关系是不可能的。因此，必须从它们中间抽象出若干最常见的变化关系作为主干，并由它们的各种组合去表现出众多的常见的变化关系，这就是我们常说的初等函数系。初等函数的出现是人类文化史上最伟大成就之一。它主要分成为三类：①日常加减乘除四则运算为主的多项式及多种有理函数类；②与人口增长及物质的衰变为主要背景的指数函数类及它们的反函数、对数函数类；③以三角形边角计算以及力学中简谐振动为主要背景的正余弦函数为主体的三角函数类，以及它们的反函数（反三角函数类），这是一种周期的、有阶的特殊函数类。上述函数由于它们的变化演算不在四则运算之列，因此它们又称超越函数类（除有理函数）。因为这些新规则划界的初等函数，其主体都是超越函数，函数值都不属于四则运算，那么它们又将如何运算？如等于什么等等。这个函数值的计算问题没有解决，这类函数在现实应用中是毫无价值的。因为人们只会进行四则演算，因此他们只会计算在有理数域上的多项式函数，而在微积分里我们专门有一章讨论了如何在每一个光滑超越函数的局部来进行多项式的逼近。它们因自变量的区间与逼近多项式的次数，可以逼近准确到任何程度，这就是 Tayor 公式，完全解决了超越函数值的计算问题。今天我们有了非常详尽的三角函数表、对数表、…，就是这么产生的。

除此而外，我们还可以将任何一个无限光滑的超越函数，在它整个的定义域上用一个无穷多次的多项式来表示，即所谓幂级数理论。这就有点

像将任何一个实数表示成为具有无限位数的小数。其实质是将一定的超越函数用一个无限次演算的有理函数来表示，也是一种多项式的逼近。这本身就说明了两种文化的联系。

四、神妙的微分和积分。作为变量数学主体的微积分学，它是对周围世界千变万化的函数引进了两种新的运算——微分与积分。变量数学，要应用函数去描述并演算客观世界的各种物质运动与变化，但早期人们只懂得事物之间的正比变化关系，那么如何将这两者联系起来，我们还是以物质的运动为例来说明。起初，人们只懂得物体运动的距离与时间成正比，这里若把时间看成是变量，那它就是匀速的直线运动方程。然而，我们面临的是一个变速运动，那么如何去计算在时间 T 内所经过的距离呢？一个朴素的思想是我们将整个时间 T 分割成许多小段，在每一个小段里我们把运动视为是匀速的。于是，可以按照匀速运动的公式去计算它们的距离，然后把它们叠加，就得到了整段时间内的运动距离。然而这样做，第一有很大的累积误差，第二是步骤繁杂，因此难以实行。然而，微积分学里的微分就是根据这个朴素思想来实现的。微积分学把整个 T 时间上的区间分割成每一个时刻的局部领域，它们是如此的微小，因此在这个局部可以看成是匀速运动，它的运动方程 $dy/dt=k$，其中 t 是时间变量，y 是距离变量。在微积分学里我们把这个比例常数 k 称为距离变量 y 在 t 时刻的导数，而上述方程也成为 y 在 t 时刻的微分，这里的增量符号 d 本应写成为常规符号 Δ，因这是微分的专用符号，故写成 d。由于这时运动已转化成为匀速直线运动，于是我们可以按照匀速直线运动公式来计算出在这段时间区间内行经的距离。最后，我们再把所有这些在各个时刻点的领域所计算出来的距离叠加起来，就得出在整段时间 T 内变速运动所走过的距离。这就是将在整体时间 T 上的变速运动转化成为许多局部上可计算的匀速运动的叠加，这就是微积分学中局部化的思想。在上述过程中，我们还需要指出的是：可以将时刻变量 t 转变为一般的自变量 x。因此，我们可以将微分学原理用到一切非均匀的物质变化之中。例如我们最常见的平面上曲边梯形的面积计算，或在一般曲面包围下的空间体积的计算等等。这种将微小的直线形体叠加起来的方法就是微积学中的定积分。然而，这种计算若采用朴素的方法去实现，不但步骤繁琐，而且累积误差很大，是不可实行的。但在微积分学的理论中我们用严密的极限理论的论述，将这些缺点完全克服了，这里限于篇幅就不加以赘述了。

下面再谈谈函数在一定区间上的积分。这个积分就是上文所说的函数在各点领域中微分的叠加。从积分的朴素观点来看，它是一个很复杂的量，然而，我们应用极限的理论将它极大的规则化和精确化。由于积分区间是有上下限的，因此，它的值也随着它的上限（或下限）而变，故它也是积分上限的函数，这个函数我们平常就称为不定积分。由于不定积分的计算就是函数中变动上限的定积分计算。至此，微积分学已经赋予了从函数到函数的两种全新运算——微分与积分。它们本质上是两类新函数，即导函数与不定积分的演算。这两种演算都是通过极限理论来加以严密化与规则化的。这是微积分学所赋予函数类的两种神妙的演算，它们完全不同于实数的四则运算。这两种演算的建立与完善可以说是微积分学屹立迄今的基础。因为微积分学若只有漂亮的理论而没有简便精确可行的演算，那就等于是“纸上谈兵”，是完全没有用的。微积分学至今天，所以能够应用到理工科及多种学科，并且成为物质文明的先导，完全依靠了这两种演算的可行性。

现在来简单谈谈这两种演算。首先是导函数（又称为函数在各点上的变化率）的寻求。乘方函数 $y=x^k$（k 为自然数）的导数，只需应用二项式和极限立即就能求得。至于多类超越函数的导数，则需依靠两类特殊的极限公式（即超越数 e 和 $\frac{\sin x}{x}$，当 $x\to 0$ 时的极限）推导而得。与此同时，我们又推导出了一个函数在多种演算组合下的求导公式。这样我们就完全解决了函数寻求导函数的问题。至于积分的演算，按照原意，它是一项很复杂的极限，是不能演算的。然而根据牛顿 - 莱布尼茨公式，函数的不定积分和导函数互为逆运算。因此，求函数不定积分的演算变成为对它的原函数的寻求，从而，事情就变得相当简单。而牛顿 - 莱布尼茨公式也就被称为微积分的基本定律。至于函数被表述成为幂级数函数的形式，则它的求导与积分就成了简单的逐项求导与积分的问题。至此我们已完全说明了这神妙的微分与积分问题。由于微分和积分的重要性和简便性，现已被应用到科学和一切工程领域，成为当今物质文明的支柱。读者如对这方面的内容有兴趣可参阅参考（1）（2）（3）等著作。

参考文献

1. 曹之江，微积分简明教程（上），北京高等教育出版社，1999 年。
2. 曹之江，数学分析基础原理，内蒙古大学出版社，2004 年。
3. 曹之江，谈数学及其优教，北京高等教育出版社，2007 年。