从左至右：张英伯，蔡天新，贾朝华，张智民，罗懋康，刘建亚，汤涛，邓明立，付晓青

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

主　编　刘建亚（山东大学）
汤　涛（香港浸会大学）

编　委
邓明立（河北师范大学）　蔡天新（浙江大学）
丁　玖（南密西西比大学）　项武义（加州大学）
贾朝华（中国科学院）　罗懋康（四川大学）
张英伯（北京师范大学）　顾　沛（南开大学）
张智民（韦恩州立大学）　林亚南（厦门大学）
宗传明（北京大学）

美术编辑　庄　歌

文字编辑　付晓青

特约撰稿人　李尚志　姚　楠　游志平　欧阳顺湘
木　遥　于　品　蒋　迅　卢昌海

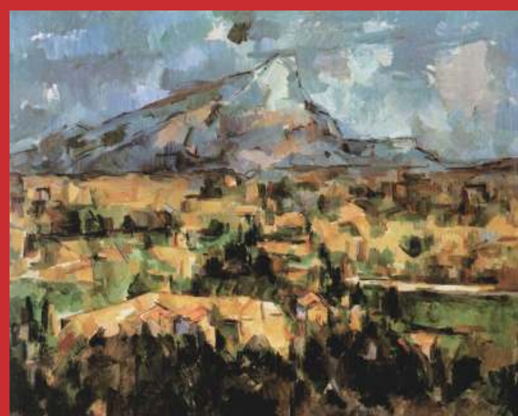
《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2012年5月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持

Contents | 目录



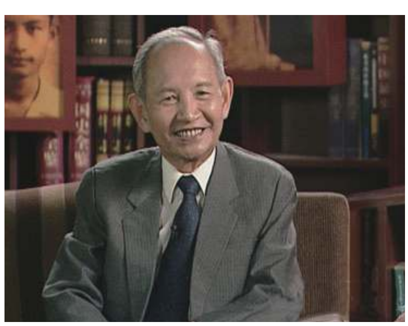
大道至简 厚德载物[1]

——我心目中的王元

方开泰

我和王元院士从认识到合作已有三十多年。他学术造诣深，善于将复杂的问题用简单的语言来表达，所谓“大道至简”。他为人处事一向低调，是厚德载物的典范，人们喜欢称呼他元老。他曾多次和我讲，他一辈子主要有两个方面的贡献，一是哥德巴赫猜想，一是数论方法。他对哥德巴赫猜想的贡献是众所周知的，曾与陈景润、潘承洞一起获国家自然科学一等奖。他在数论方法的贡献相对报道不多，本文想着重介绍他在这方面的贡献，我和他的合作以及他的人格魅力。

王元祖籍为江苏镇江市，曾在江苏省扬州中学就读[2]，在扬州中学校庆100周年纪念册的校友院士栏目下，有他的照片。我出身在江苏泰州市，曾在扬州中学就读六年，也作为扬州中学的杰出校友出现在同一纪念册的同一页。我和元老家乡相近，曾就读过同一所中学，又在同一个研究所——中国科学院数学研究所许多年，与元老可以讲天生有缘。1963年，我考入中国科学院数学研究所，成为越民义先生的第一位研究生。越先生和元老都是华罗庚数论研究团队的骨干，为了响应理论联系实际，科学为工农业服务的号召，越公在运筹室建立了“排队论”研究组。数学所的办公室分散在两处，一处称为大楼，与中国科学院计算所合用，而运筹室位于一里以外的两层楼内，与中国科学院微生物所、电工所、化学所的办公室相依为邻。元老在大楼办公，我在小楼办公，只有在食堂吃饭时才有机会见面，但似乎从来没有机会说话，他那时已有名气，我是一个普通的研究生，研究方向也完全不相关。



王元院士

数论方法在近似分析中的应用

1957年俄国数论学家N.M. Korobov[1]用数论的工具来解决高维数值积分的问题，从而开辟了一个全新的研究方向——“数论方法”又称“伪蒙特卡罗方法”。数论方法主要手段是在高维矩形内产生均匀分布的点集。例如，在一个单位正方形中如何分布n个点使之在正方形内分布均匀。这表面上是一个数值分析或几何问题，与数论无关。但Korobov却巧妙地用数论工具试图来解决这一问题，并且提出了一些产生均匀布点的切实可行的方法，例如好格子点法，其算法简单，效率高，半个多世纪过去了，该方法依然得到使用者的青睐，华罗庚院士很快发现了Korobov的文章，建议王元投入这个刚刚兴起的方向。

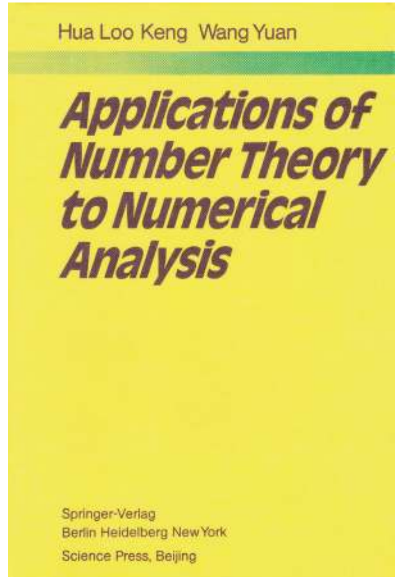
王元和华罗庚共同做的这个项目是数论在近似分析中的应用，主要应用于多重（高维）积分的近似计算。这个问题本身是计算数学的问题，但他们用的方法是数论，也用到了函数论和分析论的很多东西，是交叉学科。他们很快有了一系列的成果，论文发表在《中国科学》期刊上。1974年，第17届国际数学家大会在加拿大温哥华召开，大会邀请华罗庚报告他们的

---

[1] 纪念王元教授八十寿辰。

[2] 1942-1946年，王元就读位于四川合川的国立第二中学，该校是抗日战争期间，扬州中学内迁四川组建而成，所以王元是扬州中学校友。

与华老一起（油画）



《数论在近似分析中的应用》

研究成果，国际学术界将他们的定理称为“华 - 王方法”。由于“文革”还没有结束，华老未能成行。幸运的是他们的论文是“文革”前用英文发表的，所以海外的数学家们能发现他们的论文。元老说：“文革让我们吃了亏，许多该发表的文章都没有发表，因为《中国科学》关门了。”于是，王元和华罗庚首先将他们的方法介绍给中国的读者，撰写了《数值积分及其应用》[2]，于 1965 年由科学出版社出版。1981 年，德国斯普林格出版社出版了两人的英语专著——《数论在近似分析中的应用》[3]。元老说：“这是改革开放后，中国第一本在斯普林格出版的书，这是交叉学科的一个成果。”很快书评如云，专家们对这本专著给予了极高的评价，也奠定了华罗庚和元老在“数论方法”研究领域中的崇高地位。

我年轻时有买书和看新书的喜好，知道华 - 王的中文专著《数值积分及其应用》，但并未仔细解读。1975 年我参加了冶金部“合金结构钢标准鉴定”的项目，汽车和拖拉机的重要部件是用合金结构钢制造的。所谓合金结构钢，是在炼钢时，除了控制碳元素外，还要在钢内加入铬、锰、镍、钼、硅等元素，这些元素的含量必须落入国标规定的范围，钢炼好后，轧成钢材，按国标的五个机械性能，如强度、弹性等必须超过某个阈值。那时全国有十多个工厂在生产合金结构钢，如北京钢厂、抚顺钢厂、大冶钢厂、齐齐哈尔钢厂等。他们发现，即使化学元素碳、铬、锰、镍等完全符合国标，也不能保证钢的机械性能全部合格。如齐齐哈尔钢厂，合格率才达 38%。众所周知，合金结构钢十分昂贵，如果不合格，生产厂将承受巨大的经济损失，于是，不少钢厂认为国标有问题。冶金部告之，该国标是解放初从苏联引进的，谁也不知其原理。为了弄清该国标的合理性，冶金部委托所属北京钢铁研究院来鉴定，由于要处理极为复杂的生产数据，钢铁研究院求助于数学研究所，我参加了这个项目。在研究中要计算一大批五重积分，如果用传统的方法，在当时的计算机的速度下，几乎不可能。在一筹莫展之际我突然想到了华 - 王的中文专著，由于任务的紧急，看书不如直接求教于元老。

这是我入所后第一次和元老正式交谈，他非常平易近人，在了解了我的来意后，从书架上取了一本论文集，其中有一批表用来生成好格子点集，利用这些表可以得到高维积分的数值解。元老详细地向我讲解了好格子点的使用方法。由于算法十分简单，我半信半疑地去试用他解释的方法来算一些已知结果的五维正态分布概率，其中一例才用了 1069 个点，已获得满意的精度，这么高的效率使我敬佩不已！真是“大道至简”！我向元老告知了我的感想：“好格子点布点真均匀，也许可以用于试验的设计”，元老微笑地赞许我的感想和想象。

均匀设计的诞生

1978 年原七机部三院赵利华工程师等在三个导弹指挥仪的项目中遇到困难。问题中，在知道系统的输入（用 $x_1,\cdots,x_p$ 表示），可以通过一组微分方程求得系统的输出（用 $y_1,\cdots,y_q$ 表示，或简记为 y），由于当时计算机的运算速度限

王元和方开泰

2004 年，王元、方开泰和原七机部三院合作的工程师：张建舟（左一）、黄树山（左二）、赵利华（右三）、关世义（右一）

制，解微分方程组需要一天的时间，从而远远达不到实际的需要。能否用一个近似模型来代替原模型，在知道了输入后，近似模型能以极快的速度（例如万分之几秒）算出输出。用 $y=f(x_1,\cdots,x_p)$ 表示原模型，用 $y=g(x_1,\cdots,x_p)$ 表示近似模型，希望在 $x_1,\cdots x_p$ 的变化区域内 $|f(x_1,\cdots,x_p)-g(x_1,\cdots,x_p)|$ 充分地小。为了获得近似模型 $g(x_1,\cdots,x_p)$，需要预先做一批试验。记 n 为试验的数目，基于试验的数据，用数学建模的技术可以获得可行的近似模型。这个思想如图 1 所示，就是当今计算机试验的设计和建模。

“文革”十年，国内看不到任何新的外文文献。1976 年“文革”结束后，百废待兴，图书资料尚需时日来填补，何况计算机试验的设计与建模是我们提出的一个全新的概念，没有参考文献可查，解决上述试验的设计只有靠“自力更生”了。这个项目要求多个输入变量至少要有 18 个不同的值来覆盖取值范围，若有 6 个这样的变量，则全部的组合数至少有 $18^6=34{,}102{,}224$，对一天解一个方程组的速度而言，这是一个天文数字，而该项目要求用不超过 $n=50$ 次的试验

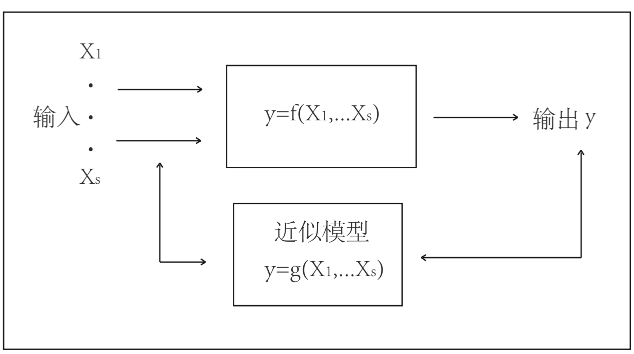


图 1 计算机实验的思想

来建立一个好的近似模型，用传统的试验设计方法是望洋兴叹的。这时我想到了“数论方法”或许可能帮助试验的设计，即在六维的矩形内设计 $n(<50)$ 个点，使之在矩形内分散均匀，这不正是数论方法的专长吗？于是我立即去找了元老，原原本本地告之问题的背景、要求、我的初步思路，元老非常兴奋，立即同意我们共同来开发，并约定每周见面讨论一次。那时普遍使用的均匀性测度称为星偏差，它的表达式涉及阶梯函数、绝对值、极大值等，没有好的算法，加之那时计算机的计算速度也远远达不到要求。元老不愧为是“数论方法”的世界级专家，为了能实现设计均匀性的比较，元老介绍了一个可计算的均匀性测度，我负责编程计算。鉴于计算机速度和使用计算机的人很多，需一周前预约。那时用穿孔纸带来输入程序和数据，纸带被打断的事故时有发生，大大影响工作的进展。与元老每周的碰面总能得到他的鼓励，经过三个月的共同努力，终于算出第一批“均匀设计表”，并且于 1978 年公布在内部资料《概率统计通讯》第一期上，并同时正式向《应用数学学报》投稿。在准备稿件时，用到数论的许多基本知识，如数的同余运算、同余逆、数的素数分解、欧拉函数、素数的原根等概念。我在大学没有机会修“数论”，借此机会拜读了华罗庚的《数论导引》[4]，收获很大。在计算的过程中，我发现元老提供的公式敏感性不够高，若作适当修改可以提高区分设计的分辨率。元老对我的建议十分支持，并提供修改公式的理论证明，充分体现了元老虚怀若谷能吸纳别人的建议。在投稿时，元老表示不参加署名，我觉得不妥，他为了支持年青人，坚持用我一人的名义去投稿。于是我在文章的引言中声明：“这项工作是在研究员王元同志的指导和热情帮助下进行的，有些数论证明是他提供的，对他的指导和帮助表示衷心的感谢”。元老对年轻人的

支持使我十分感动。文章[5]顺利地于 1980 年发表。

我详细地向七机部有关项目的工程师介绍了“均匀设计”的方法，并提供了用于试验的均匀设计表和用多项式回归模型的建模方法。1980 年赵利华工程师到我家，报告了其中一个项目使用均匀设计的情况，他们找到的近似模型完全达到精度标准。这一好消息使元老和我心中的一块石头终于落下了，并相信均匀设计在另外两个项目中也会成功。元老很快去了欧洲访问，几乎同时我去美国访问了两年，我们未能跟进这些项目后来的发展。几年以后才知道，按照均匀设计的理论和方法，七机部三院的赵利华、王济成、马恒华、张炳辉、张建舟、黄树山、谷巨卿、柯繁等分别给出了三种型号的指挥仪数学模型中弹道坐标的两种形式的回归关系式，这是“均匀设计”在电脑仿真试验中的三项先驱的应用。

直至上世纪九十年代才知道，上述七机部的三个项目是在钱学森院士的领导下进行的，直接领导的是梁守槃院士。在课题组中的黄树山工程师曾用一周时间向梁院士详细介绍了均匀设计的思路和建模的方法，使梁院士理解了我们的做法是科学的、合理的，同意在有关文件上签字。三个项目经过了理论研究、测试等一系列的考核，最后都非常成功，先后获得了国家和部级多种奖励，其中一项获得国家科技进步特等奖。由于参加项目的人数很多，王元和我并未在得奖名单上。1988 年项目组成员之一的张建舟高工找到我家，向我报告了这一好消息，并送给我们庆祝导弹项目成功的一本画册。

为了使“均匀设计”能够让国外同行了解，元老建议用英文发表，并亲自执笔写了一个短的文章，投《科学通报》。投稿后，有一个审稿报告对均匀设计抱怀疑态度，因为均匀性作为主要的准则在试验设计中是没有的，而在数据分析中又一反传统的方差分析唱主角的做法，用多元多项式的回归模型来建模。在方差分析中，是假定模型已知，在我们提出的建模方法中并未假定模型已知，要探索不同的模型。可以毫不夸大地讲，均匀设计的框架是对传统试验设计的重大突破，审稿人的不理解和怀疑是不足为奇的，元老立即给《科学通报》编辑部写了一封信，表示科学的发展要允许不同的思路，文章[6]于 1981 年发表。

最近《科学时报》记者采访元老时，他说：“均匀设计理论的发展是从任务到学科，由任务来带动的，任务来自军工。在讲解时，实际背景被抽掉了，问题是这样的：天上有一架飞机，这架飞机有速度、方向和风向；然后，在船上要发一个导弹来击中飞机，导弹也有速度、方向和风向，如何设计才能让两边正好撞上？ 因为飞机和导弹的速度都很快，所以要很快算出来，算慢了就打不着了。这个问题用老方法算不出来，或者算出来但所需时间太长了，所以要有新方法，这就要用到数论的方法。”

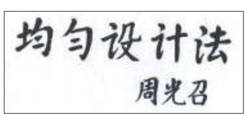
钱学森院士的高度评价

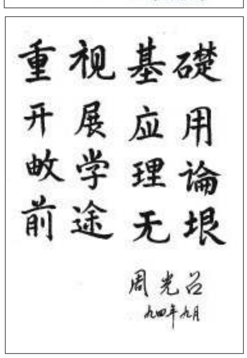
1993 年航天总公司三院张建舟高工组织了一个全国性的研讨班，由我主讲“回归分析和均匀设计”，与会代表介绍他们使用均匀设计的成果。元老由于前列腺肿大，那时在 301 医院动手术，未能到会。从代表们的介绍中，知道除了航天和军工项目之外，民用的成功项目很多，例如国内各大药厂几乎都在用均匀设计来探索新药的工艺和配方，石油化工方面也有许多成功的案例。《中国科技日报》资深记者刘序盾到会采访，他看出了均匀设计应用的广泛前景，在内参写了一篇报道，并建议成立中国均匀设计协会。钱学森院士在第一时间发现了这个报道，立即将报道送国防科工委主任朱光亚院士，建议推广均匀设计和成立有关的学会。

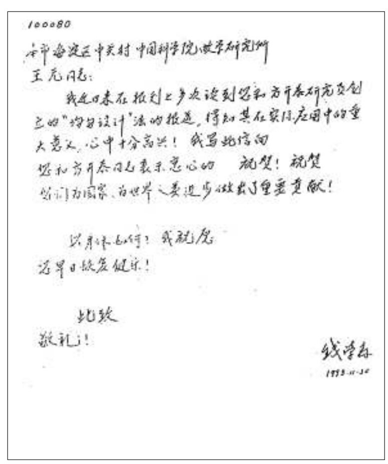
钱老的批示引起了《中国科学报》的极大注视，1993 年 11 月 24 日在第一版以三分之二的篇幅报道均匀设计的成功和应用成果，题目为“基础研究必须参加世界竞争，方开泰、王元首创‘均匀设计’法，引起国际数学界的高度重视”。随后《人民日报》和《中国科学报海外版》分别报道，标题为“应用开发路遥识马力，基础研究妙笔巧生花，‘均匀设计’法应用十二年成效斐然”。中国科学院院长周光召院士，于 1994 年题词“均匀设计法”，“重视基础，开展应用，数学理论，前途无垠”。

1993 年 11 月 30 日，钱老又专门给元老写信，对我们的成果给予高度的评价，信中写道：“王元同志：我近日来在报刊上多次读到您和方开泰研究员创立的‘均匀设计法’的报道，得知其在实际应用中的重大意义，心中十分高兴！我写此信向您和方开泰同志表示衷心的祝贺！祝贺您们为国家，为世界人类进步做出了重要贡献！”

在钱老的鼓励和航天总公司三院等的要求下，元老支持在中国数学会下成立一个二级学会来促进均匀设计的研







右起：梁守槼、王元、郑明等在中国数学会均匀设计分会成立大会上

1994年10月，中国数学会均匀设计分会第一届理事会合影。
前排左起：李淑霞、方开泰、梁守槼、郑明、王元、刘永才、殷鹤龄、杨鸿源、张承恩；后排左起：张建舟、王国梁、曾昭钧、张学中、陈路、汪誉铣、饶建锡、杨维权

究和应用。均匀设计的布点思路来自数论方法，故均匀设计分会也可视为数论方法分会。以一个交叉学科来建立一个分会，在中国是不多的。元老曾担任过一届中国数学会理事长，知道申请的程序。他亲自执笔起草申请书，以我们两人署名。那天他在我家，不打草稿，一气呵成，一字未错，仅仅三十分钟就完成了，那时他已63岁，我十分羡慕他的文学功底和过人的精力。中国数学会很快通过了我们的申请，最终的批准权在民政部。那时正处于学会整顿时期，要建立一个新的学会十分之困难。张建舟高工，凭着钱学森院士的支持，闯过一关又一关，1994年4月民政部终于批准成立中国数学会均匀设计分会，元老任顾问，我任理事长。同年十月在航天总公司三院召开第一届均匀设计法学术交流会暨均匀设计分会会员代表大会。两院院士梁守槼亲自到会并讲话，元老、海军科技委副主任郑明、国防科工委计划部三局局长等到会并讲了话。没有钱学森院士和王元院士的支持，分会的成立是绝无可能的。嗣后，分会在推进理论发展，促进广泛应用方面起了很重要的作用，至今已召开过十届学术研讨会和几十次培训班。如果我们追溯这项研究工作的起始，元老说："五十年代做基础研究，七十年代出了第一本书，八十年代用于试验设计，九十年代取得效益，前后近四十年了。这个事实又一次告诉我们，对基础研究工作不能'短视'。基础研究不能立竿见影，更不可能急功近利。基础研究必须参加世界竞争让社会检验。发达国家之所以发达了，与对待基础研究的'远视'不无关系，这一点应该是我们值得借鉴的经验。"

历经三十年的努力，我们完成的"均匀试验设计的理论、方法及其应用"项目，获得了2008年度国家自然科学奖二等奖。2008年度共34项成果获得了国家自然科学奖二等奖，一等奖出现空缺。《科学时报》以"国家科技奖励凸显六大看点"为标题指出2008年度国家科学技术奖励工作表现出六大特征，在第一特征中讲道："第一，本年度获奖项目原始创新明显。国家自然科学奖获奖项目代表性论文多发表在国际相关学科的重要刊物上，SCI他引次数平均达到800次，不断缩小中国与国际先进水平的差距，有些项目还达到了相关领域的国际领先水平。如中国科学院数学与系统科学研究院王元、方开泰完成的'均匀试验设计的理论、方法及其应用'，首次创立了均匀设计理论与方法，揭示了均匀设计与古典因子设计、近代最优设计、超饱和设计、组合设计深刻的内在联系，证明了均匀设计比上述传统试验设计具有更好的稳健性。该项工作涉及数论、函数论、试验设计、随机优化、计算复杂性等领域，开创了一个新的研究方向，形成了中国人创立的学派，并获得国际认可，已在国内外诸如航天、化工、制药、材料、汽车等领域得到广泛应用。"这一评价是对我们三十年（1978-2007）工作的充分肯定。

开创数论方法的新方向

1987年，中国人民解放军第二炮兵在研究"大威力武器毁伤分布的研究"中遇到困难，他们主动提出与中国科学院应用数学所合作，共同攻关，我是该课题的负责人。若攻击的目标是一个圆形的区域，用多枚弹头对该目标攻击，其毁伤面积依赖于弹头的威力，由于长途飞行发生的目标偏

王元和方开泰，2009 年 1 月在北京

1995 年王元与方开泰在香港海边

离，其毁伤面积有随机性。这是一个几何概率的问题，在多枚弹头的情形下，毁伤面积的概率分布没有公式可以表达，只能用随机模拟来探索。显然，这个随机模拟需在圆内进行，这就需要在圆内选择一组代表点，设有 N 个点，通过随机模拟其中有 n 个点被覆盖，则 (n/N) 乘以圆的面积可以用来估计毁伤的面积。重复上述过程，可以获得多个毁伤面积的估计，或称为毁伤面积的样本，从而可以近似地知道毁伤面积的概率分布。于是求解问题的关键之一，是如何产生圆的代表点以适用于随机模拟。

数论方法提供了产生正方形上代表点的方法，但没有人考虑如何在圆内，以及其他几何体面或体内产生代表点，以服务于许多实际问题。其中一个有趣的问题是中国科学院系统科学研究所前所长成平教授提出的轧辊寿命问题。传统的轧辊是一个长方形体，由耐高温、高压、不易变形的材料做成，成本昂贵。每次轧钢，是让钢材在流水线上运动，轧辊来压钢材，使之变薄、变长、变细。由于高温高压，轧辊的表面十分容易损坏，故轧辊的寿命不长。武汉钢厂为了提高轧辊的寿命，用球形轧辊代替传统的长方形体，每次球形轧辊与钢材的接触面是随机的，其结果是在球形轧辊上的摩擦面留下一个圆弧带，它是以某个随机大圆弧为中心，宽度为 d，而 d 值取决于轧钢的需要（见图 2）。轧辊多次使用，则球形轧辊上不同的点被摩擦过的次数不同，若规定：如有一点被摩擦过 M 次（M 给定），则轧辊不能继续使用，该轧辊此时已用过的次数 X 称为轧辊的寿命。武钢希望知道轧辊的平均寿命以及寿命的分布。由于问题的复杂性，长期得不到解答，于是成平[7] 在刊物上寻求帮助。显然，在球面上做随机模拟可以估计轧辊的平均寿命，以及寿命的近似分布，而随机模拟需要在球面上产生代表点。

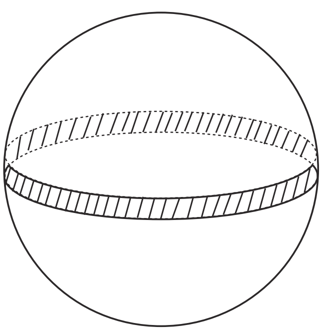


图 2 圆弧带

上述两个问题需要在二维圆内和三维球面上产生代表点，如上所述，数论方法仅提供了在单位立方体内的代表点，能否将数论方法推广至常见的几何流形上呢？我向元老报告了这两个问题以及希望将数论方法推广的想法。元老听后十分兴奋，决定成立一个课题组来完成这一研究任务。

为了加强应用数学的发展，1979 年，中国科学院数学研究所分为三个研究所：数学研究所、应用数学研究所和系统科学研究所。元老自然在数学研究所，而我加入了应用数学研究所（简称应数所），华罗庚兼任这两个研究所的所长。数学所在原办公大楼，而应数所租用北京友谊宾馆一座楼的一个单元办公，我和元老见面的机会减少了很多。元老总是步行来参加每周的讨论班，从不间断。我们的研究计划很快得到国家基金的资助和中国科学院数理化学部的特别资助。

元老习惯早起身，他讲早上头脑清醒，容易出新思路。他一旦有了新思路，便立即给我打电话。那一段时间，清晨来的电话一定是元老的，通常他希望我立即去他家讨论。

王元院士与香港浸会大学校长吴清辉教授

王元与浸大谢志伟校长，方开泰

我们两家相距不远，七至八分钟即可到达，每次他都在窗口注视我的到来。老天不负有心人，我们的想法终于找到可行的方法，其主要研究思路和结果由元老执笔分两篇文章[8, 9]于1990年发表在《数学年刊》的英文版上。元老思维十分清晰，语言精练，下笔成文，很少写错字，令我十分佩服和羡慕。

统计学中的数论方法

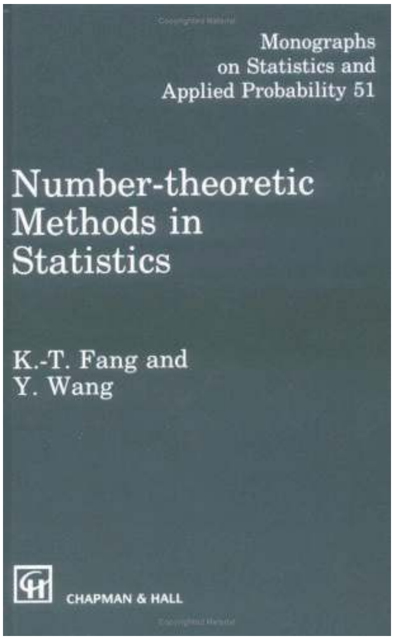
我们发表在《数学年刊》的文章，是带有纲领性的，仅仅是一个好的开端，尚有大量的工作需要跟进。用我们的方法，顺利地解决了上节提及的毁伤分布的研究，该成果获得了中国科学院1989年科技进步二等奖。随后我和我的学生及合作者，将数论方法系统地用于概率计算、统计推断和试验设计等方面。在此基础上，我们用数论方法来解决目标函数是多维、可能有多个峰值的优化问题（求目标函数的最大值或最小值），提出了一个序贯优化方法，称为SNTO（sequential number-theoretic method for optimization），解决了第二炮兵的第二个项目，该成果于1992年获中国人民解放军总参谋部科技进步一等奖。元老很谦虚，上述两个奖项他都不挂名，也不领奖金，我们非常感动和敬佩他“厚德载物”的高尚品质。随后我和我的学生及合作者，将数论方法系统地用于概率计算、统计推断和试验设计等方面。

1990年9月，由于工作的需要，香港浸会大学聘请我去香港执教，推动数学系的研究。差不多同时，香港中文大学一个专门基金请元老去访问一个月，使我们有更多机会谈天、游泳、吃饭、交流。那时元老刚刚60岁，风华正茂。香港的数学界，如香港大学的廖明哲教授，香港中文大学的岑嘉评教授、香港科技大学的杨重骏教授等经常和他切磋学问。在我的推荐下，香港浸会大学谢志伟校长非常隆重地在九龙会所请他吃饭，曾宪博副校长、吴清辉院长等陪同，我也应邀参加，席间介绍了我们合作的课题“统计学中的数论方法”。谢校长等领导均表示欢迎元老随时来浸大访问。

我刚到浸大不足一月，便和本系同事及港大同行联合申请了香港政府基金，课题的名称为“统计学中的数论方法及其应用”（Number-theoretic methods for statistics and applications），获得评审专家的高度评价，主管科研的曾宪博副校长非常开心，专门请我吃饭以示奖励。有了基金，我立即请元老来香港浸会大学访问，校方非常重视，给他提供了三间一套的住所，除用基金资付他的生活费外，学校又额外地给他每月加一万港元（当时国内教授每月工资不足300元人民币）。元老曾多次表示十分感谢香港浸会大学对他的优厚礼遇与款待。

元老这次访问的主要目的是将我们的研究成果写成一本英文专著。在我们以往的合作论文中，有时是元老起草，我提修改意见；有时候是我起草，元老修改。彼此都很尊重对方，合作愉快而高效。而写一本书就不那么简单了，我原计划想按章节分工，关于数论方法的章节由元老执笔，统计内容为主的章节由我执笔，然后互相修改。元老不同意我的想法，他讲由一人执笔比较好，风格一致，方便读者，建议由我起草中文稿，他在此基础上起草英文稿。元老如此谦让，是对我的信任和鼓励，元老比我长十岁，但他的工作进度超过我，三个月的功夫，我们完成了初稿。几年后我才知道，有一天晚上他的前列腺肿大，差点小便完全堵塞，他在住所很紧张，但没有打电话给我，怕给我添麻烦。他处处为他人着想，使我感动。

我们的专著 Number-theoretic methods in statistics[10]



Number-theoretic methods in statistics

王元院士在香港浸会大学名誉博士典礼上和时任特首董建华（左四）、香港科技大学创校校长吴家玮（右二）和香港浸会大学校长谢志伟（右一）等合影

投到总部在伦敦的 Chapman and Hall 出版社，仅仅一个月，出版社就寄来了合同，次年（1994 年）正式出版。这本书受到广大读者的关注，到 2012 年 5 月，谷歌统计的引用已达到 622 次。

对统计学发展和应用的关注

元老是一位数论学家，我国绝大多数的老数学家对实际问题不关心，更不会亲力亲为去支持。而元老对理论联系实际是十分重视和关注的。他和我在聊天时曾多次强调实际的重要，他强调做理论的人要从实际中吸取营养，获得动力。均匀设计的创造和统计学中的数论方法的研究方向是元老亲自实践这一观点的表现。实际上，还有更多的故事。

我们在《数学年刊》的文章中，曾提纲挈领地指出数论方法可用于混料试验的设计。所谓混料试验，就是将多种原料混合生成一种需要的产品，如前面提及的合金结构钢中各种化学元素的比例是一种混料；铺路面的混凝土是将大石子、小石子、粗砂、细砂、水泥和水等按一定的比例混合而成。用数学语言来表达，若有 m 种原料，它们在混料中的比例记为 $x_1, \cdots, x_m$，则 $x_i>0$, $x_1+\cdots+x_m=1$。由于这两个约束混料实验的设计方法不多。元老十分关心我们提出的混料均匀设计是否真的有用，希望我推荐这一方法至应用部门，我按元老的想法在有关工厂宣传，但似乎没有动静。一年后我问有关工程师，为什么你们不用混料均匀设计，他们讲在有的产品中原料的比例有的很大，有的很小，你们的布点方法中，是将所有的原料平等对待，有效的（可以做试验的配方）混料方案不多。这样一个简单的道理我们居然没有注意，即大部分实际配料试验是有限制的，即原料的比例 x_i 落在一个区间 $[a_i, b_i]$，其中 $0<a_i<b_i<1$ 是由实际产品决定的。在文献中虽有讨论，但介绍的方法对试验者并不方便，选择的方案很少。元老对这一问题十分关注，一年后他终于想出了一种解决的方法，亲自起草论文，我们的文章 [11] 发表在《中国科学》上。有限制的混料均匀设计在实际生产中获得许多应用成果，其中有长江三峡水坝的混凝土配方。

元老的人格魅力

我和元老的合作超过三十年，共同发表了 15 篇论文，完成一部英文专著。彼此合作得十分愉快，从未有过署名先后、贡献大小、争名争利的问题。有几次元老甚至不肯署名或不分奖金。元老对于功名利禄十分淡薄，文革后，他曾担任中国科学院数学研究所所长，只肯做一届，将位置让给比他年轻的同事。同样，他也只肯担任一届中国数学会理事长。对于中国数学会均匀设计分会，他尽量让我在第一线，有大

2010 年中国科学院数学与系统科学研究院部分同事为王元及越民义庆祝他们 80 华诞和 90 华诞

事向他汇报时，他首先听我的意见，然后才明确表达他的意见。只要他有空，学会的常务理事会议他愿意来参加，但多半时间在听大家的意见。

有一段时间，国内少数学者对均匀设计不理解，有偏见，元老从未对这些学者“大声”讲话，而是送文章给他们，以理服人。

元老虽然不是统计学家，但他对统计学的支持是一贯的，他指出“在国外大学，统计学是一个独立的系”。他曾多次到基层去讲解均匀设计法，解答使用者问题，在中国数学家中像元老这样亲自到应用第一线的是非常难能可贵的。

元老讲，在文革前和文革中，凡是苦差事都有他的份，多年的辛劳使他的身体透支严重。他的心脏一直有毛病，在上世纪九十年代，我看他的手握物时容易发抖，2001 年他在全国政协会议期间心脏病突然发作，幸好及时住院，才保住了生命，在康复期间我曾帮他在香港买药。2007 年，他心脏的二尖瓣有严重的问题，若不及时开刀有生命危险，这是一个高难度的心脏手术，幸好北京阜外医院有这方面的专家，那时元老已 77 岁，手术及康复期都有相当的风险。元老很乐观，在病房内还在想研究中的问题，出院后他完成了“统计模拟中的数论方法”[12]，文章将数论和统计更紧密地联系。他风趣地讲，在医院是做文章的最好时机。由于他性格乐观，手术后恢复得很快，不久又步行去研究所上班，还组建了数论的讨论班，亲自报告文献的最新进展。

由于元老的杰出贡献，香港浸会大学副校长曾宪博和我联合提名，由校董会批准，1999 年香港浸会大学授予王元“荣誉理学博士”，同时获得这个荣誉的有中国科学院前院长周光召院士和国务院港澳办前主任鲁平先生。香港浸会大学专门为他精制了一套博士服，元老十分喜欢，至今珍藏在家。见文章[13]中 13 页的照片。

元老的爱好十分广泛，尤其精于书法，他虽然起步不久，但已达到国家级水平。每当他提笔挥毫时，他全身贯注的神情，与他专心做数学研究的风采有异曲同工之美。

参考文献

1. N.M.Korobov. The approximate computation of multiphe integrals, Doke.Akad.Nauk., SSSR 124, 1207-1210, 1957.
2. 华罗庚，王元，数值积分及其应用，科学出版社，北京，1965 年。
3. L.G.Hua and Y.Wang, Applications of Number Theory to Numerical Analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
4. 华罗庚，数论导引，科学出版社，北京，1957 年。
5. 方开泰，均匀设计——数论方法在试验设计的应用，应用数学学报，363-372, 1980.
6. Y. Wang and K.T. Fang, A note on uniform distribution and experimental design, Chinese Science Bulletin, 485-489, 1981.
7. 成平，应用数学问题征解，数学的实践与认识，79-79, 1983。
8. Y. Wang and K.T. Fang, Number theoretic method in applied statistics, Chinese Annals of Math. Ser. B, 11, 41-55, 1990.
9. Y. Wang and K.T. Fang, Number theoretic method in applied statistics (II), Chinese Annals of Math. Ser.B, 11, 384-394, 1990.
10. K.T. Fang and Y. Wang, Number-Theoretic Methods in Statistics, Chapman and Hall, London, 1994.
11. Y. Wang and K.T. Fang, Uniform design of experiments with mixtures, Science in China (Series A), 39, 264-275, 1996.
12. 王元，方开泰，统计模拟中的数论方法，中国科学 A 辑，39(7): 775-782, 2009.
13. 蒋文燕，入门须引路，功夫法自修 —— 王元院士谈数学教学，数学文化，第 2 卷第 2 期，3-17, 2011.

作者简介：方开泰教授，著名统计学家。北京大学研究生毕业，曾任中科院应用数学所副所长，香港浸会大学数学系讲座教授及系主任，现任北京师范大学 - 香港浸会大学联合国际学院 (UIC) 教授。美国统计协会 (ASA) 院士，国际数学统计协会 (IMS) 院士。

格罗登迪克的 Motive 与塞尚的母题

徐克舰

我们打算冒着简单化和片面化的风险，以相对概括的方式，来趋近两位高不可攀的巨人。他们当中的一位是亚历山大•格罗登迪克 (Alexander Grothendieck)，他是人类 20 世纪最伟大的数学家之一，另一位是保罗•塞尚 (Paul Cézanne)，他位于现代艺术史上最伟大的画家行列之中。


亚历山大•格罗登迪克


保罗•塞尚

格罗登迪克在他 20 多年的数学生涯中，曾在诸多方面做出了杰出的奠基性的贡献，特别是，他创立了概型理论，并由此建立起对后世影响深远的庞大的现代代数几何学体系。他的理论体系导致了此后的三项举世闻名的伟大进展：1974 年比利时数学家德林 (Pierre Deligne) 关于魏依猜想的证明，1982 年德国数学家法尔廷斯 (Gerd Faltings) 关于莫戴尔猜想的证明和 1994 年英国数学家怀尔斯 (Andrew Wiles) 关于历经了 350 年的著名的费尔马大定理的证明。

然而，在他诸多的理论建树中，格罗登迪克本人格外看重的却似乎是他在 1964 年 8 月 16 日给塞尔 (Jean-Pierre Serre) 的信中提出的 Motive 理论。

格罗登迪克后来写道：**“在所有我有幸发现并呈献给世人的数学事物中，Motive 的实在性对我来说依然是最奇妙，最充满神秘的——它甚至是‘几何’与‘算术’在深层面上的同一所在。而 Motive 的‘瑜伽’(即 Motive 的哲学——译注)……或许是我作为一个数学家的人生前半期所发现的最强有力的探索工具。”**([1]) 而塞尚，这位现代艺术史上家喻户晓的人物，则以他毕生的精力，通过对母题 (motif) 及其实现的艰苦探索，颠覆了自文艺复兴时期以来前人所建立起的艺术实践信条，开创了人类艺术史上的新纪元。塞尚也因此享有“现代艺术之父”的盛誉。

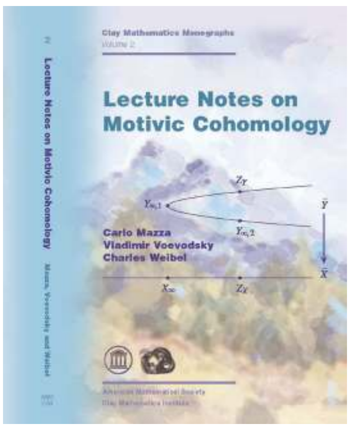
本文的目的是要对格罗登迪克的 Motive 与塞尚的母题的含义进行阐释，并将两者进行比较，以试图对隐含于其中的思

[1] 何昌林 (1940-2009)，江苏宜兴人，中国音乐学院研究员，音乐学家。1966 年毕业于上海音乐学院作曲系，曾任青岛市京剧团作曲兼指挥。1981 年毕业于中国艺术研究院音乐研究所，获硕士学位，同年进入中国音乐学院。何昌林先生致力于民族音乐理论特别是古代曲谱的研究，曾发表《燕乐二十八调之谜》、《天平琵琶谱之译解研究》、《敦煌琵琶谱之考、解、译》等影响深远的论著，尤以曾译解唐传古谱《秦王破阵乐》而著名。1981-1988 年何昌林先生发起并主持了四届华夏之声音乐会。中央电视台曾依据何昌林先生译解编配的唐传古谱录制大型电视专题节目《火凤乐舞》。

想给出一种理解。本文的讨论是笔者长时间独立思索的结果，它记录了笔者试图概括格罗登迪克的 Motive 和理解塞尚艺术的持久的努力，这既是对数学的苦苦冥思，也是艺术和审美经验——那“超验性的唯一的一抹余光”([2] 第 2 页) 的久久萦绕。

同时，笔者的这些思考在很大程度上也是有感于著名的数学史家和数学哲学家莫里斯 • 克莱因 (Morris Kline) 在他的著作《西方文化中的数学》的结尾写下的一段文字：“遗憾的是，我们对数学的主要内容、本质及其影响不能做更深入的探讨。如果时间允许的话我们对数学的更高深的分支进行讨论，则我们对数学文化发展中的贡献会有一个清楚地了解。可惜的是，要精通数学理论必须进行多年的研究，而且又不存在可以缩短这一进程的捷径。”([3] 第 469 页) 克莱因的“遗憾”和“可惜”是颇具意味的。

1. 一个封面



《Motive 上同调讲义》的封面

我们的讨论是由一本讲义的封面引起的。在 Motive 理论的研究方面，近二十年来最具影响力的进展无疑当属由俄罗斯数学家苏斯林 (Andrei Suslin) 和沃沃斯基 (Vladimir Voevodsky) 发展起来的“Motive 上同调”(motivic cohomology) 理论。苏斯林因此获得了代数的最高奖 Cole 奖，而沃沃斯基，则因为使用这套理论解决了代数 K- 理论中长期悬而未决的著名的米尔诺猜想，于 2002 年在北京国际数学家大会上荣膺素有数学诺贝尔奖之称的菲尔兹奖。关于这个理论，马沙 (Mazza)、沃沃斯基和韦博 (Weibel)2006 年合作出版了一本著名的讲义《Motive 上同调讲义》([4])。但是，或许令许多读过这本讲义的读者不无困惑的是，占据这样一本极为抽象的数学理论讲义整个封面的却是用水彩画的一座山（见上图）。这是什么意思？为什么要画一座山？这座山与 Motive 有什么联系？它的含义是什么？

[曼宁的观点] 要回答这些问题，需要从韦博关于沃沃斯基、苏斯林和弗里德兰德 (Eric M. Friedlander)2001 年合写的 Motive 上同调方面的最权威的著作 Cycles, Transfers and Motivic Cohomologies 的书评说起。在此书评中，韦博解释了 Motive 一词的来源。他认为 Motive 一词是借自于后期印象派画家塞尚的术语。韦博写道：“令钟情于文化的读者感到欣悦的是，motif 一词是借自于塞尚用来表述其印象派绘画方法的术语。”([5]) 通过进一步考察可知，韦博的说法实际上是源自曼宁 (Yuri Manin) 的文章，([6]) 即源自曼宁在他关于“史前”Motive 理论文章的前言中对 Motive 一词的使用进行的解释。只是，曼宁的说法要比韦博的说法委婉一些，语气上似乎没有韦博那么肯定。曼宁说：“使用 Motive 一词的缘由可以通过参考赫伯特 • 里德的评论而得到解释：**‘塞尚的绘画方法首先是选择母题——风景、肖像人物、静物；其次是把他对母题的视觉领悟体现出来；在这个过程中丝毫不损失母题在实际存在中所具有的生命强度。’(为了保持 motif 的生命强度，显然实现应该是一个函子。Ju.M.)**”([6]) 这其中的引文是出自英国著名的艺术史学家赫伯特 • 里德 (Herbert Reed) 在其著作《现代绘画简史》中关于塞尚艺术的评论。([7] 第 8 页) 也就是说，曼宁认为格罗登迪克的 Motive 可用塞尚的母题来解释。

[圣维克多山] 鉴于这层背景，我们就不难理解上述讲义封面上的山的含义。实际上，既然该讲义的作者们，特别是韦博，持有 Motive 一词是借自于塞尚的观点，那么，如果想要在封面上以绘画语言表达出这层意思，就该选择最能表达这层意思也即最能代表塞尚母题的视觉材料。当然，首先应该指出，这幅水彩画可能未必出自塞尚之手。因为，一方面，在笔者能够搜索到的塞尚的水彩画作品中并没有这幅作品。另一方面，从视觉效果上来看，该画的用笔和画法都不像是塞尚作品的风格，所画的山的形状也不像塞尚的代表性母题——圣维克多山。[2] 因此，该画可能是设计者出于设计的意图所绘，因为该画具有明显的迎合封面文字设计的痕迹。即使如此，我们依然断定：该书封面上所画和所要表达的应该是塞尚绘画中最具代表性的母题——圣维克多山！为什么呢？因为，对于塞尚的艺术有所了解的人都会知道，对塞尚来说，圣维克多山有着极特殊的意义。塞尚一生画过许多次圣维克多山，这是塞尚绘画中最经常出现也是塞尚最喜爱的母题之一。杰出的英国艺术批评家、形式主义艺术批评的开山鼻祖、塞尚研究首屈一指的权威罗杰 • 弗莱 (Roger Fry) 论述道：“这是一座给人印象深刻的山脉，但与其说那是由于它的高度和险峻，倒不如说是由于它‘人格’的怪异，它一定深深地令塞尚为之着迷，因为没有哪一座山像它那样被一个艺术家如此坚持不懈、乐此不疲地探究过。”([8] 第 173 页) 从形式意义上讲，圣维克多山是体现塞尚通过“抓住几个明显相关的、几乎几何结构式的要素，然后在这一被清晰把握的框架上，赋予轮廓的每一部分以最为幽妙的变化”来诠释形式的典型方法的完美母题。([8] 第 174 页) 不仅如此，圣维克多山还承载着深刻的象征意义。正如塞尚研究的学者米歇尔 • 奥格 (Michel Hoog) 所说，圣维克多山是“一座圣山”，“这座山充满了象征意义，它令塞尚和埃克斯人

[2] 通观塞尚的作品，大致可以断定：在以山为母题的作品中，塞尚一生中只画过圣维克多山。

圣维克多山（塞尚，1904-1906 年）

为之着迷”。“塞尚童年时，和左拉一道把圣维克多山化为己有。……他把自己和这座山认同。塞尚就像普桑画的巨人波吕斐摩斯，他在那战胜野蛮人的山上，俯视着埃克斯和埃克斯市民，左拉则成为他的胜利见证人。”([9] 第 164 页) 而且，对于不断自我怀疑的塞尚来说，学者杜什廷 (Hajo Duchting) 认为：圣维克多山成为了最后的避难所。在塞尚最后的岁月里，圣维克多山承载着更为伟大的艺术使命：塞尚倾尽一切才华，通过圣维克多山的组画来回答：“现代绘画的至高成就究竟能达于何种高度？他对他的艺术能留下何种遗产？”([8] 第 179 页) 正因如此，“今天，这座山对所有人来说，又多了一层新的意义：塞尚赋予它的意义”([9] 第 164 页)。 因此，对于认为可以用塞尚的母题来解释格罗登迪克的 Motive 的作者们来说，用塞尚的圣维克多山作为封面，以表达他们的观点，也就再合适不过了。到目前为止，我们的这些滔滔论述显然还只是感情用事的“可能性”。 但对我们来说，最至关重要的问题显然是“现实性”，也即是否是“是”，而不是“应该是”，也就是说，作者们究竟是否要在封面上表达这种观点呢？关于这一点，似乎可以在位于这本讲义封底的内容简介中找到答案。实际上，该内容简介的第一句话就是：“Motive 的概念像它得名于其的同名者，即塞尚的印象派绘画方法中的‘母题’(motif) 一样的令人难以把握。”这几乎可以看做是对封面含义的一种含蓄解说，也可以看做是对我们看法的一种支持。

从更广泛的意义上讲，这折射出了西方人的人文主义精神传统。也就是说，数学家们不仅仅想从格罗登迪克的 Motive 理论中获取和掌握深刻的数学知识，而且还试图从中诠释出一种特殊而生动的，正如艺术史学家欧文 • 潘诺夫斯基 (Erwin Panofsky) 所认为的，使人更接近于智慧的人文主义精神。马沙、沃沃斯基和韦博的讲义的封面设计表明了数学家们认同这种诠释的强度。

我们不知道为什么曼宁会从格罗登迪克的 Motive 联想到塞尚。我们所关心的是：这其中是不是会有着更为深层的原因？我们的讨论并非执意要在格罗登迪克的 Motive 与塞尚的艺术之间寻找出具有确定性的联系，而更多是关注数学与艺术之间的相互类比和启迪以及由此引发的问题和思考，以在不同的知识之间营造一种与艺术史学家贡布里希 (Richard Gombrich) 在《艺术与错觉》中所论述的视觉“扩散效应”相类似的效应。([10] 第 225 页) 以此来理解，如克莱因所说的，数学不仅是“一个知识体系，一种实际工具，哲学的一块基石，完美的逻辑方法，理解自然地钥匙，……”也是“美感的经验”,“一种通向物质、思维和情感世界的方法”。([3] 第 469 页)

2. 格罗登迪克与塞尚

法国哲学家梅洛 - 庞蒂 (Maurice Merleau-Ponty) 告诫我们：“不要去想象某种抽象的力量，这力量把其影响施加到生命的‘材料’上面，或者，把障碍引进生命的发展当中。可以肯定，生命并不解释作品，然而，可以肯定，生命与作品相通。事实在于，要创作这样的作品，便要求这样的生命。”([11] 第 55 页) 因此，在我们开始讨论格罗登迪克的 Motive 和塞尚的母题之前，先来看看格罗登迪克和塞尚的“生命”方面，对我们的理解是有益的。实际上，这两位出生相差 89 年的大师，在诸多方面似乎都存在着一些类似。

[出身] 塞尚 1839 年 1 月 19 日出生于法国南部埃克斯的一个富裕的家庭，父亲是一个制帽商，后来成为银行家，母亲是“一位聪明活泼的女性，似曾鼓励过塞尚追求艺术”([9] 第 14 页)。格罗登迪克 1928 年 3 月 28 日出生于德国柏林的一个颇为动荡的家庭，父亲是乌克兰人，母亲是德国人，父母亲都是犹太人，并且都是颇为浪漫的狂热的“无政府主义者”。格罗登迪克终其一生都是居住在法国的无国籍的人。

[教育背景和天赋] 塞尚和格罗登迪克有着颇为类似的贫乏的教育背景，但却都有着极好的天赋。早年，塞尚曾经在埃克斯市立绘画学校注册，跟随吉贝尔 (Joseph-Marc Gibert) 学习过绘画，后来，投考过美术学院，但落第了。因此，塞尚在艺术上的探索基本上属于自学。但是，正如塞尚的母亲说，他“像鲁本斯和韦罗内塞一样，天生是一个画家”。([12]

第 14 页) 格罗登迪克的少年时代是在动荡中度过的。当时正处于第二次世界大战，他不仅没有在良好的环境中受过正规教育，而且很长一段时间是和他母亲一起在战俘收容所里度过的。虽然，他“所受的痛苦和自由被剥夺的经历使他的发展很不均衡”，但是，格罗登迪克“从很小的时候起就有很强的内在理解能力。在数学课上，他不需要老师提示就能区分什么东西是深层的、什么是表面的，什么是正确的、什么是错误的”。他后来回忆道：“我在孤独工作中懂得了成为数学家的要素。……不用别人告诉我，然而我却‘从内心’中就知道我是一位数学家。”([13])

[思维风格] 格罗登迪克从年轻的时候就表现出了与众不同的思维风格，他卓越的才华和非凡的思考力以及“天马行空般的想象力”为世所公认。作为一位伟大的数学家，这或许并不会令人感到意外。但是，或许真正令人感到意外的是，作为画家的塞尚，也有着极强的思考力和逻辑推理潜质。在中学时代，塞尚还曾因数学获过奖励。([12] 第 4 页) 这在通常擅长形象思维的艺术家中是极为罕见的，也与像梵高这样的画家形成了鲜明的对照。这一点似乎被许多塞尚的研究学者所忽略。据记载，塞尚作画时经常是在画上一笔后，需要观察思考很长时间再落第二笔；更有甚者，周知，塞尚为画商沃拉尔 (Ambroise Vollard) 画过一幅著名的肖像。从表面

沃拉尔肖像（塞尚，1899 年）

上来看，此画简单概括，似乎用不了多长时间就可以完成，但是沃拉尔却为此做了 115 次模特！如学者威廉 • 弗莱明所说：“对塞尚来说，作画不应只是视觉行为，而且也是思维的行为。”([14] 第 531 页) 在笔者看来，塞尚的这种超常的感受力和善于逻辑思考的潜质影响了他的观察方式，也影响了他的艺术观念和艺术风格的形成。这似乎可以解释，为什么塞尚的作品总是充满了一种结构上的逻辑力量。“不管多么朦胧，他总是能够看见帷幕背后那更投合他最真切情感的结构和逻辑。”([8] 第 78 页)

不仅如此，塞尚和格罗登迪克都具有跨越已知和传统直接创造新事物的卓越本领。塞尚开创了现代主义艺术，但从传统绘画的标准来看，他却并没有古典大师们那样深厚的造型功底。同样地，格罗登迪克在创立现代代数几何的时候，如塞尔所说：“他的经典代数几何知识实质上等于零。”([13]) 这些事实的颠覆性在于，它清楚地告诉我们，新事物和旧事物之间的关系未必一定是一种包含关系，一般来说，还可能是一种相交甚至不相交的关系。[3] 也就是说，要成为一位开创新事物的“现代”大师，未必就一定得先是一位谙熟旧事物的“古典”大师。格罗登迪克的观点则更为惊世骇俗，他在素有“现代代数几何的圣经”之称的《代数几何原理》的前言中一开始就写道：“这本书的目的是对代数几何学的基础做一番探讨。原则上不假设读者对这个领域有多少了解，甚至不主张读者具有这方面的知识，虽然有一定知识的话也很有好处，但有时（比如习惯于从双有理的观点考虑问题的话）对于领会这里将要探讨的观点和方法或许是有害的。”([15]) [4] 显然格罗登迪克的意思是：任何知识都具有内在的约束力，以往的知识无疑是理解新知识的基础，但是由以往的知识所具有的内在约束力造成的思维定势同时也构成了理解新知识的障碍，这也因此彰显了创新的艰难和可贵。人类科学史上的许多事实都说明了这一点。事实上，仅从“无理数”和“虚数”的名称的含义就能体会到，当初人们在理解这些全新概念时由已知的“有理数”和“实数”概念所具有的内在约束力所产生的理解上的障碍。这似乎也解释了，为什么有那么多有着极高的艺术修养的人都长时间不能理解塞尚的艺术。这在现实主义画家徐悲鸿那里表现得格外令人印象深刻，因为他终生都理解不了塞尚的艺术。[5]

[3] 实际上，对于非交换几何，数学家们正是这样理解的。

[4] 这里我们使用了北京大学周健博士的译文。

[5] 塞尚追求作品的内在和谐，但他却不是唯美主义者，他的作品在许多时候呈现出来的不仅不是表面上看起来的美，甚至初看起来相当的丑陋。正是这种表面上的丑陋构成了唯美主义者的观赏障碍。我们认为，仅凭学院主义的绘画造诣对理解像塞尚这样的画家的作品，或许不仅所助甚微，按照格罗登迪克的惊世骇俗的观点，有时甚至作用是负面的。从这个角度上讲，由徐悲鸿的老师达仰 (Pascal-Adolphe-Jean Dagnan-Bouveret) 这种上承卡巴奈尔 (Alexandre Cabanel) 的古典派画家为徐悲鸿培育出的审美之眼所产生的内在约束力会阻碍他理解塞尚艺术中隐藏在“乍一看令人讨厌 ([8] 第 91

[性格] 塞尚和格罗登迪克都是有着“喜欢直接表达情绪的”、“单纯的”、“非黑即白”的极端性格的人物。从《塞尚传》([12]) 可以知道，“塞尚的性格急躁、不安定和容易感动”，“固执己见”，“难以接受劝告”。正如塞尚的挚友、著名的法国作家左拉所说：“要向塞尚证明什么，就像试图劝说圣母院的尖塔跳夸德里尔舞一样难……”([8] 第 13 页) 塞尚在表达自己的情绪时相当直接，“偶尔听到过分与自己相反的见解，便突然站起来，也不向谁讲一声，返身就走，以代替回答”。([12] 第 45 页)“塞尚的气质常常动摇于一个极端到另一个极端之间。”([12] 第 136 页) 而格罗登迪克，如瑞本鲍姆 (Ribenboim) 所说，有时“会变得非常极端”。不过，与塞尚相比，格罗登迪克的性格更为外向。凯琳 • 泰特 (Karin Tate) 回忆说：“格罗登迪克乐于享受快乐，他很有魅力，并喜欢开怀大笑。但他也可以变得很极端，用非黑即白的眼光来看待问题，容不得半点灰色地带。另外他很诚实：你和他在一起的时候总知道他要说的是什么，…… 他不假装任何事情。他总是很直接。”([13])

[英雄主义] 塞尚和格罗登迪克都是富有激情、梦想做大事情、并且有着“不顾一切的勇气”的顽强的英雄式人物。在 IHES[6] 的“英雄岁月”里，“格罗登迪克全身心地投入到数学中。他非凡的精力和工作能力，以及对自己观点的顽强坚持，产生了思维巨浪，将很多人冲入它的奔涌激流中。他没有在自己所设定的令人畏惧的计划面前退缩，反而勇往直前地投入进去，冲向大大小小的目标”。“他一个人让那时候世界上所有在代数几何领域中认真工作的人都很忙碌，”([13]) 他一个人对代数几何这个领域的完全控制，如同康德对他的批判哲学的沉思，持续了长达 12 年的悠久岁月。

而塞尚，正如艺术批评家克莱夫 • 贝尔所说：“很明显是一个天才的男人的性格，就像大多数激情的英雄崇拜者所向往的那样。”([16] 第 33 页) 塞尚有着“英雄般的、几乎存在主义式的形象”。([17] 第 3 页) 但是，与格罗登迪克有所不同，塞尚的英勇中却同时包含着一种神经质和自我怀疑。这既与先天的遗传因素也与后天的影响因素有关。首先，这与塞尚的生活背景有关。实际上，按照雷华德的说法，塞尚的性格是受到了生活环境的影响。因为，塞尚的一家在埃克斯始终是被地方贵族藐视、被市民摈弃的外乡人。这一点“无意识中影响了未来的画家、高傲而富有感性的孩子。不管怎样，这无疑会加剧他那有自我封锁倾向的性格”。([12] 第 11 页) 但是，我们认为，这并不是主要因素。塞尚的这种神经质和自我怀疑更多是与他所从事的艺术事业的高度探索性和高度不确定性以及需要长时间的努力有关。事业具有对性格的改造力量。用梅洛 - 庞蒂的话来说就是，这“应用他的创作意图来解释”。([11] 第 54 页) 格罗登迪克 38 岁时获得了数学最高奖菲尔兹奖，可谓誉满全球。而塞尚却完全不同。他崇高的艺术地位的真正确立是在他去世多年以后。而“他在生命的最后岁月中所创作的杰作”对他“那不断增长的身后名望的最终凯旋”的预示，却是建立在长期遭受一连串的屈辱和失败的悲剧基础之上的。“他的作品为我们记录了这一悲剧的展开过程。”([8] 第 8 页) 弗莱写道：“他没有那种直接抓住一个理念并以某种强化手段将它栩栩如生地表达出来的才华；直到最后完成，他似乎才能领会他自己作品的主题；在他的表达背后仿佛总存在某种潜在之物，某种只要可能他就会一直想要抓住它的东西。……”([8] 第 6 页) 这使得他“比任何人都没有自信。他总是小心翼翼地探索他的道路，要不是他的试探证明了在面对难以捉摸的主题时，他总有那么一股不顾一切的勇气的话，我们就只能说他是胆怯的了”。([8] 第 6 页) 德国学者阿德里亚尼 (Gotz Adriani) 论述道：“只是到接近其事业的晚年时，他才模模糊糊地感觉到自己的道路的正确性。……他是一个彻底的不妥协者，与此同时又高度地犹豫不决。他拥有令人难以置信的意志力……。”([8] 第 14 页) 他的“英雄般的崇高性”使他成为“19 世纪法国艺术史上的、个人技艺大战庸众的令人战栗的史诗的主角”。([8] 第 205 页)

[历史影响] 我们不知道格罗登迪克会不会在塞尚身上看到自己的影子，但是，我们知道，两者都对后世产生了巨大而深远的影响。“塞尚是引导历史最伟大的艺术家之一”(格莱兹与梅津杰)，他的“想要客观地观察世界的真诚决心”([7] 第 6 页) 开启了如火如荼的现代主义艺术运动。毕加索在表达他年轻时对塞尚的仰慕之情时曾说：“塞尚是我唯一的导师！……塞尚好像是我们大家的父亲。”([9] 第 152 页) 莫里斯 • 德尼（Maurice Denis）还曾经专门画过一幅题为《向塞尚致敬》的油画，在画中，艺术家们围着一幅曾经

页)”的“笨拙与尴尬”的外表下的那种陌生的“造型构思品质 ([8] 第 91 页) ”。所以，他才会在给徐志摩的信中说，塞尚等“之画一小时可作两幅”，怒斥塞尚的作品为“无耻”，甚至把塞尚比作“乡下人的茅厕”，而称达仰为“大华饭店”。(参见《徐悲鸿文与画》，徐悲鸿著，华天雪注析，山东画报出版社，2011) 这些激烈的言辞不禁会使人想起左拉在小说《杰作》中对 1874 年第一次印象派画展的描述：“女士们用手帕掩着嘴不住地笑，先生们大笑得腹痛。这是一个哄笑的漩涡，在觉得滑稽可笑的群众中逐一传遍。不久进入高潮，……不管美丑，全部成了哄闹……谁都交叉双臂，笑得跌倒……大家指着画互相叫喊……。”([12] 第 65 页) 然而，这些激烈的言辞并不是出现在 1874 年，而是出现在 1929 年，那时即使“长期坚持不接受塞尚”并认为塞尚的作品“永远不可能在公共美术馆展出”([8] 第 91 页) 的最为顽固不化的法国政府，也已经改变了对塞尚艺术的态度。这也说明，这些激烈的言辞离着“意识到其第一反应的错误 ([8] 第 91 页)”是多么的遥远。

[6] 法国高等科学研究院

为高更所珍藏的塞尚的著名静物画《高脚果盘》，以示对塞尚的敬意。在整个艺术史上，大概只有像达芬奇[7]和伦勃朗这类的大师堪与塞尚比肩。同样地，“格罗登迪克的工作则对现代数学有着深远的影响，从更广范围说，它位列于 20 世纪人类知识最重要的进展之中”。([13]) 杰克森甚至将格罗登迪克比作爱因斯坦，他说：“格罗登迪克的成就可以和，比如说阿尔伯特 • 爱因斯坦的相提并论。他俩中每一个都开启了革命性的新观点而改变了探索领域，而且每一个人都寻求现象间最根本的统一的联系。”([13]) 然而，在笔者看来，格罗登迪克，这位“现代代数几何学的上帝”，倒更像是一位引导现代数学历史的“塞尚”!

3. 格罗登迪克的 Motive

现在我们来着手分析格罗登迪克的 Motive。首先，应当特别指出的是，虽然格罗登迪克于 1964 年提出了 Motive 理论，但是，格罗登迪克自己却从未正式发表过任何关于 Motive 的文章。最早发表论文介绍 Motive 理论的是曾亲受业于格罗登迪克的数学家曼宁 ([6])(1968)、德马泽 (M. Demazure)([19])(1969) 和克莱曼 (S. Kleiman)([20])(1970)。此后，Motive 理论经历了很大的变化，其持久的“哲学式”的影响已遍及许多领域，后续研究可谓浩若烟海。全面详述整个 Motive 理论的历史和思想演化恐非易事，也超出了笔者的学养。因此，我们仅限于论述格罗登迪克的原始的 Motive 理论。

[魏依猜想与 Motive] 首先，格罗登迪克为什么要研究 Motive 呢？这需要从著名的魏依猜想说起。1949 年，由于受到黎曼的文章的启发，魏依研究了定义于特征 p 的有限域上的代数簇 V 的 Zeta 函数，以计算 V 上在此域及其有限扩域上的有理点的个数。在曲线和阿贝尔簇两种情况下，魏依证明这种 Zeta 函数满足性质：1) 是有理函数；2) 有函数方程；3) 零点和极点有某种特定的形式。这是经典黎曼猜想的类比。魏依猜想即是问，对于一般射影非奇异代数簇上的 Zeta 函数，这些性质是否还成立。此后，魏依自己用一种当时尚不存在的特征 p 的有限域上的代数簇 V 的系数为特征零域的上同调，即后来的“魏依上同调”，重新叙述了他的猜想。这样，只要能定义出这种“魏依上同调”，就至少可以证明魏依猜想的大部分。 在此后的许多年里，数学家们的许多尝试都意在寻找魏依上同调。魏依猜想的惊人之处在于，它给出了代数几何与拓扑之间的联系，它“隐含着的洞察力所激发的巨大期望就是拓扑空间的上同调方法可以适用于簇与概型。这个期望在很大程度上由格罗登迪克及其合作者的工作实现了”。([13]) 最终，在 1960 年，格罗登迪克定义出了系数为 l-adic 域 $\mathbb{Q}_\ell$ 的平展上同调 (étale cohomology)，还定义出了晶体上同调 (crystaline cohomology)，并证明这种上同调即满足魏依上同调的要求。这样，格罗登迪克就证明了魏依猜想的前两部分。对于魏依猜想的第三部分，格罗登迪克并没有试图直接去找出证明，而是转向了更为宽阔的视野。首先，格罗登迪克提出了 Motive 理论，然后，在此基础上形成了他著名的“标准猜想”。[8] 这样，如果能够证明“标准猜想”，那么“人们就可以通过用簇的 Motive 理论替代曲线的雅可比，来将魏依关于曲线情形的魏依猜想的证明扩展到任意维的代数簇情形”，([1]) 即可推出魏依猜想。

[Motive 的来源] 格罗登迪克所定义的魏依上同调即为系数是 $\mathbb{Q}_\ell$ 的 ℓ -adic 平展上同调。随着素数 ℓ 的变动，会给出性质完全不同的域 $\mathbb{Q}_\ell$ 上的上同调，这样我们就有太多（无穷多）的上同调理论。人们自然会问，是否能类比于代数拓扑学中的 $\mathbb{Q}$ 系数上同调，在代数几何中也建立起一种 $\mathbb{Q}$ 系数上同调，以诱导出所有的 ℓ-adic 上同调呢？ 但是很不幸，可以证明在代数几何中这种 $\mathbb{Q}$ 系数上同调并不存在。可是，尽管 $\mathbb{Q}_\ell$ 是完全不同的“世界”，它们却毕竟具有着明显的构造上的类似性。对于不同的 l 所产生的定理，形式上是完全一样的。所以，应该存在一种不依赖于 ℓ 的东西。正如米尔尼 (Milne) 所说，既然“不存在一种 $\mathbb{Q}$ - 上同调理论以诱导出格罗登迪克所定义的所有这些不同的上同调理论，但是我们又如何阐释种种迹象都显示其似乎存在这一事实呢？格罗登迪克的回答是 Motive 理论”。([1])

[什么是 Motive ?] 我们用格罗登迪克自己的话来回答究竟什么是 Motive。1964 年 8 月 16 日，格罗登迪克在给塞尔的信中写道：“**我称为 k 上的‘Motive’的是指像 k 上代数概型的 ℓ -adic 上同调群一样的东西，但却认为其与 ℓ 无关，它具有‘整’结构或暂设有‘$\mathbb{Q}$’结构，它由代数链理论导出**”，([1]) 也就是说，格罗登迪克的 Motive 就像是一种类似于，正如我们上面已经指出的，在代数几何中不存在的具有有理系数的上同调一样的东西，它将会以某种方式或某种关联，把所有的 ℓ -adic 上同调都“诱导”出来。这样，Motive 就起码应该具有某种与上同调类似的“广义的”向量空间结构。

具体地讲，若记 $\mathcal{M}(k)$ 为由 k 上射影簇范畴 $\mathcal{V}(k)$ 构造出的 Motive 范畴，那么 $\mathcal{M}(k)$ 应该是一个阿贝尔范畴（粗略地讲，就是关于态射的核与像封闭），并且函子 $\mathcal{V}(k) \to \mathcal{M}(k)$ 给出泛上同调理论。为此，最经济的办法就是，直接扩大范畴 $\mathcal{V}(k)$，使其满足这些要求。这需要做两件事情。

---

[7] 不过，需要指出的是，塞尚不喜欢“文学式的绘画”。塞尚认为：绘画的效果应该“靠颜色而不靠文学手段达到”。([18] 第 14 页) 因此，塞尚并不欣赏达芬奇这样的画家，他认为：“像达芬奇那样的手法，那……成了文学了。”([18] 第 41 页)

[8] 此猜想几乎同时也被彭比里 (Enrico Bombieri) 独立提出。

第一件事情是，由于和一般拓扑空间相比较，代数簇之间的态射不如拓扑空间之间的连续映射那么多，所以需要扩大 $\mathcal{V}(k)$ 的态射范围，具体地，就是将 $\mathcal{V}(k)$ 态射替换为 $\mathbb{Q}$ - 对应 (correspondence) 的等价类，这里的等价关系选取为最粗的，即数值等价 (numerical equivalence)。这样就得到的新范畴，记为 $\mathcal{CV}(k)$。 第二件事情是，由于 $\mathcal{CV}(k)$ 并不是阿贝尔范畴，而为了使 Motive 能诱导出所有的 l-adic 上同调，那么就希望能将 $\mathcal{CV}(k)$ 扩大改造成某种“近似的阿贝尔范畴”。这也就相当于要求这“近似的阿贝尔范畴”至少应该含有某些态射的核和余核。为此，格罗登迪克借用了当时马克斯 • 卡鲁比 (Max Karoubi) 在他的博士论文里刚刚提出不久的所谓的“幂等元完备化” (idempotent completion) 的想法。具体地讲，[9] 就是将投射算子（即幂等对应）的核与像都添加到 $\mathcal{CV}(k)$ 的对象中，这也称为范畴 $\mathcal{CV}(k)$ 伪阿贝尔化。这样就得到格罗登迪克的 Motive 范畴，记为 $\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$。

如此构造的 Motive 范畴不依赖于上同调且是半单阿贝尔的（这后来已被仰森 [U. Jannsen] 无条件地证实）。但是，现在的问题是，$\mathcal{M}_{\mathrm{num}}(k)$ 没有上同调实现。另一方面，如果我们预先固定一个魏依同调，然后在上述构造过程中，将 $\mathcal{V}(k)$ 态射替换为 $\mathbb{Q}$ - 对应 (correspondence) 的关于此同调的同调等价类，那么如此构造出来的 Motive 范畴 $\mathcal{M}_{\mathrm{hom}}(k)$，即同调 Motive 范畴，具有上同调实现，但是显然此范畴却依赖于预先选取的魏依同调。此外，如果采用有理等价关系 (rational equivalence)，[10] 则相应可定义出 Chow Motive 范畴 [11] $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$，其优点是不仅给出泛上同调，而且许多类似的上同调函子，如绝对 l-adic 上同调，德林 - 贝林森 (A. Beilinson)(绝对霍治 [Hodge]) 上同调等等，都可以因子通过 (factor through) $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$，但是，“使用有理等价的明显的缺点是 $\mathcal{M}_{\mathrm{rat}}(k)$ 不是（甚至也不能猜想是）阿贝尔范畴”。([20]) 为了摆脱这种困境，格罗登迪克提出了著名的猜想：**数值等价等于同调等价**。但令人深感遗憾的是，这个猜想至今仍是不可接近的。

[Motive 的深层结构] 在曲线情形的魏依猜想的证明中，魏依的主要想法是引入曲线的雅可比并将其用作一阶上同调的抽象替代。这就是说，本质上曲线的 Motive 就是曲线的雅可比。从这种角度来看，正如克莱曼所说：“Motive 理论是格罗登迪克对魏依的想法的系统推广” ([20])，更确切地，如舒尔 (A.J. Scholl) 所说：“格罗登迪克引入 Motive 的一个原因就是将其看作是曲线的雅可比的高维类比。”([21]) 但是，尽管如上所述 Motive 的作用相当于我所期望的抽象的有理上同调，正如克莱曼指出的，“Motive 上同调比抽象版本的有理上同调含有更多的信息”。实际上，格罗登迪克探索了 Motive 的更多的“深层结构”。对应于被 Motive 实现的上同调环的分次结构，格罗登迪克推想 Motive 应该隐含着一种类似的分次结构。为此，他提出了另一个著名猜想，即：**每个 Motive 都应该有一个直和分解，并且通过这分解的直和项可以实现出已给空间的所有阶数的上同调**。不仅如此，后来荷兰数学家穆勒 (Murre) 甚至认为 ([1])，格罗登迪克所猜想的关于（数值）Motive 的分解对 Chow Motive 也应该正确。由此，从直和项中应该进一步读出“皮卡簇”、“阿尔本尼簇”等更深入的信息。这些信息可以看做是 Motive 的“深层结构”。这个猜想与上面提到的猜想合在一起就构成了所谓的“格罗登迪克的梦想”。这个梦想可由“标准猜想”导出。但是，令人不无遗憾的是，格罗登迪克在试图证明“标准猜想”时，遇到了技术上的困难。最严重的问题是：“如何构造足够多的代数闭链。”“标准猜想”至今也未被证实，所以，格罗登迪克的梦想至今也就未能实现。但是，正如“在他关于他数学工作的简短回顾中，格罗登迪克写道，构成它的精华和力量的，不是大的定理，而是‘想法，甚至梦想’”。([13])

[Motive 的实现] 由上所述，人们自然不能再期望 Motive 能像在代数拓扑中那样诱导出所有的 ℓ -adic 上同调，那么 Motive 是如何把所有的 ℓ -adic 上同调都“诱导”出来的呢？这也就是相当于问，Motive 与 ℓ -adic 上同调的关系是什么？这正是 Motive 理论中最奥妙和最出人意料的部分。Motive 与上同调关系就是所谓的“实现” (realization) 关系！格罗登迪克的 Motive 的全部意义就体现在这“实现”关系中。那么，什么是“实现”？ 对此，我们前面所引述的曼宁关于 Motive 的“实现”的描述是极为精辟的：**“为了保持 Motive 的生命强度，显然实现应该是一个函子。”**([6]) 也就是说，Motive（范畴）是通过函子实现为上同调群（阿贝尔群范畴）的，更具体地说，Motive 的结构和 Motive 间的关系（即态射）通过函子被投射到上同调群上去，也即，函子保持了 Motive 的“生命强度”。

用更为哲学的话来说，Motive 的实现就是对 Motive 的性质的显现。Motive 是很形式化的东西，对其我们所知甚少。

---

[9] 2011 年春天，在南京大学举办的“代数 K- 理论及其应用国际会议”期间，笔者曾经就此事请教了马克斯 • 卡鲁比教授。会议之后，卡鲁比教授给笔者写下了这段史实：When I started to write my PhD thesis in 1964/65， I showed the first version of it to Grothendieck since I was visiting the IHES very often at this time. He then learned from me this notion of “idempotent completion” which I used to define the category of vector bundles. More precisely， the idempotent completion of the category of trivial vector bundles is the category of ALL vector bundles (on a compact space or a topological space of finite dimension).

[10] 熟知有：有理等价 ⊆ 同调等价 ⊆ 数值等价。

[11] Chow 即指杰出的现代数学家、代数几何学大师周炜良 (1911-1995)。

但是，Motive 有很多实现。正如法国数学家苏雷 (C. Soulé) 所说 :“Motive 也可以被‘实现’为伽罗华表示、霍治结构和模形式。许多最深刻的猜想（泰特猜想、霍治猜想、朗兰兹 [Langlands] 猜想）本质上即是说 Motive 的这些表示都是忠实的 : 在 Motive 的表示上看到的性质对 Motive 本身也是对的。”[12] 也就是说，我们恰恰是通过 Motive 的不同“实现”来把握 Motive 的，或者说，来侧显出 Motive 的性质。同时，这也告诉我们，通过这些实现，Motive 理论和数学中公认的最重大的问题联系在了一起，也就是说，Motive 理论位于现代数学的中心地带。这也是为什么 Motive 理论会受到普遍的关注的原因。

现在，如果我们把格罗登迪克的 Motive 及其实现的关系总结起来，就会得到如下诱人的图形 :

$$\begin{tikzcd} & \text{Motive} \arrow[dd, "\text{实现（函子）}"] \\ \text{空间} \arrow[ur, "\text{Motive 函子}"] \arrow[dr, "\text{上同调函子}"'] & \\ & \text{上同调} \end{tikzcd}$$

关于这个图形的理解还可参见文献 [22]。

4. 塞尚的母题

现在，我们转向分析塞尚的母题。我们是通过分析格罗登迪克的 Motive 及其实现来把握 Motive 的。同样，与其说我们要分析的是塞尚的母题，不如说，我们要分析的是由塞尚的母题及其实现所构成的不可分割的系统，实际上，这相当于说，我们要分析的是整个的塞尚绘画艺术。然而，塞尚的艺术深刻而复杂，要想用如此几页纸来全面地论述塞尚的艺术，不仅不合理，而且也不现实。实际上，我们在此所要做的是，在弗莱的名著《塞尚及其画风的发展》中所给出的基本的概念框架下，[13] 将其他相关研究进行综合，对塞尚艺术给出一种概括的本质上属于形式主义的分析，这其中包含了笔者对塞尚艺术的一些探索性的看法。

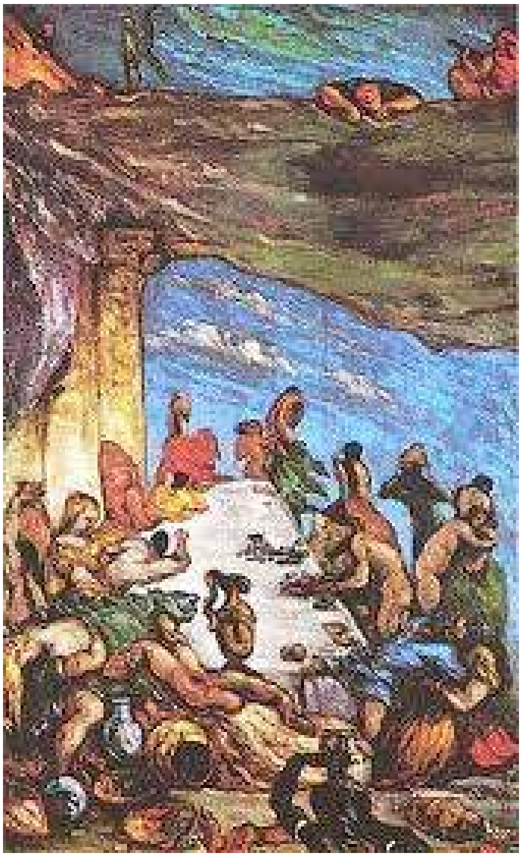
[1872 年的转折] 塞尚的艺术是一个历史的概念。在不同的时期，塞尚的艺术风格有很大的变化。一般认为，1872 年以前属于早期，1872 年到 1880 年属于印象派时期，1880 年到 1890 年属于成熟时期，1890 年以后属于后期，其中，公认的转折点是 1872 年。因为，在此之前，按照弗莱的说法，塞尚的“视觉和理解力都还因为浪漫狂热而受蒙蔽，他还来不及消化伟大的巴洛克画家的景观给他带来的狂迷”，([8] 第 73 页)“在所有的作品里，他都想要实现内心视觉”。([8] 第 27 页) 用梅洛 - 庞蒂的话说即是，他“注重表现出动作的精神状态而不是其可见外表”。([11] 第 43 页) 因此，他“从来没有以一种耐心而又专注的眼睛打量过实际生活”。([8] 第 75 页) 而在此之后，在毕沙罗 (Camille Pissarro) 的教导下，塞尚“渐渐从他那想要以辉煌灿烂的浪漫主义的著名大师，以绚丽夺目、摄人心魄的幻想艺术的创造者的风暴来征服世界的年轻梦想中醒来。……他终于开始利用他的真实天赋，亦即对不管什么样的现象的实际视觉反映的那种异乎寻常的感受力”，([8] 第 71 页)“耐心彻底地分析大自然呈现在……眼睛面前的色彩感知的织体”。([8] 第 77 页)“从这一刻开始，‘母题’，亦即来自可见世界的概念，在他不知疲倦的精力中占据了越来越大的比例。”([8] 第 76 页)[14]

我们在此将要论述的塞尚艺术是泛指塞尚成熟时期的艺术，特别是，我们更关注他在晚年的信件中所表述的艺术观念。我们这样做的原因在于，塞尚在艺术中想实现的最终目标从各方面来说都不是一个开始就在实践意义上完全清楚的东西。一方面，如梅洛 - 庞蒂所说“他的作品只是对绘画的不断尝试和不断接近”([11] 第 40 页)，另一方面，如“现代主义的设计者和机智的操纵者”格林伯格 (Clement Greenberg) 所说 :“他内心深处对于自己的画要走向何方又是多么不确定。”([23] 第 57 页) 他只是“如同祭司一般”的全部皈依，在不懈地探索中缓慢成长的，直到晚年，塞尚的思想才慢慢变得清晰起来。

[12] 2002 年 10 月 24 日苏雷给笔者的信件。

[13] 学者沈语冰在文献 [17] 中给出的疏理使得弗莱的概念框架变得更为清晰，此疏理构成了笔者论述的基础。

[14] 我们还应该注意到塞尚艺术风格变化的连续性。实际上，塞尚的画风从来都是不稳定的，同一个时期会有许多不同的画法。在 1872 年以前的作品《劫持》中，我们看到的是普桑 (Nicolas Poussin) 的《阿卡迪亚的牧人》中的那个给人印象深刻的结实的脊背，而在《汤豪泽序曲》中看到的那种近乎平面效果，很难说就一定是巴洛克风格。1872 年以后，塞尚的艺术呈现出了“以色造型”的特点。这可用《松石图》来说明。当长时间地注视该画时，就会发现画面中纠缠在树叶、树枝周围和天空之间初看似乎有点纷乱的蓝色会产生生动的景深效果，这是纯粹的色彩效果，并非由素描造型所致。因为，如果把该画拍成黑白照片，就会发现，由那些蓝色产生的景深效果会立刻消失。1872 年以后的发展在许多方面都是过去孕育的观念的明确化及内在逻辑延伸。实际上，我们在塞尚的许多早期作品中能感受到画面的“浮雕感”。在《宴会》中，看到人物的失真，桌面中央的黄色花瓶和左下方的蓝色花瓶明显的不合透视。在更早的作品《春》中，画面右上方的大花瓶也是明显的不合透视。这种变形显然是因为考虑到了画面的和谐。弗莱也注意到，印象派“这个团体中更伟大的心灵 (指塞尚—笔者注) 一开始就试图从这些经验中描绘出崭新结构的基础。”([8] 第 47 页) 既然是从“一开始就试图从这些经验中描绘出崭新结构”，人们自然要问：这些“崭新结构”自何而来？其实，塞尚几乎很少有纯正的印象派作品，这显示了 1872 年以前的艺术风格的内在力量。



宴会（塞尚，1870 年）

松石图（塞尚，1897 年）

劫持（塞尚，1867 年）

汤豪泽序曲（塞尚，1869-1870 年）

[母题] 我们先来看什么是母题。这个概念的含义在不同的领域中有一些细微的差别，但是，大致上来说，它的意思是：一个反复出现在作品中的东西。相对于主题来说，母题更具有一种客观性。而我们在这里理解的塞尚的母题也称为“自然母题”，就是那些经常出现在他的作品中的东西，譬如，风景、人物肖像、静物等，也就是说，本文所论述的塞尚的母题，可理解为可见世界的一组视觉对象。塞尚的最典型的母题是圣维克多山、苹果、骷髅、花束等。塞尚总是“寻找最适合他的绘画才能的”自然母题。在学者夏皮罗 (Meyer Shapiro) 看来，塞尚对其自然母题的选择是有其他目的的，譬如，对塞尚来说，苹果母题有着心理层面的含义，它象征着女人体。([9] 第 163 页) 另外，“基于对选择静物的意义的特别关注，夏皮罗提出由于组成静物的物体可以在现实中自由安排，它们与一种艺术自由的认识相关，”([2] 第 250 页) 进而，这种坚持自己作为一个独立作者的权利带有社会解放和政治独立的寓意。([2] 第 142 页) 本文不打算深化这方面的讨论。我们的主要关注点是，塞尚的母题是如何实现的。

[母题的实现] 首先，实现是“塞尚用来形容其艺术最终目标的术语”。([8] 第 14 页) 德国学者库尔特 • 巴特 (Kurt Badt) 认为，塞尚“将（实现）视为普遍存在的东西，也是他的最高目标”。([24] 第 41 页) 从字面上来看，“实现”的意思是“真实化”或“使成为真实”。实际上，母题的实现含有两层意思。一层意思是存在论意义上的，即母题的实现是存在的一种艺术形式的显现，是“是 (being)”的艺术形式，也即将存在显现为一种艺术的真实。用梅洛 - 庞蒂的话说就是：“把存在着的表现出来。”([11] 第 49 页) 另一层意思是实践意义上的，即“实现”即是将从视觉对象中感知的东西具体变成画布上真实的艺术作品，也即“赋予已知材料一种有形的意义”。([11] 第 55 页) 按照巴特的说法，“实现”就是对美的感知和赋予美的感知以具体而符合其特定艺术规则的形式。([24] 第 42 页) 这其中包含着对自然的深刻体味，在现实中提炼物象和将它们表达于画布上。简言之，实现就是外化或物化对母题的视觉领悟。问题是：如何赋予视觉领悟一种艺术形式？

塞尚不是一个自然主义者。在他眼里，视觉现象是混乱的。他要将视觉混乱纳入一种秩序，因此，他对母题的感知就不像在印象派同行们眼中那样的被动。但是，塞尚也不是一个主观主义者，他并不凭着主观随意想象母题，特别是，在画风景和静物时，他需要实实在在地“客观地观察”自然母题。[15] 在弗莱看来，这是由于在塞尚“面对既定场景”时会显得更为丰沛而有创造力，而在面对空白画布时似乎会显得一筹莫展。([8] 第 199 页) 实际上，有时候，如果写生条件不便，塞尚宁可改画前人的作品，也不自己信手画来。这或许还与他传统意义上造型功夫的不足有关。但是，塞尚的“客观地观察”并不是字面意义上的，他同时要尽可能排除那些可能产生幻觉的自然现象，如空气中的烟雾、某些光线效果等等。也就是说，所谓的“客观地观察”只是一种艺术态度，实际上其更意指主体的意向性对对象的意向侧面的指向。此外，这还与只有面对真实对象才会有的对象的充实性有关。问题是：塞尚的意向性指向是什么？

[以自然让普桑复活] 从骨子里说，塞尚是一个古典主义者。他“崇敬法国的古典主义艺术传统——这首先可以以普桑作为例证，他崇拜古典传统的明晰性、复杂性、巧妙性、杰出和细腻的表现方式以及对个别而偶然事物的轻视”。([25] 第 17 页) 但是，塞尚也深知古典传统的不足，“他知道，引进被法国古典主义艺术传统遗漏的东西，扬弃被古典传统肯定了的东西，这两者都是他的使命”。([25] 第 18 页) 塞尚的疑问是：“我们真的”像古典传统“那样看待世界吗？还是绘画本身还存在没有被探索过的东西呢？”正如拉塞尔 (John Russell) 所说：“这些就是塞尚在他最后二十九年的油画作品里要问和要回答的问题。”([25] 第 18 页) 那么，在塞尚眼里，什么是“古典传统遗漏的东西”即绘画中还“没有被探索过的东西”呢？古典主义作品并不缺乏结构，但是塞尚认为古典主义艺术缺乏一种对视觉对象的基于客观观察的领悟。他认为“艺术不和自然接触便不能有所发现”。([12] 第 61 页) 另一方面，作为印象画派团体中的一位元老，塞尚认为，印象派画家们笔下虽然不乏丰丽而震颤的色彩，但是他们画得太过分外表了，画得仅仅是母题的外表印象，缺乏对母题的感受理解和领悟。塞尚意识到了“莫奈在其作品中所追求的全部消灭质量感和牺牲局部的背后隐藏着的危险”。([12] 第 88 页) 因此，塞尚想做的就是“在莫奈的这些画里，一切事物流失的地方……插入一份坚固、致密的结构”([18] 第 53 页) 即“探索在色彩外表背后的物体的组织本身”。([12] 第 91 页) 从而“从印象派风格中找出一些颠扑不破，长盛不衰的东西”。([18] 第 52 页) 也就是说，塞尚要将印象主义的方法和古典主义的方法结合起来，“以自然让普桑复活”。([12] 第 88 页)

[意向性指向] 但是，试想一下，如果我们果真把印象派和古典派的方法结合起来，那么画出来的作品会是什么样子呢？那或许是“以自然让普桑复活”，但是，有一定绘画实践经验的人会感觉到，那似乎并不是我们从塞尚的作品中所看到的绘画效果。塞尚所画的似乎并没有他所说的“胃口”那么大。塞尚的作品既没有古典主义作品的造型精确性，也没有巴洛克大师们的深度感，更没有那些足以引起错觉的如烟雾等诸多东西。换句话说，塞尚似乎不像过去的大师那么“全知全能”，他想表现的似乎没有那么多，他也无意将他面对的东西的方方面面都画出来。他感兴趣的似乎只是视觉对象的某些方面。如果我们勇于直面塞尚的作品的话，会发现，在塞尚的作品中，我们到处都能实实在在地感受到的是由色彩构筑出来的结构感、可触感和浅度感。塞尚的作品开掘的似乎不仅不是深度空间，反而是“在想象的触觉中显得凹凸不平”([2] 第 155 页) 的浅度空间。如果做一个形象比喻的话，那么塞尚的画面就是“色彩浮雕”。因此，笔者认为，**塞尚的意向性的主要指向是视觉对象的可触性结构**。并且，这种意向性的结构指向将最终导致画面的物理性。如此说来，塞尚实际上是用印象派的色彩来构筑或提取普桑的画中的可触性结构。因此，与其说塞尚要实现的是母题，不如说他要实现的实际上是母题的结构。那么，塞尚如何实现母题的结构？

[圆柱形、球形与圆锥形] 1904 年，塞尚在给画家爱

[15] 但是，画肖像时不是摆姿势时画的，而是摆过姿势以后画的，这是塞尚一生尊奉的手法。([12] 第 18 页)

米尔•贝尔纳 (Emile Bernard) 的一封著名的信件中写道:“**请允许我重复我在此对您说的事情：请借由圆柱形、球形与圆锥形来处理自然，……**。”([26] 第 271 页) 也就是说，塞尚要用“圆柱形、球形与圆锥形”这些最简单最基本的几何形状来“处理”自然。应该如何诠释和理解塞尚的这句名言是塞尚研究中的核心议题之一。

塞尚的这句名言之令人费解的很大原因在于，人们并不能找到或者说实际上塞尚并没有通过“借由圆柱形、球形与圆锥形来处理自然”完成的具体作品。塞尚显然知道，从严格的字面意义上讲，仅凭这三种形体在传统绘画意义上是处理不了自然的。那么究竟该如何具体理解这些“圆柱形、球形与圆锥形”呢？ 对此，弗莱给出了较为可信的解释。弗莱认为，这句话的真实意思是：在塞尚“**对自然的无限多样性进行艰难探索的过程中，他发现这些形状乃是一种方便的知性脚手架，实际的形状正是借助于它们才得以相关并得以指涉。……他对大自然形状的诠释几乎意味着，他总是立刻以极其简单的几何形状来进行思考，……**”（[8] 第 96 页）也就是说，弗莱认为这些“圆柱形、球形与圆锥形”具有弦外之音，是“一种方便的知性脚手架”，意指更多的“极其简单的几何形状”。艺术史学者高英爵士 (Sir Lawrence Gowing) 也注意到了塞尚的这种说话习惯：“对塞尚而言，自他年轻时就对词与玄外之音很敏感”。([17] 第 17 页) 我们顺便想插问的是：塞尚为什么会用“圆柱形、球形与圆锥形”作为象征？亦即，塞尚为什么要把客观的视觉对象归为简单的几何形状？我们认为，这与西方人自古希腊以来的几何学传统有关。

[几何学传统] 古希腊人偏爱几何学，并且总是将理性的几何与美联系在一起。“如果他们赞美一位妇女或其他人和动物的美丽，他们就用菱形、圆、平行四边形、椭圆和其他几何术语来描绘，……”即使在御膳房，他们也“将大块大块的肉切成各种圆形……”([3] 第 37 页) 特别是，在古希腊人眼中“圆锥体、球体与圆柱体”是承载着美的形式的不平凡的东西。实际上，“一块被发现……并于 1809 年出版的古希腊铭刻上，即清楚地记载：‘圆锥体、球体与圆柱体是神圣之物，其并提供可人的形式。’”([24] 第 55 页) 我们不知道，塞尚是否知道这块古希腊铭刻，但是，塞尚显然被这些承载着简洁的美的形式的“圆锥体、球体与圆柱体”所吸引。不仅如此，塞尚的话自然还会让人联想起柏拉图在《蒂迈欧篇》中曾详述的一个如何从 5 种所谓的“柏拉图体”几何地构建起物理世界的故事。([3] 第 46 页) 在柏拉图看来，“神也会运用这些图形”，因为“上帝永远是按照几何学原理工作的”。([3] 第 77 页) 与东方人将几何乃至整个数学仅仅看成一种实用“术数”不同，在西方人看来，人正是通过几何学“使精神超脱于对世俗的思考”，“使灵魂趋向于真理，进而创造出哲学精神”，以通达哲学的最终目的——善的理念。([3] 第 32 页) 因此，几何学是希腊乃至整个西方文明的传统和基石，从各个方面都影响着西方人的思维方式和行为方式。正如克莱因所论述的：

“欧几里得几何的创立，对人类的贡献不仅仅在于产生了一些有用的、美妙的定理，更主要的是它孕育出了一种理性精神。人类任何其他的创造，都不可能像欧几里得的几百条证明那样，显示出这么多的知识都仅仅靠推理而推导出来的。这些大量的、深奥的演绎结果，使得希腊人和以后的文明了解到理性的力量，从而增强了他们利用这种才能获得成功的信心。受这一成就的鼓舞，西方人把理性运用于其他领域。……甚至在希腊人中间，数学也被看作是所有科学的标准，亚里士多德特别强调，每一门科学都必须像欧几里得的几何学一样，通过一些适用于这门科学的有效方法，确立几条基本定理，从这几条基本原理中，以演绎的形式推导出真理。在柏拉图学院的门口，写有这样的箴言：‘不懂几何者不得入内’，这典型地反映了他们对待数学的态度。”([3] 第 53 页)

作为在中学时代曾经因为数学获过奖的塞尚，虽然未必就一定喜欢几何学内容本身，但是，“天赋予塞尚伟大的知性”，([12] 第 94 页) 因此，几何式的理性语言所蕴涵的传统精神力量对他具有潜在的吸引力。与根植于北方的浪漫主义传统的画家梵高 ([27]) 完全不同，塞尚的话给我们呈现出一种逻辑演绎的意象，他像是要用他的“圆柱形、球形与圆锥形”所意指的“极其简单的几何形状”作为基本“公理”，构建一个“绘画演绎系统”，以演绎出他的“绘画几何学”。如同科学家们用纯粹数学来理解和处理客观世界一样，塞尚像是要用他的“绘画几何学”来译解或“处理”他的艺术世界。似乎，这样我们才能理解内置于塞尚诸多作品中的“一种恒久地趋向于最简洁与合逻辑关系”([8] 第 92 页) 的冷峻的几何结构力量，以及由此所折射出的理性精神。后来的立体派画家们或许正是从塞尚的作品中看出了这种精神。

[贡布里希的解释] 学者沈语冰的文章提醒我们应该将弗莱观点与贡布里希的观点对照考察。([17] 第 8 页) 贡布里希是继温克尔曼、布克哈特、沃尔夫林和潘诺夫斯基之后的第五位伟大的艺术史学家。他认为，塞尚的这句名言“跟塞尚年轻时法国学校里通行的艺术教学类型有关，他希望把那种艺术教学类型传授给他的年轻的崇拜者”。([10] 第 224 页) 按照这种教学类型，“世界是由具有多样化的永久感觉性质的实体组成。山毛榉的叶子‘是’小的、菱形的、鲜绿色的，远山‘看起来’是青色的。艺术家的任务就是把形象一直分析成这些性质，然后尽其绘画手段之所能给它们寻找匹配物”。([10] 第 224 页) 如果说，弗莱的解释在于

强调“圆锥体、球体与圆柱体”在塞尚作画中的统摄作用，那么贡布里希的解释似乎在于强调“圆锥体、球体与圆柱体”的分节作用。但是，贡布里希的解释似乎更意在用此说明他的图画再现的一般理论，因此只解释了塞尚的名言的一个侧面。

实际上，塞尚总共写给贝尔纳 9 封信，上面提到的信件是第一封。当时，贝尔纳已 36 岁。贝尔纳既是画家、作家也是理论家。或许由于这个原因，能看得出，塞尚写给贝尔纳的信件的语言和态度都比较严肃认真。或许，这也是为什么塞尚对后世有着巨大影响的话语大多出自给贝尔纳的信件。总之，塞尚面对的不是一个初学者，而是一个有着独特风格和独立艺术主张的成熟的画家。如果说这时塞尚只是给贝尔纳传授早年法国学校里通行的艺术教学类型，似乎有点不合情理。就在这第一封信中，塞尚还写道：“我再次看了你在工作室一楼所作的习作，相当好。”[16] 其实，塞尚对贝尔纳的作品并不欣赏，原因在于贝尔纳的作品中由于长期与高更和梵高交往而充溢着一种脱离自然的平面风格，而“塞尚对于高更那种‘中国绘画’般的平面作品、梵高那种癫狂的绘画之重要性不认同”。([26] 第 271 页) 塞尚继续写道：“我想，您只要顺着这条道路走就可以了，……，您不久终将从高更、梵高抽身而出。”([26] 第 271 页) 塞尚的目的显然是希望贝尔纳能像自己一样面对自然母题，[17] 注重结构。塞尚在后来给贝尔纳的信中写道：“新印象主义（指高更和梵高——笔者注）以一条黑色线试图决定轮廓，这种缺点必须全力排除。如果参考自然的话，就能获得达到此一目的的手段。”([26] 第 282 页) 因此，我们认为，塞尚的那句名言不仅有着艺术教学意义，更重要的是，还有劝说目的，甚至是“攻击”高更和梵高的利器。由此折射出他的话语本身的深层含义以及在他心目中的重要性和特殊性。

[塞尚的工作方式] 这就迫使我们进一步追问：塞尚是如何用这些“圆柱形、球形与圆锥形来处理自然”？弗莱解释了塞尚的处理方式。弗莱写道：**“呈现在艺术家视觉中的实际对象被剥夺了那些我们通常借以把握其具体存在的独特特征——它们被还原为纯粹的空间和体积元素。在这个被简化 (abstract) 的世界里，这些元素得到了艺术家感性反应中的知性成分 (sensual intelligence) 的完美重组，并获得了逻辑上的一致性。这些经过简化的东西又被带回到真实事物的具体世界，但不是通过归还它们的个别特性，而是通过一种持续变化和调整的肌理来表达它们。它们保持着删拔大要 (abstract) 的可理解性，保持着对人类心智的适宜性，同时又能重获真实事物的那种现实性，而这种现实性在一切简化过程中都是缺席的。**”([8] 第 134 页) 弗莱这里说的这些“纯粹空间和体积元素”显然即是“极其简单的几何形状”，结合前面弗莱关于“圆柱形、球形与圆锥形”的论述，即知这些“纯粹空间和体积元素”也就意指带有象征味道的“圆柱形、球形与圆锥形”。在继续我们的讨论之前，我们需要先指出两点。

首先，弗莱这里的“纯粹空间和体积元素”与贡布里希的图式具有类似性。贡布里希说：“图式并不是一种‘抽象’(abstraction) 过程的产物，也不是一种‘简化’(simplification) 倾向的产物；图式代表那首次近似的、松散的类目 (category)，这个类目逐渐地加紧以适合那应复现出来的形状。”([10] 第 51 页) 但是，应该特别指出的是，通过用词 abstraction 可以看出，弗莱的“纯粹空间和体积元素”与贡布里希的图式并不等同。贡布里希的图式是用于“揭示图画再现的一般规律”，而弗莱的纯粹空间和体积元素，如沈语冰所说，是用于“揭示……塞尚独特的工作方式”。([17] 第 9 页) 进而，“纯粹空间和体积元素”和“图式”之间的差别还在于还原程度上的差别。如果说“图式”是还原为过去已知的图像类目，那么“纯粹空间和体积元素”即是还原为构成图像类目的本身没有独立图画意义的也即“抽象的”造型元素，这很类似于微小的物体与原子分子的区别。笔者认为，对“图式”的重组是有限度的，正是这种“纯粹空间和体积元素”才埋下了弗莱所说的“被完美重组”乃至立体派的重组方式的可能性。由此及弗莱的话的上下文，我们可以看出，弗莱的论述中的 abstract 应该理解为“抽象”、“抽出”的意思，这也是该词主要的字典意思。这似乎与塞尚的工作方式中的区别性特征有关。

其次，虽然在塞尚的作品中，找不到像毕加索的《裸妇》(Female Nude，1908) 那样几乎完全“借由圆柱形、球形与圆锥形”来完成的具体作品，但是，塞尚的作品中到处充溢着日益增长的几何式的结构却是不争的事实。我们的关注点是，这些几何式的造型特征不只是出现在作画的开始阶段和中途，而是一直被保留到作品的完成。这就说明，在塞尚的工作过程中，这些“圆柱形、球形与圆锥形”并不是通常只出现在图画再现过程的初始阶段的图式。因此，与其说它们是塞尚工作中的“知性脚手架”，不如说是内置于作品中并同时有所外显的决定事物本质的某种基本支架或嶙峋骨架。换句话说，这些“知性脚手架”并不是“完工后会被拆卸掉”的纯然外在，而是随着作品的进度被逐渐地固化在作品中。虽然，通常我们并不能完全看到塞尚的这些“圆柱形、球形与圆锥形”，正像人身上的骨架，不用 X 光是看不到的一样，但是我们却能隐隐约约地感受到它的存在性。

[16] 1904 年，贝尔纳拜访了塞尚。塞尚为贝尔纳准备了工作室，使其得以画静物。([26] 第 271 页)

[17] 塞尚在此后给贝尔纳的信中反复地强调了这一点。

[视觉隐喻] 笔者认为，塞尚处理自然的方式本质上是一种视觉隐喻。“纯粹空间和体积元素”即“圆柱形、球形与圆锥形”及其组合是一些基本喻体，而所谓的“由圆柱形、球形与圆锥形来处理自然”即是一个视觉隐喻的过程。通过视觉隐喻，母题的结构得以显现出来。实际上，母题作为自在的视觉对象，其结构处于不明晰“未成形的”纠结状态。塞尚正是要在直接感受母题的基础上借助这些结构明晰的基本喻体透析出母题的深层结构。在特定的语境中这些深层结构是主体的意向所指向的本体结构侧面。在这个过程中，主体的意向不仅指向视觉对象，同时，在视觉对象的引导下也指向基本喻体。在特定的语境中，正是隐喻将基本喻体和主体意向指向的视觉对象的结构侧面进行连接，使其相互作用，才使得“未成形的”意向的结构侧面被侧显出来，也即将意向性指向的母题的深层结构从意向背景中“凸现”出来。

事实上，当我们将视觉中的一座山看成一个圆锥形时，山和圆锥形是完全不同的东西，能将它们连接仅仅是因为山的一部分“未成形的”不明晰的结构与圆锥形一部分“已成形的”明晰的结构具有一种相似性。隐喻通过以这种结构性的相似性为凝聚点将山和锥形连接起来。所以，当弗莱说：“纯粹的空间和体积元素”“又被带回到真实事物的具体世界”和“实际的形状正是借助于它们才得以相关并得以指涉”的时候，实际上正是在通过隐喻进行连接。当他说“以极其简单的几何形状来进行思考”时，正是，在隐喻中喻体和意向性指向的客体结构侧面的相互作用。因此，只有通过隐喻才具有把“纯粹空间和体积元素”与自然连接的可能性，只有在特定的语境中通过隐喻和意向性才能实现具体的连接。

[隐喻与直指] 与塞尚相比，塞尚以前的画家本质上对视觉对象具有直指性。实际上，过去的“画家都是使用基于自然的画稿或者着色的习作，在画室里画风景”。([12] 第 46 页) 如左拉说:“古代大师们的作品，表现户外风景都……不按实情，……”([12] 第 46 页) 也就是说在作画时，在许多方面，特别是在表现户外风景部分，几乎不需要指向一个当下的客观视觉对象，而是仅仅将“过去的”一些观看结果变成一些可反复套用的“想象中”的“公式”，也即贡布里希所说的“图式”。 这种作画方式表面上看起来具有主观性，但是，从绘画观念上讲，这些图式与当下直指的客观视觉对象的区别仅仅在于，它们是“已考察过的”，也就是“直指的过去时态”。古代大师的生动题材之下往往掩盖着一种在柏拉图“模仿”观念的驱动下对视觉对象的直指性。他们与塞尚的区别在于，在主体的意向性直指视觉对象的同时，不需要同时再主动地指向观念中抽象的喻体。因此，如果将塞尚与他的前辈们做一个简单粗略的概括的话，笔者认为，在我们所讨论的这种意义上，**塞尚的艺术是隐喻的，而塞尚以前的艺术是直指的**。其实，黑格尔对文体的风格也有过类似的区分，他曾指出：本义词占优势还是隐喻词占优势，是区分古代风格和近代风格的重要标志。([28] 第 126-133 页) 因此，从这种意义上讲，从塞尚开始，人的主观才通过隐喻的方式主动地介入艺术。犹如近代哲学史上笛卡尔的认识论主体性转向一样，这种主动的介入方式导致了现代艺术史上艺术语言的最伟大的转折。

[立体主义] 毕加索认为，艺术与自然是两回事。因此，立体主义者们的意向性指向便由客观自然对象转向表达“自然不是什么”的喻体本身。他们虽然“绝对没有放弃观察自然”，([29] 第 29 页) 但是却放弃了对自然对象的直指。正如为立体主义英勇辩护的法国诗人和作家阿波利奈尔 (Guillaume Apollinaire) 在他的素有立体主义的“圣经”之称的《美学沉思录》里写道：以毕加索为代表的“科学立体主义”艺术所绘制新的组合所用的素材与塞尚不同，“不是挪借于视觉现实，而是取自知识的现实”。([29] 第 22 页) 阿波利奈尔还写道：立体主义画家们并不打算当几何学家，但是“几何学对于造型艺术，正如语法对于写作艺术”。换句话说，立体主义画家们不是几何学家，但是他们的艺术语言中却内置着几何学法则。在这种意义上，立体主义似乎接近于一种“绘画几何学”。因此，立体主义艺术家们将塞尚的主体对客体的真诚而顽强的介入发展成为一场蔚为壮观的“伟大的主观艺术运动”。([29] 第 24 页)

[距离] 塞尚的意向性的结构指向引发了系列效应。首先是改变了距离的概念，从而也改变了空间的概念。处于空间中的视觉对象不仅有结构，还有对象之间的距离关系、明暗关系等等。表现这些关系需要动用各种手段，如造型、透视、光线、明暗、虚实等等。如果意向性仅仅指向视觉对象的结构，那么在主体的意向中，所有的对象原则上就处于同等的地位，也就是说，对象被置于一个浅度空间之中。在仅有结构的“空间”里，对象之间本质上是无所谓有什么距离的，至少不是普通的距离，有的仅是像浮雕一样的凸出和凹陷。这时所谓的空间本身也是对象，像美国现代抽象表现主义大师罗斯科 (Mark Rothko) 所说的“可触摸空间”，([30] 第 107 页) 即一种透明的胶状体，积压在对象之间。实际上，塞尚的作品向我们呈现的就是这种效果。如夏皮罗说过：在塞尚的画中，“好像所有的东西都被从同一个距离看到”。([2] 第 251 页) 格林伯格也分析道：塞尚的画的效果是“将整幅画的中心推向前，将其凸面与凹面挤压在一起，并威胁着要将表面的异质内容融化成一个单一的形象或形式，而形状正好与画布本身相一致”。([23] 第 63 页) 这也相当于说，画面在逼近于画布的物理表面。

郁金香的花瓶（塞尚，1890-1894 年）

但是，尽管如此，塞尚却并不打算像高更和梵高那样将他的绘画蜕变成中国画式的平面绘画。为此，塞尚强调所谓的“同一中心”，也就是说，要把物体的凸凹性强调出来。塞尚在给贝尔纳的第五封信中写道 :“在一个橘子、一个苹果、一个碗、一个头像之中都有一个最高点 ; 这个点……往往最接近我们的眼睛 ; 而对象的边缘则退却到我们视线的一个中心点上。”([7] 第 9 页) 也就是说，在每个物体中，塞尚抓住最接近我们的眼睛的那一点，这一点就是中心，物体从这一点开始后缩。这种观察方法影响着塞尚的用色方式。塞尚的用色有着相当的主观成分。在物体的退缩的边缘处使用冷色，随着笔触向物体中心点收拢，颜色一层一层地逐渐变暖，最后在中心点处达到极限。因此，塞尚所画的物体的中心处，颜色往往都是偏黄的暖色。对于不同的物体，塞尚基本上使用同样的手法，不同的“中心点”的颜色也都是偏黄的暖色。（难怪，曾经有人指责他用黄太多。）也就是说，这些“中心点”具有“同一性”。这种用色方式导致的结果是 : 伴随着对笔触效果的热烈强调，物体在中心点都可触性地凸了起来。

由此，我们似乎才能理解为什么塞尚反复强调“距离”的重要性，他说 :“一幅画中最重要的是找出距离。”([12] 第 128 页) 因为，距离影响着赋色，也就影响着作画的实际进程。在塞尚的作品中感受到的不是传统的距离，而是对象在局部或相邻处通过色彩的冷暖来实现的前后推拉，（如左图）也就是说，塞尚的绘画空间的“距离”不再是一个定常的概念，而是一个随着物体的结构而变化的东西，只有“流形”式的局部意义。因此，塞尚的绘画空间无论如何都不再是一个放置物体的空盒子，其只能在物体的边界处的前后推拉挤压的阻力中感受到。在塞尚晚年的作品中，不同对象的不同强度的色彩到处交织纷飞，“各个截面可以在画布表面与这些截面所创造的图像之间前后跳动，但是她们却构成了一个既是表面又是图像的整体”。([23] 第 64 页) 我们似乎可将其比喻为一种非阿基米德度量空间中的奇异性。下面的图形可以让我们感受一下艺术家眼中的 3-adic 圆盘的怪异。[18]

艺术家眼中的 3-adic 圆盘（A. T. Fomenko）

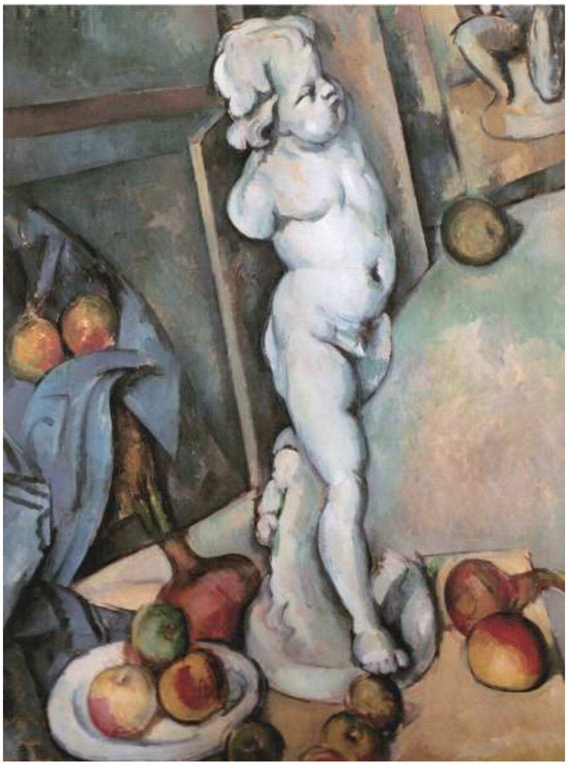
塞尚的意向性的结构指向导致的浮雕式的浅度空间致使塞尚在绘画实践上遭遇了对象边缘处理上的技术难点。 他的作品中的几种类型（大致有三类）的边线处理都是为了在这种被压缩了的空间中描绘对象的结构感，以阻止画面继续退变成中国画式的“没骨画”。塞尚晚年的作品中弱化了边线效果，但是许多方方的笔触仍起着一种分节的作用。[19]

[18] p-adic 圆盘中的任何一点都是圆心。

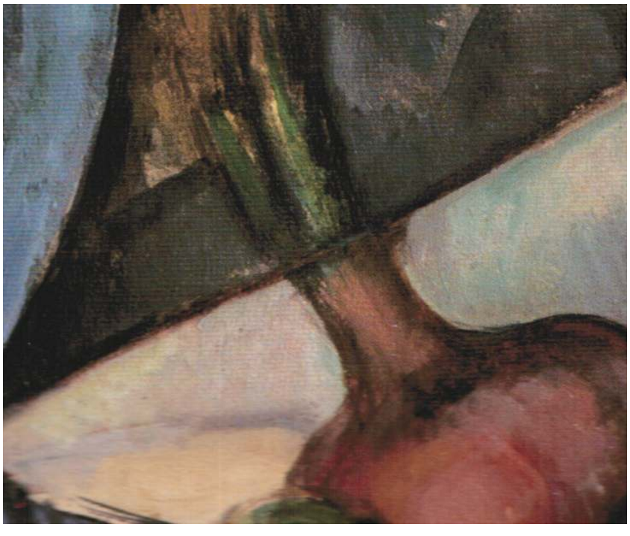
[19] 艺术史学家乔纳森 • 克拉利（Jonathan Crary）指出， 由于塞尚的注意力的变化 导致《松石图》里出现了明显的不和谐的“带形区域”。([31]) 我们认为，造成这种效果的技术上的原因就在于边线处理上的变化。对“带形区域”塞尚使用了以往的边线处理技术，而对其他部分，特别是画面背景中的大片树叶，塞尚放弃了这种处理技术。

[视觉悖论] 不仅如此，塞尚的意向性的结构指向在某些情况下还导致了不可避免的埃舍尔式的“视觉悖论”。实际上，塞尚的意向性的结构性指向以及其表现手法容易混淆不同层次的结构，也就是说，难以区分画中画出的结构和“画中画”中画出的结构，从而导致结构的模糊性，甚至悖论性。艺术史学家理查德 • 希弗 (Richard Shiff) 曾经分析过塞尚作品中出现的这种现象。([2] 第 135-180 页) 现在，我们来重复使用他分析过的例子。在塞尚的作品《葡萄酒杯和苹果》中，背景的墙面上贴着印有树叶的壁纸。(参见左图《水果》) 那么，“画家应当揭示壁纸这一材质的平面性，还是树叶的绘画性立体感？……塞尚选择了后者”，([2] 第 149 页) 也就是说，“一个平面的东西，一面贴有壁纸的墙，被表现为具有侵略性的三维物体”。([2] 第 147 页) 而在《爱神丘比特》中，画面左下方带图案的布，从前面摆放静物的桌子上很自然地延伸到了后面的“画中画”中，这布好像是从后面的“画中画”“流”出来的一样。另外，画中左边的洋葱也伸进了左边的“画中画”，使我们很难将“前面”的洋葱和“后面”“画中画”中的桌子腿区别开。这些是典型的埃舍尔式的“视觉悖论”。如果说希弗指出的这几点尚不能使我们断定结构的模糊性和悖论性是否是塞尚刻意所为，那么我们下面要指出的便清楚地揭示了塞尚的刻意性。从各方面来说，塞尚很都容易将《爱神丘比特》中“前面”的桌面与“后面”的地面区分开来。实际上，塞尚已用他惯用的“冷暖推拉”手法将桌面的右端和地面区分的很清楚，但是，当沿着桌面的边缘走到左边洋葱的位置时，这种区别就明显减弱，最终到达最左边的“画中画”附近时，桌面和地面就完全融在一起了，也就是说，我们可以用手从桌面无间断地直接摸到地面。如果说，这还仍不足以说明塞尚的刻意性的话，那么让我们来看看塞尚的更明显的举动。按说洋葱是在左边的“画中画”的前面，但是，从印刷较为清楚的《爱神丘比特》图片中能够看到，(见下图) 左边的“画中画”的底部的边线反而压在了洋葱的上面，也就是说，塞尚有意地用“画中画”的底部的边线截断了洋葱的上部，致使洋葱像是延伸到画框底下，而洋葱上端的绿叶却延伸到了“画中画”中。总之，结构彻底模糊不清。

水果（塞尚，约 1880 年）



爱神丘比特（塞尚，1895 年）



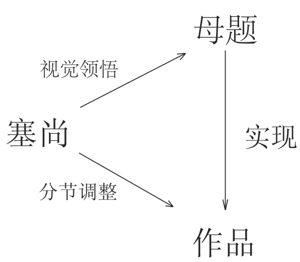
爱神丘比特（局部）

希弗和我们使用这些例子的目的有所不同。希弗使用塞尚画面的这种模糊性和悖论性来说明，在这种情况下，塞尚绘画中的隐喻[20]和字面意义合并成为所谓的转用(catachresis)，这迫使我们承认他的“绘画表面就以某种方式被字面化地解释为手可以穿过的平面”,([2] 第 168 页)“艺术家有意或无意地将注意力集中于他的手穿过画面的运动及节奏。这使得他可以合并他画室中不同距离、不同类型对象的形式，赋予这些形式一种‘字面化’的物理性”。([2] 第 168 页) 也就是说，希弗意在说明模糊性和悖论性所导致的结果。而我们的目的在于说明这些模糊性和悖论性的起因，即这是由塞尚的意向性的结构性指向引起的，并且塞尚有时有意加剧了这种模糊性和悖论性。综合起来即知，塞尚的意向性指向不仅导致了画面的结构性和可触性，最终也导致了画面向“字面化”的物理性的靠拢。

[分节与调整] 那么，塞尚是如何将他的视觉领悟即他的意向性指向的可触性结构具体实现在画布上的呢？也就是说，如何在实践意义上具体实现其母题的呢？按照弗莱的分析，概括地说，母题在画布上的实现是通过对母题的不断“分节”(articulation) 和不断“调整”(modulation) 来具体完成的。所谓的分节就是知觉对母题的离散化分解。从技术层面上讲，就是将视觉对象表面块面化以及视域的适当切分。而调整，用赫伯特 • 里德的话来说就是 :“调整一个区域的颜色，使它同邻近区域的色彩显得调和 : 亦即一种使多样性服从于总的统一性的连续过程。”([7] 第 10 页) 按照我们的理解，则是对意向性指向的视觉对象的结构侧面与喻体的组合之间相互作用的回应。客观母题总是连续的，只有通过离散化分解，也即只有“将任何母题的任何部分分解到最小的可传达的截面”，塞尚才能分析他的母题。([23] 第 62 页) 也就是说，由这些“最小截面”显现的意向性指向的视觉对象的结构侧面与喻体才具有进行隐喻连接的可能性，而“艺术家感性反应中的知性成分”才能对“纯粹的空间和体积元素”——喻体——进行形式的“完美重组”。但是，分节不是一次性完成的，所以视觉对象的意向的结构侧面与喻体之间的作用也就不是一次性的，这样母题的实现也就不是先将喻体的完美重组然后被一劳永逸地“带回到真实事物的具体世界”。因此，调整是持续的，而母题的实现是分节和调整持续地相互回应的结果。

[感受] 但是，塞尚的母题实现毕竟是以直接面对自然母题为基础，所以他的分节和调整最终是基于主体对母题意向的结构侧面的感受。然而，感受是非逻辑的。实际上，一个位于远处的对象给人的感受强度可能会远远超过一个位于近处的对象，一个小的对象或许会比一个大的对象更吸引人的目光。一个实际上是凹进去的东西可能给人的感觉却会是凸出来。塞尚曾经在相当长一段时间里画不了圣维克多山，他说 :“我根本不知道从何落笔，因为我像其他看山的人一样，把那阴影想象成是凹进去的，实际上它却是凸出来的，从中心部位向外散射着。”([18] 第 19 页) 而意向指向也是变化的。如果桌面上放着一个杯子，当你观看杯口时，你的意向性可能指向杯口是什么形状，如是否是圆的，而当你观看下端的杯底时，你的意向性可能会指向杯底是否平整，是否平稳地立于桌面。因此，感受和意向性的变化在某种程度上会引起距离的变化和物象在以和谐为宗旨的调整中的扭曲。例如，在塞尚的一些静物作品中，一些容器呈现明显的扭曲变形，口部倾向于俯视感而底部相比之下更趋向侧视感。[21] 总之，塞尚的调整并不总是畅通无阻的，许多时候不得不增加一些“无法将其等同于对象，但对于整体和谐来说又是必不可少的东西。”([8] 第 37 页)

将上述颇为漫长的讨论概括起来，我们就得到了与格罗登迪克的 Motive 类似的但实际上却是远为粗略的关系图形 :



南生鲁四乐图（陈洪绶，明代）

[20] 这里的隐喻是一般绘画意义上的，而我们前面所说的隐喻是与塞尚的特殊工作方式有关的。

[21] 弗莱注意到：“这种变形在早期中国艺术中是经常出现的，无疑遵循着与塞尚相同的直觉。”([8] 第 92 页) 实际上，在顾恺之的《列女图卷》、顾闳中的《韩熙载夜宴图》以及明代陈洪绶的《南生鲁四乐图》中与在塞尚的《高脚果盘》和《咖啡壶旁的女人》中出现的杯具显示着类似的变形处理手法。当然，这两种基于相同直觉的变形处理却未必有着相同的含意，或许仅仅是潘诺夫斯基所说的“伪形态变异”(pseudomorphosis)。([27])

咖啡壶旁的女人(塞尚，1890-1894 年)

5. 比较与随想

[想象力结构] 我们从格罗登迪克的 Motive 和塞尚的母题中分析出了两个类似的三角图形，也就是说在这之间似乎暗示着一种平行类似。然而，笔者深知寻章摘句这种文字游戏的危险。从根本上讲，这是两种完全不同的东西，是两种不同的语言，对应着两种不同的事物和不同的关系。前者是由特定的数学对象之间的关联呈现出的一种内在结构，后者则是主体、客体以及主客体相互作用的产物之间的外部关系。前者是一种理性结构，后者对应着审美及其外化的情感行为过程。但是，在这两个不同的东西之中却都存在着一种犹如弗莱所说的在艺术和科学之间所存在的"伟大的想象力结构"，([32] 第 53 页) 即两者都具有至少表面上相似的"对象——实现"结构。或许正是这种类似的结构构成曼宁将格罗登迪克的 Motive 和塞尚的母题在想象中进行隐喻式的连接的基础。

这种不同语言结构之间的外在比较即使从纯形式上看也并非像想象的那样因为缺乏内在联系而没有意义。按照科学哲学家波普 (Karl Raimund Popper) 的观点，不存在科学发现的逻辑。当面对茫茫的神秘未知之海，科学家们在很多时候往往正是通过这种隐喻式的比较而获得一种探索的启示。正如卡尔 • R. 豪斯曼 (Carl R. Hausman) 所说的，隐喻有时是激进创造性的。([2] 第 111 页) 事实上，格罗登迪克的轶事告诉我们，在他那些激动人心的数学研究的岁月里，他确实受到过类似的启示。杰克森在他的文章中论述了格罗登迪克在发现"topos"时所受到的类似启示。杰克森写道，格罗登迪克的工作和量子力学的伟大进展有着平行关系，在量子力学进展中，颠覆了传统概念，将点粒子用"概率云"来替代。而格罗登迪克在《收获与播种》中说"替代了以前可靠的物质粒子的这些'概率云'，很奇怪地提醒了我 topos 居于其上的难以描述的'开邻域'，它好像容易消散的幻影，包围着想象中的 ' 点 '。"([13]) 也就是说，在格罗登迪克探索 topos 的意义的过程中，却是与 topos 在结构上类似而意义完全不同的"概率云"之间的结构关系"很奇怪地提醒了"格罗登迪克。这个例子的重要之处在于，"概率云"是在格罗登迪克研究 topos 的过程之中，而不是在研究 topos 之后"提醒"了格罗登迪克。这表明，不同事物的结构及其类比在人们的思考和发现中使得完全不同的事物得以在深处进行连接，以实现一种结构对另一种结构的预示。这体现了人类想象力结构的共通性，也回应着一种不同知识之间的"扩散效应"。我们不知道，塞尚的母题是不是也"很奇怪地提醒了"格罗登迪克关于 Motive 的发现，但是，我们却知道，它确实"很奇怪地提醒了"像曼宁这样的 Motive 的阐释者。

[结构主义] 在上一节中，我们清楚地看到，塞尚的意向性指向的是母题的深层结构，他欲实现这种深层结构的真诚决心显示出，他是一个结构主义者。颇为有意思的是，类似地，格罗登迪克的意向性指向的是 Motive 的结构，并且他也是一个结构主义者。

对于格罗登迪克来说，"Motive——实现"本身就是一种数学结构，其中蕴含着一种"范畴与函子的精神"，体现了格罗登迪克是"通过发现数学对象间的联系来理解数学对象本身"的思想。如果说，过去是注重于数学对象自身，那么格罗登迪克则是更加注重于数学对象间的关系（也即对象间的态射），以及不同数学对象范畴之间关系的保持。格罗登迪克对于 Motive 感兴趣的原因，即他的意向性的指向，恰恰在于 Motive 理论中所隐藏的美丽结构。最能说明这一点的就是他关于魏依猜想的态度。对于格罗登迪克来说，他对 Motive 的兴趣要大于他对魏依猜想的兴趣。正如凯茨 (Katz) 所说的：在格罗登迪克的脑子里，"（魏依）猜想很重要是因为它们是那座反映了他想发现和发展的数学上的一些根本结构的冰山的一角。标准猜想的证明则可以更加清楚地显示了这些结构"。"事实上，他并不是靠对困难问题的挑战来推动自己。他感兴趣的问题，是那些看上去会指向更大而又隐藏着的结构。"正因为如此，1973 年，当数学家德林令人意外地通过绕开"标准猜想"而证实了魏依猜想的时候。

“格罗登迪克对这个证明的兴趣不如如果证明是用 Motive 的理论引起的兴趣。‘如果我使用 Motive 证明了它，他一定会非常兴奋，因为这意味着 Motive 的理论得到发展了，’德林评论道，‘由于这个证明使用了一个技巧，他就不那么关心了。’”([13]) 从更一般的意义上讲，这反映出了，作为法国布尔巴基学派的成员，格罗登迪克对布尔巴基学派的数学结构主义思想的继承。

事实上，对格罗登迪克来说，数学研究中最重要的是探求“隐藏在数学对象下的结构”。正如他在《收获与播种》中明确地写道：“如果说数学里有什么东西让我比对别的东西更着迷的话（毫无疑问，总有些让我着迷的），它既不是‘数’也不是‘大小’，而是型。在一千零一张通过其型来展示给我的面孔中，让我比其他更着迷的而且会继续让我着迷下去的，就是那隐藏在数学对象下的结构。”([13]) 格罗登迪克如同一个外星人。“他不是去将事情翻译成另外一种语言，而是直接用现代结构数学的语言来思考和叙述。”([13]) 杰克森曾经论述过一个生动的例子，描述了著名数学家曼福德 (Mumford) 感受到的抽象化的跃进的惊险。“在格罗登迪克哈佛的讲座上，……有一次他询问格罗登迪克某个引理如何证明，结果得到一个高度抽象的论证作为回复。曼福德开始时不相信如此抽象的论证能够证明如此具体的引理。‘于是我走开了，将它想了好几天，结果我意识到它是完全正确的。’曼福德回忆道，‘他比我见到的任何人都更具有这种能力，去完成一个绝对令人吃惊的飞跃到某个在度上更抽象的东西上去……他一直都在寻找某种方法来叙述一个问题，看上去很明显地将所有的东西都从问题里抛开，这样你会认为里面什么都没有了。然而还有些东西留了下来，而他能够在这看上去的真空里发现真正的结构。’”([13])

然而，或许真正令人惊讶的是，格罗登迪克在数学中的意向性指向，像塞尚一样，也具有一种单纯性，也就是说，格罗登迪克仅对数学中的结构感兴趣。像塞尚一样，对于意向性的指向之外的东西，几乎到了视而不见的程度。由此，所产生的“奇特性”几乎可以和塞尚的“视觉悖论”相媲美。这方面最生动的例子就是所谓的“格罗登迪克素数”。“在一次数学讨论中，有人建议格罗登迪克他们应该考虑一个特殊素数。‘你是说一个具体的数？’格罗登迪克问道。那人回答说是的，一个具体的素数。格罗登迪克建议道：‘行。就选 57。’那格罗登迪克一定知道 57 不是一个素数，对吧？”([13]) 但曼福德说：“完全错了”，也就是说，格罗登迪克并不知道 57 不是素数。曼福德将此解释为：格罗登迪克从来“不从具体例子来思考问题”。 而在我们的论述语境中，我们可以将此解释为：格罗登迪克的意向性仅仅指向数学结构，而 57 不是一个数学结构，只是一个孤立的数字。

[形而上学精神] 更重要的是，在格罗登迪克的 Motive 和塞尚的母题及其它们的实现中还潜藏着根植于西方人灵魂深处具有悠久历史传统的形而上学精神。

所谓的“形而上学”，也称为“第一哲学”。如果说各门科学是致力于发现特定种类事物的第一原则和原因，那么形而上学就是致力于对存在及其‘诸原则’和‘诸原因’的研究。因此，形而上学可以理解为：探究“终极实在”、“终极原因”和“终极意义”，这里的“实在”即事物的本质。而形而上学精神也就是一种不断地追问以不断地探究意义的精神，这种精神的特点体现在追问的无终止性，也就是说，意义体现在无穷的追问序列之中。正如黑格尔所认为的，这体现了个体的自由意识即自我决定和自我选择的独立性和对感性事物的超越的无限向往。而塞尚对艺术的探究，他的母题的实现正是体现了这样一种精神。

梅洛 - 庞蒂在他的名作《塞尚的疑惑》的开篇写道：“对塞尚来说，要画成一幅静物必须工作一百次，而画成一幅肖像画则要对人物的姿态改动一百五十次。因此，我们认为他的作品只是对绘画的不断尝试和不断接近。”([11] 第 40 页) 也就是说，在完成一件具体的作品过程中，母题的实现体现了具体实践层面上的一种顽强的追问精神。对塞尚来说，画画不是消遣艺术。如梅洛 - 庞蒂所认为的：“画画就是塞尚的世界，是他的存在方式。”也就是说，画画蕴含着塞尚人生的全部意义。因此“他往往不重视作品本身，有时毫不介意。他所关心的倒是自己想要达到的目的，诸如努力的阶段、进步的迹象之类”。([12] 第 95 页) 塞尚的艺术态度，如弗莱所说：他“想要达到对不同原理进行完美综合的决心，……阻止他重复自己，阻止他将绘画看作一种不断重复的表演。每一幅画都得成为一种新的探索，新的解决”。([8] 第 127 页) 对塞尚来说，任何具体清楚了的都不是最终答案，任何具体完成的作品都不是母题的最终实现。也就是说，他的母题的真正实现，也即作品的意义，体现在一个无穷追问的实践序列之中。梅洛 - 庞蒂写道：“当贝尔纳想把意义引回人类智慧，塞尚回答说：‘我转向 Pater Omnipotens(拉丁语：全能之父) 的智慧。’无论如何，他是转向一个无限逻各斯的理念或者其投射。”([11] 第 54 页)

另一方面，塞尚的母题实现，从根本上来说，是对“终极实在”的艺术显现，也即，塞尚的母题实现是要显现出一种“终极的艺术真实”。塞尚全部努力的目的在于，如台湾学者史作柽所说，“以其知现象之更深刻方法的反省上，设法去搭建起那一条人和现象背后之本体世界间的通路”，([33] 第 118 页)“这种意义和哲学或形而上学是那么的接近”，([33] 第 82 页)“称得上是一种绘画中之形而上学”。([33] 第 110 页) 如果我们用塞尚的母题“圣维克多山”来说明上面的图形所体现的精神的话，那就是：塞尚的“视觉领悟”中的圣维克多山是一座“终极圣维克多山”，而他所有关于圣维克多山的作品都是这座“终极圣维克多山”的不同“实现”。

在与诗人加斯凯 (Joachim Gasquet) 的对话中，塞尚吐露

了他心灵中对色彩世界的终极性表达的无限憧憬和深深向往：

“我终于开始被吸收在一个真正纯净而有彻底深度的世界里。其实这并非他物，它就是那一个我费尽了追求，并千方百计才得以获寻之色彩的世界。虽然当我精确而锐利地对真正的色彩而有所觉醒的日子里，它也着实令我痛苦过，但最后我终于深深地感觉到，我已有充分的能力，沐浴在它终极般之无限深刻的世界中，并无所保留地接受了它真正的洗礼。于是慢慢地，我开始和我的绘画成了一体之存在，并且我更活在那个彩虹般之大混同的宇宙之中。甚至每当我站立在我所选择之主题的面前，逐渐地开始失去了我自身之存在，而和它成为一体之共在者时，从此我梦去了。朦胧中太阳成了我遥远之他域的友人，它更在那里照射着我、温暖着我，它不但使我的愚笨再生了它无尽的成果，并且更使我以自己的成果，而和它共生共在地，开始成长在那一个天宇般之色彩的幻域里。”([33] 第 159 页) [22]

而格罗登迪克像迷一样呈现在人们面前的 Motive 及其实现则是以另一种颇为隐蔽的形式潜藏着一种形而上学精神。实际上，正像女数学家莱拉 (Leila Schneps) 所说的，最关键的问题是，格罗登迪克怎么会预见出 Motive 以及以如此令人意外的方式实现出所有的 ℓ-adic 上同调这样的结构呢？我们说“令人意外”并无夸张之意，Motive 这样的东西似乎确有点超出了常人的世界。格罗登迪克的数学风格特点恰恰是异常自然但却令人意外。实际上，即使连塞尔这样 20 世纪屈指可数的伟大数学家一开始对于“Motive”也是不知所云。正如莱拉注意到的“塞尔的回信并不热烈”。([34]) 塞尔写道：“很不幸，对于‘Motive’及其背后的形而上学，我几乎不能给出任何评论；……”([35]) 细心的莱拉还注意到，似乎连格罗登迪克自己也感受到了这种理解上的距离。实际上，在 1964 年 9 月 5 日给塞尔的信中，格罗登迪克“平静地”写道：“令 M 是一个 Motive，如果你愿意的话，你可以认为是基域 K 上的光滑射影概型的 l-adic 上同调空间。”莱拉说：“‘如果你愿意的话’这句话表明，在他自己的脑海中，只去考虑那些与 l 无关的基本性质，那是多么的远离实际的 l-adic 上同调，——他这么说是考虑到，怕塞尔或许不会随他步入如此陌生的地带。”([34]) 问题是，这究竟体现了格罗登迪克思想深处的什么东西？每当人们接触像 Motive 这样东西，总会使人感觉到一种崇高和至美，似乎总能感觉到，有一种神圣而崇高的东西，高悬在格罗登迪克头顶上的晴空，闪耀着圣 • 奥古斯丁式的永恒的理性之光，引导和启迪着格罗登迪克的思索。许多年以后，在他的《收获与播种》中，格罗登迪克道出了问题的实质，他认为他的 Motive 是一种具有终极意义的东西，他将 Motive“描述为‘**终极上同调不变量**’(ultimate cohomological invariant)，所有其他的上同调理论都是它的实现或者化身。”([13]) 换句话说，Motive 就像“佛”而各种上同调就是“佛”的各种“化身”，也就是说，格罗登迪克在上同调这些“化身”中，悟到了一种“佛性”即 Motive。同样的思想也体现在格罗登迪克对“概型”的论述中。格罗登迪克在他的《收获与播种》中写道：“‘概型’就是这样的魔术扇子，就如扇子连接很多不同的‘分支’一样，它连接着所有可能特征的‘化身’或‘转世’”。([13])[23] 因此，蕴涵在格罗登迪克的“Motive”中的实际上是一种追求终极意义的形而上学思想。这种思想显然也是继承了自柏拉图开始的精神传统，对柏拉图来说，具体的床是关于床的理念的实现。表面上看来，格罗登迪克的 Motive 只是一种数学结构中的具有特殊意义的对象，其所谓的“终极意义”仅仅是一种观念中的形式上的想象类比。但是，就像哥特式教堂的高高的塔尖一样，是有限的，不能通达天国，却反映了人们渴望接近上帝的挚诚。

我们认为，正是这种追求终极意义的形而上学思想导致了格罗登迪克的所有数学概念的最显著的特征：**异常自然**。这是蕴涵在人类知识中的一般特征。实际上，只有沿着看起来最自然的东西才能走向深入，才能构筑得更多更远。我们不能指望沿着不自然的东西能长久地走下去。因此，回溯“终极的”一定是自然的。

正所谓，追求终极的必然是孤独的。([33]) 或许，正是因为这种追求终极意义的形而上学精神，使得塞尚和格罗登迪克，尽管一个历尽磨难，一个尽得风流，却殊途同归，最终都选择了远离社交甚至远离社会的“形而上学式”的孤独。一个默默地隐居在养育他的故土埃克斯，艰难地继续着他的神圣艺术事业，在隐隐约约中望见了他那毕生期盼的“应许之地”；另一个则“消失在比利牛斯山中，在完全的孤独中生活”。([13]) 或许至今仍在继续着他那笛卡尔式的伟大沉思。

[母题、Motive 与上帝] 进而，在格罗登迪克和塞尚的“形而上学式”的孤独中，我们还能感受到一种几近宗教的精神。事实上，西方人正是生活在由亚里士多德的形而上学肇始，经由圣 • 奥古斯丁的诠释和托马斯 • 阿奎那的改造而最终成为关于上帝的哲学的历史悠久的精神传统之中。也就是说，在西方人的历史传统语境中，形而上学能够导致上帝

[22] 这里我们借用了台湾学者、诗人史作柽的诗一般夸张的译笔，好在原作者加斯凯也是诗人，在表述塞尚的艺术主张时有着明显的艺术夸张，而塞尚本人在谈起自己的艺术主张时恰好也有夸大其词的喜好，([8] 第 14 页) 一切可谓风云际会。虽然，在史氏关于塞尚艺术的随想 ([33]) 中不乏灼见，但是笔者认为，总的来说，其文学价值高于其艺术史价值。

[23] 应该指出，《收获与播种》是许多年以后写的回忆性作品，他后来的思想不可能不影响到他对往事的看法和回忆的表述。从有关格罗登迪克的回忆知，在后来的不长的一段时间里，格罗登迪克曾经信仰过佛教，而他的上述言论显然是受到了他的佛教兴趣的影响。

的哲学。 因此，我们也就不会惊奇，晚年“孤独究极”的塞尚和格罗登迪克都走上了通往上帝之路。

梅洛 - 庞蒂认为，塞尚“履行宗教仪式，是因为害怕生活和害怕死亡而开始的”。([11] 第 41 页) 有时甚至使他处于一种恍惚状态，“他曾对一个朋友解释道‘这恐惧让我觉得我还有四天好活，而这之后呢？我相信我还会活下去但我不愿意冒此煎熬。’”([11] 第 41 页) 但是，“因为害怕生活和害怕死亡而开始”，却未必就是以渴望尘世的安逸和肉体的永生为目的。实际上，塞尚对待宗教的态度并不是那么认真。“塞尚去做弥撒了，但嘲笑的心情还没有在他中间消失，而把去做弥撒说成去‘取中世纪的碎布头’，……，有时在祷告最高潮时打瞌睡”，([12] 第 75 页) 而且，他会因为像“大教堂副神父的管风琴弹得太差”这样的理由而不再去参加晚祷。由此，我们可以感受到他的上帝观与传统的上帝观的距离。其实，在这种恐惧和恍惚的现象背后，在塞尚的内心深处，还潜藏着更为深层的精神因素。他曾说：宗教是精神卫生。([12] 第 75 页) 雷华德写道：“虽然他有种种变化无常和嘲笑的怪癖，但他长期探索的支柱可以在宗教中真正找到。”(([12] 第 76 页)) 而学者杜什廷则更明确地指出：对于塞尚来说，实际上“晚年的宗教醒悟，不是来自对死亡的恐惧，而是来自对无法达成其伟大的艺术目标的担忧，……”([8] 第 179 页) 也就是说，塞尚信仰上帝的真正原因是由于他“对无法达成其伟大的艺术目标的担忧”，换言之，上帝是他实现他的努力与目的结合的希望，也即是他的母题能够最终得以实现的保障，因此而成为“他长期探索的可靠的精神支柱”。这样，塞尚的上帝概念就与康德的上帝概念联系在了一起。

康德认为，人在努力行修之后必然会提出一个问题：“如果我做了我应该做的，此时我可以希望什么？”人的理性使人能够预期其行为的经验结果，因此，人不可能不考虑行为的目的。因为，“倘若不与任何目的发生联系，人就不可能做出任何意志规定”。目的就是希望，而“所有的希望都指向幸福”。一个有限理性存在者所可以欲求的就是根据他所具备的德性的程度享有同样程度的幸福。但问题是，这种由德性和幸福的结合所达到的“至善”无法依照自然的法则来实现，“人的能力并不足以在造成幸福与配享上的一致”，因此“为使这种至善可能，我们必须假定一个更高的、道德的、最圣洁的和全能的存在者，唯有它才能把至善的两种因素结合起来”，从而保证人对至善的期望不致落空。“因此，道德不可避免地要导致宗教。”这就是康德的上帝概念。这样，康德的上帝实际上就是保障实现德性与幸福在超验世界里结合并赐福于人类的神圣立法者。概括地讲，康德的上帝是一种预设，是人类行为的精神支柱。艺术本身不是道德，但是从根本上讲，探索艺术的行为蕴含着最终造福于人类的德性。因此，探索艺术的艺术家就配享追求幸福的权利。从这种意义上讲，塞尚的上帝概念就与康德的上帝概念是一致的。（本段论述和引文参见 [36] 译者前言）

颇具戏剧性的是，与更为感性的艺术家塞尚的颇为理性也颇为实用的上帝观相比，理性的数学家格罗登迪克的上帝观却更为感性，也更具实在性，也就是说，更为传统。这或许是由于格罗登迪克已放弃他长期为之奋斗的数学事业，他没有什么事业上的担忧，往日的成功足以使他名垂千古，所以，格罗登迪克信仰上帝更多是出于精神上的需要，而不是像塞尚那样出于似乎有点颇为不虔诚的实用目的。但是，这种充满感性和实在性的上帝观却时常使格罗登迪克处于“一种内心被深深打扰和备受煎熬”的中世纪式的宗教恍惚状态。杰克森写道：1990 年 1 月 26 日，格罗登迪克给大约 250 人寄了“一封带来好消息的信”。信中宣称：“你是一个为数 200 － 300 人的群体中的一员，每个人都亲自接触过我。上帝赋予我一个伟大使命：宣布并且准备‘新时代’（或者解放时代……）的到来，它将在‘真理之日’，1996 年 10 月 14 日开始。”他说上帝在 1986 年首次出现在他的面前并和他通过梦境联系。他也描述了遇到一位叫做 Flora 的神，她传授启示但也残酷考验他的忠诚。尽管信的内容令人困惑，但是它的书写却是完美般的清晰。奇怪的是，3 个月后格罗登迪克发出了一个“更正”，宣称他自己不再相信“一封带来好消息的信”中描述的启示的真实性。([13])

不仅如此，我们甚至确乎能感受到从 Motive 到上帝观念的演化。实际上，格罗登迪克一直对“梦”感兴趣，并且在他离开数学界以后，曾经很深入地研读过弗洛伊德的《梦的解析》([37])。但是，对于梦他却给出了与弗洛伊德完全不同的解释。对此，数学家沙劳 (Winfried Scharlau) 在深入地研究了格罗登迪克写于 1987-1988 期间的作为“格罗登迪克的沉思”的结果之一的《梦的要旨》以后写道：格罗登迪克认为“有一个外部的存在者，即‘梦想者’(dreamer)，他了解人们并将梦给予人们，使得人们能够认识自己。……这些梦不是人们内心的心理过程的结果，而是来自于外部。……格罗登迪克分析了‘梦想者’的本质，并得出结论：上帝存在，上帝就是‘梦想者’。”([37]) 在这里，上帝被替换成了满脑子是梦的“梦想者”，而人的梦不像弗洛伊德认为的那样是人被压抑的愿望通过内在的心理过程所表现的结果，而是由“梦想者”给予人的，即人的梦具有一种被给予性，从这种意义上讲，人的梦体现的不是做梦人的性质而是“梦想者”的性质。因此，人的梦是“梦想者”把自己的“梦”在人身上的实现，也即人的梦是上帝的梦的实现。因此，我们读出了如下平行结构：

Motive －实现－上同调

上帝的梦－实现－人的梦

这显然是一种“Motive”风格的解释。这里的上帝的梦就相当于是“motivic dream”，也就是说，“上帝的”即是“motivic”。由此，我们似乎可得到令人颇感意外的结论：**Motive 类比着上帝**。如同从亚里士多德到阿奎那形而上学导致上帝一样，格罗登迪克的 Motive 最终也导致了上帝。

从本质上讲，格罗登迪克对于梦的这种解释并不是什么新的东西，仅仅是一种从古希腊时代就已流行的古老诠释方法的“Motive”式的翻版。然而，问题是，格罗登迪克熟知弗洛伊德的更具科学意义的理论，那么为什么还会偏好这种显得有点怪异而神秘的解释呢？我们认为，这体现了格罗登迪克特有的“Motive”式的思维方式以及这种思维方式的惯性和根深蒂固。更重要的是，这似乎同时暗示着“Motive”在他心中的特殊地位和意义，甚至这也似乎是在从另一个神秘的角度向我们解释为什么在他诸多的理论建树中格罗登迪克格外看重他的“Motive”理论。

因此，我们不禁要溯及既往地追问：在格罗登迪克 40 多年以前创立 Motive 理论的时候，从心理学的角度 Motive 是否就是他潜意识中的上帝？德林曾说，发展 Motive 理论遇到的障碍远比他不能证明最后的魏依猜想更让格罗登迪克沮丧。那么，在格罗登迪克的潜意识中这是否暗含着对上帝的沮丧？ 是否暗含着对上帝不是全能的沮丧？ 而这种沮丧，正是德国哲学家汉斯 • 约纳斯所论述的在奥斯维辛之后犹太人在他们的同胞们“那业已衰弱下去、向无言的上帝的呐喊”的震撼中对上帝的观念所产生的普遍变化：上帝不是全能的，上帝是生成的！ ([38])

周知，1970 年，正值事业巅峰 42 岁壮年的格罗登迪克突然宣布离开数学界。此后，他从事了一些公益性的活动，成为了一个萨特意义上的“知识分子”。[24] 这个震惊整个数学世界 40 年之后至今仍令人困惑不已的“大转折”(The great turning point) 是人类科学史上的谜团。目前，许多著名的数学家以及科学史学者已经从多个视角对格罗登迪克脱离数学界的原因给出了精辟的解释，但是，我们似乎难以说明为什么格罗登迪克不仅脱离了数学界甚至最终还脱离了人类社会。这个问题或许是复杂的，有着多方面的原因。或许与他对于他所从事的公益性活动效果的失望有关，或许与他的究极精神有关。基于上述讨论，我们不禁疑问：是不是还有更为深层的原因，譬如，犹太人关于上帝观念的变化对他这个童年时曾经历过二战苦难的犹太人于心灵深处的影响，换言之，从心理学的角度，当年关于 Motive 理论的沮丧是否预示着此后的“大转折”?

探索和回答这样的疑问或许需要像音乐学家何昌林先生当年破译唐传古谱《秦王破阵乐》那样从宗教中获得深层面的启示，[25] 也就是说，我们应该去研究格罗登迪克的宗教观念，这或许是引向深入思索的一个起点。

致谢 本文的写作动机源于笔者在中国科学院晨兴数学中心访问期间与李克正教授关于 Motive 一词翻译问题的谈话。在本文的写作过程中，曾亲受业于格罗登迪克的 Luc. Illusie 教授、Yuri Manin 教授和 Max Karoubi 教授为笔者提供了有关的史实，杜建国博士给予了笔者许多帮助，王群教授为笔者修正了关键的译文。在本文的行文中，笔者大量地使用了沈语冰教授在文献 [8] 中给出的许多精彩的注释。本文的最终完成在很大程度上得益于李克正教授和秦厚荣教授的热情引荐，特别是刘建亚教授的激情鼓励和深度支持。对此，笔者谨致谢忱。

On Grothendieck's Motive and Cézanne's Motif

Xu Kejian

College of Mathematics，Qingdao University，
Qingdao 266071，P.R. China

Abstract

In this paper, the author interprets and compares Grothendieck's mathematical theory of motives and Cézanne's art theory of motifs for the purpose of presenting a personal interpretation and understanding on the ideas and thoughts underlying the two great masters' works.

This paper is organized in five sections. In section 1, the author attempts to interpret the meaning of the cover of a book written by Mazza, Voevodsky and Weibel, which connects Grothendieck's motive and Cézanne's motif. The second section introduces the backgrounds of Grothendieck and Cézanne. In section 3, the author offers a sketch of Grothendieck's theory of motives; while in section 4, a systematic study on Cézanne's art theory of motifs as well as its realizations is provided drawing on the author's personal perspective based on English formalism art critic Fry's famous works on Cézanne's art, which offers an alternative understanding and insight on Cézanne's work. Finally, in section 5, the two masters' theories and ideas as well as thoughts are compared from different aspects, such as philosophy, religions and psychology. The results of the comparison lead to a query on Grothendieck's " great turning point".

[24] 法国存在主义哲学家萨特曾说：一位原子能科学家在研究原子物理时不是个知识分子，但是，当他在反对核武器的抗议信上签名时就是个知识分子。

[25] 1986 年，何昌林先生曾告诉笔者，他破译《秦王破阵乐》的想法来自他对佛经的深入研究。

参考文献

1. J. Milne，Motive-Grothendieck 的梦想，徐克舰译，付保华校对，《数学译林》，第三期，2009.
2. 《艺术史的语言》，萨林 • 柯马尔、伊万 • 卡斯克尔著，王春辰等译，江苏美术出版社，2008.
3. 《西方文化中的数学》，莫里斯 • 克莱因著，张祖贵译，复旦大学出版社，2005.
4. C. Mazza, V. Voevodsky and C. Weibel, Lecture Notes on Motivic Cohomology, Clay Mathematics Monographs, Vol.2, American Mathematical Society, Clay Mathematics Institute, 2006.
5. C. Weibel，Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 39，No.1，2001，pp 137-143.
6. Ju.I. Manin，Correspondence, motif and monoidal transformation，Math. USSR.Sb. 6(1968)，439-470.
7. 《现代绘画简史》，赫伯特 • 里德著，刘萍君译，周子丛，秦宣夫校，上海人民美术出版社，1979.
8. 《塞尚及其画风的发展》，罗杰 • 弗莱著，沈语冰译，广西大学出版社，2009.
9. 《塞尚：强大而孤独》，米歇尔 • 奥格著，林志明译，上海译文出版社，2004.
10. 《艺术与错觉——图画再现的心理学研究》，贡布里希著，林夕、李本正、范景中译，湖南科学技术出版社，2011.
11. 《眼与心——梅洛 - 庞蒂现象学美学文集》，梅洛 - 庞蒂著，刘韵涵译，中国社会科学出版社，1992.
12. 《塞尚传》，约翰 • 利伏尔德著，郑彭年译，上海人民美术出版社，1997.(由于笔者手头上没有此书，所以笔者在此使用了网络上的电子版：http：//www.hfsy.cn/book/38/wxls/ts038048.pdf)
13. Allyn Jackson，仿佛来自于空虚:Alexander Grothendieck 的一生，(I)，(II)，(III)，(欧阳毅译，陆柱家校对)，《数学译林》，第二、三、四期，2005.
14. 《艺术和思想》，威廉 • 弗莱明著，吴江译，上海人民美术出版社，2000.
15. A. Grothendieck and J. Dieudonné, Éléments De Géométrie Algébrique, I, Le Langage Des Schémas，I.H.E.S., Publications Mathématiques, N º 4, 1960.
16. 《塞尚之后——20 世纪初的艺术运动理论与实践》，克莱夫 • 贝尔著，张恒译，新星出版社，2010.
17. 沈语冰，塞尚的工作方式——罗杰 • 弗莱和他的形式主义批评，载于《塞尚及其画风的发展》(见 [8])。
18. 《画室——塞尚与加斯凯的对话》，约阿基姆 • 加斯凯著，章晓明等译，浙江文艺出版社，2007.
19. M. Demazure, Motifs de variétés algébriques, Sem. Bourbaki 365(1969).
20. S. Kleiman，Motives, Algebraic Geometry, Oslo, 1970 (F. Oort，ed), Walters-Noordhoff, Groningen, 1972, pp.53-82.
21. A.J. Scholl, Classical motives, in Seattle Conf. on Motives 1991, AMS Proc. Symp. Pure Math. 55, pp. 163-187(1994).
22. Luca Barbieri-Viale, A pamphlet on motivic cohomology, arXiv: math/0508147v1 [math.AG], 8 Aug 2005.
23. 《艺术与文化》，克莱门特 • 格林伯格著，沈语冰译，广西师范大学出版社，2009.
24. 《塞尚与柏格森》，尤昭良著，广西师范大学出版社，2004.
25. 《现代艺术的意义》，约翰 • 拉塞尔著，常宁生等译，中国人民大学出版社，2010.
26. 《塞尚书简全集》，保罗 • 塞尚等著，潘襎编译，新星出版社，2010.
27. Robert Rosenblum, Modern Painting and the Northern Romantic Tradition——Friedrich to Rothko. Icon Editions, Harper and Row, Publishers, New York, Evanston, San Francisco, London, 1975.
28. 《美学》，第二卷，黑格尔著，朱光潜译，商务印书馆，1979.
29. 《阿波利奈尔论艺术》，阿波利奈尔著，李玉民译，上海人民出版社，2008.
30. 《艺术家的真实——马克 • 罗斯科的艺术哲学》，马克 • 罗斯科著，岛子译，广西师范大学出版社，2009.
31. 《艺术学经典文献导读书系 • 美术卷》，沈语冰编著，北京师范大学出版社，2010.
32. 《视觉与设计》，罗杰 • 弗莱著，易英译，江苏教育出版社，2005.
33. 《塞尚艺术的哲学随想》，史作柽著，北京大学出版社，2005.
34. Leila Schneps, The Grothendieck-Serre Correspondence, http://www.grothendieck circle.
35. Grothendieck-Serre Correspondence, Bilingual Edition, Pierre Colmez and Jean-Pierre Serre Edited, translated by Catriona Maclean with the assistance of Leila Schneps and Jean-Pierre Serre, American Mathematical Society, Société Mathématique de France.
36. 《单纯理性限度内的宗教》，康德著，李秋零译，中国人民大学出版社，2009.
37. Winfried Scharlau, Who is Alexander Grothendieck? Notices of AMS, Vol. 55, No.8，930-941.
38. 《奥斯维辛之后的上帝观念——一个犹太人的声音》，汉斯 • 约纳斯著，张荣译，华夏出版社，2002.

作者简介：徐克舰，理学博士，曾在中国科学院数学研究所从事博士后研究工作，现为青岛大学数学科学学院教授，吉林大学、吉林师范大学兼职教授，吉林大学博士生导师，研究兴趣为 *K*- 理论与算术代数几何；自幼热爱艺术，有过长达 13 年之久的职业艺术生涯。八十年代中后期曾经参与过由青岛青年艺术家群体发起的现代艺术系列活动。

e-mail： kejianxu@amss.ac.cn

奇美的数学

The Unreasonable Beauty of Mathematics

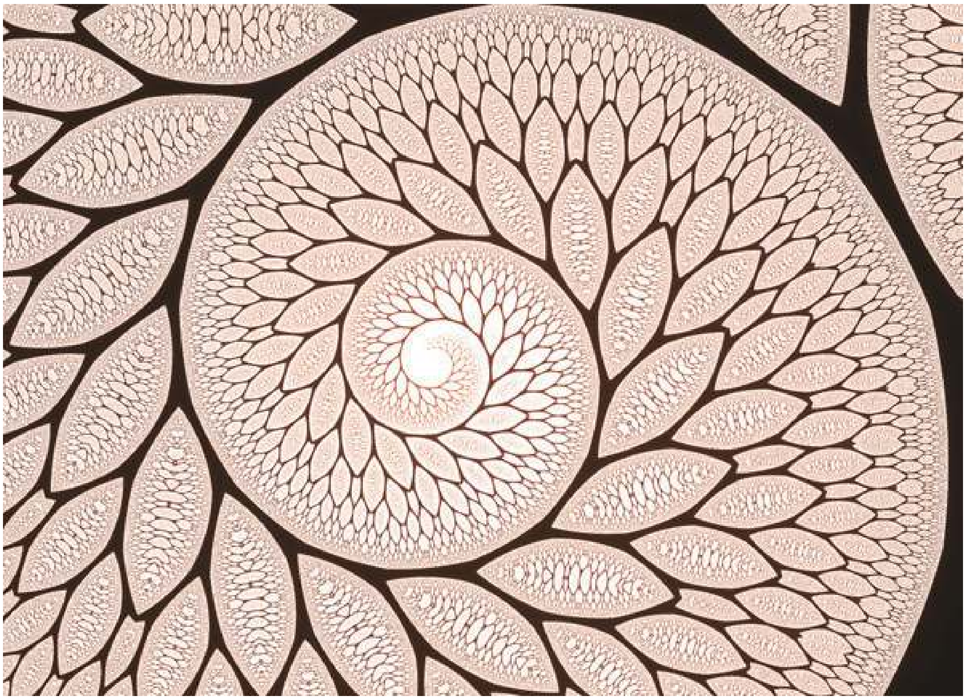
禾铭

2011 年 8 月号的《科学美国人》(Scientific American) 登了一篇介绍数学之美的文章；图文并茂地讲解了一些近几十年来数学在实际生活中的完美应用。其中重头戏就是分形、双螺旋线等。这不禁使人想起陈省身先生曾在 2003 年出资两万元，亲自构思、设计、印刷了一套题为“数学之美”的挂历。他通过奇妙的设计使深奥的数学走进人们的日常生活，用通俗的形式展示数学的深邃与美妙。

挂历中 12 幅彩色画页分别为：复数、正多面体、刘徽与祖冲之、圆周率的计算、高斯、圆锥曲线、双螺旋线、国际数学家大会、计算机的发展、分形、麦克斯韦方程和中国剩余定理；其中分形、双螺旋线和《科学美国人》文中的介绍相吻合。

本文把《科学美国人》中的一部分内容扩充，加以一些背景知识，介绍给《数学文化》的读者。

1 著名的分形



分形这一概念是曼德布罗特 (B.B. Mandelbort，1924 — 2010）最先提出来的。1967 年他在国际权威的《科学》杂志上发表了一篇划时代的论文，标题是《英国的海岸线有多长？统计自相似性与分数维数》，文章作者曼德布罗特是一位美籍法国数学家和计算机专家，当时正在纽约的 IBM 公司工作。他对海岸线有多长这一问题的答案可能让你大吃一惊：他认

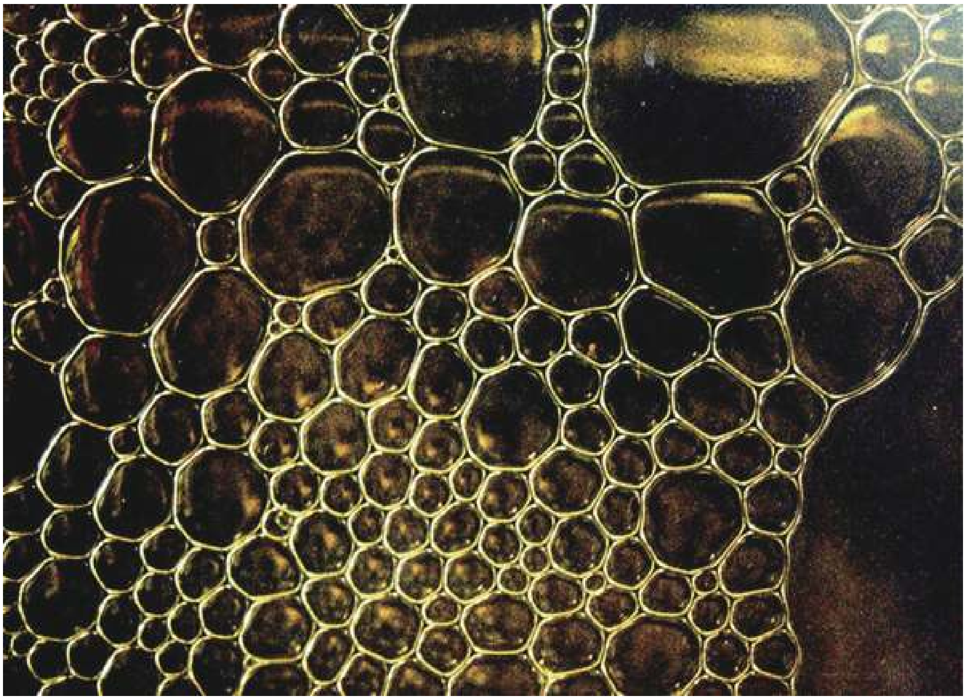
为无论你做得多么认真细致，你都不可能得到准确答案，因为根本就不会有准确的答案。英国的海岸线长度是不确定的！

具体地说，海岸线有多长依赖于测量时所用的尺度。原来，海岸线由于海水长年的冲刷和陆地自身的运动，形成了大大小小的海湾和海峡，弯弯曲曲极不规则。假如你乘一架飞机在 10000 米的高空沿海岸线飞行测量，同时不断拍摄海岸照片，然后按适当的比例尺度来计算这些照片显示的海岸总长度，可否得到精确的结果呢？答案是否！因为，你在高空不可能区别许多的小海湾和小海峡。如果你改乘一架小飞机在 500 米高处重复上述的拍摄和测量，你就会看清许多原来没有看到的细部，而你的结果就会大大超过上次的答数。

海岸线长度的问题，曼德布罗特最初是在英国数学家理查逊（Lewis Richardson）的遗稿中一篇鲜为人知的晦涩的论文中遇到的。这个问题引起他极大的兴趣，并进行了潜心的研究。他独具慧眼地发现了 1961 年理查逊得出的边界长度的经验公式 $L(r) = Kr^{1-a}$ 中的 a 可以作为描述海岸线的特征参量，即“量规维数”，这就是著名的分数维数之一。这一问题的研究，成为曼德布罗特思想的转折点，分形概念从这里萌芽生长，使他最终把一个世纪以来被传统数学视为“病态的”、“怪物型”的数学对象，如康托尔三分集、科赫曲线等统一到一个崭新的几何体系中，从而产生了一门新的数学分支——分形几何学。

曼德布罗特在《英国的海岸线有多长》这篇文章中把那些部分与整体以某种方式相似的形体称为分形 (fractal)。上页的图形是最著名的分形朱利亚集（Julia set）的一个版本。朱利亚集是由法国数学家加斯顿 • 朱利亚（Gaston Julia）和皮埃尔 • 法都（Pierre Fatou）发展复变函数迭代的基础理论后获得的。朱利亚集是分形的一个特殊类型。

2 分形的泡泡



1977 年，曼德布罗特在美国出版其英文版 Fractals: Form, Chance, and Dimension（《分形：形状、机遇和维数》）；同年，他又出版了 The Fractal Geometry of Nature（《大自然的分形几何》）。直到 1982 年，The Fractal Geometry of Nature 第二版才得到欧美社会的广泛关注，并迅速形成了分形热，此书被分形学界视为分形圣经。他在《大自然的分形几何》中写道:“云朵不是球形的，山峦不是锥形的，海岸线不是圆形的，树皮不是光滑的，闪电也不是一条直线。”他认为，这些天然以及人造产物的形状是很粗糙的，并根据这些不规则的形状提出了一种新的数学，并将其称为“分形几何”。

分形几何建立以后，很快就引起了许多学科的关注，在许多科学艺术领域都得到应用和发展，如物理学、天文学、流体力学、混沌学、统计学、信息学、图形学、生物形态学，甚至音乐、绘画等广阔领域。分形几何学的特点是整体上各相异，不同尺度上自相似。小到混沌量子场，再到聚合物、树枝、大脑皮层褶皱、脉管系统、云朵、山脉、海岸线，大到星系、星系洋，到处都呈现自然界美丽奇幻的分形景观，这是自然界复杂性本质的表现。

上页图片的拍摄者是理查德 • 泰勒（Richard Taylor），他长期以来致力于发现分形的泡泡；此图是他在悉尼的一个池塘边拍到的。这个泡泡的维数不是通常意义上的整数，而是有分数维 1.3。

3 分形的花椰菜

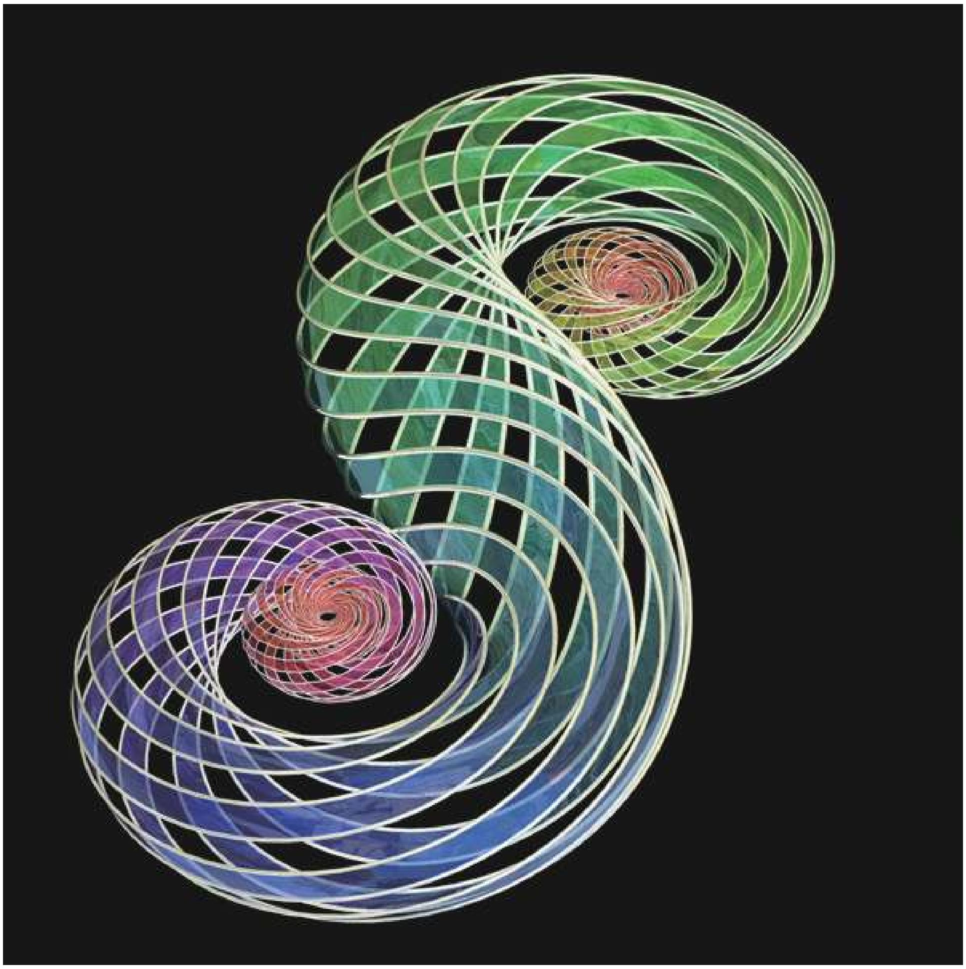
罗马花椰菜是一种可食用的花椰菜，16 世纪发现于意大利。这种花椰菜长相很特别，花球表面由许多螺旋形的小花所组成，小花以花球中心为对称轴成对排列。花菜含有丰富的维生素及矿物质，尤以维生素 C 的含量特别突出。因它像宝塔一样，故又称宝塔菜。

罗马花椰菜的神奇在于其规则和独特的外形，并因此成为著名的几何模型。说它独特，是因为它以一种特定的指数式螺旋结构生长，而且所有部位都是相似体，这与传统几何中不规则碎片所包含的简单数学原理相似。它对应的数学模型也吸引了无数数学家和物理学家加以研究。数学家发现，不断运用简单的迭代可以生成分形的花椰菜。

有个分形艺术网（http://www.fxysw.com），是一个展示分形艺术之美、学习交流分形艺术创作的平台。

上页的图是乔恩•苏利文（Jon Sullivan）拍摄的花椰菜，它被认定为目前英文维基百科上最清晰的图像之一。

4 双螺旋线



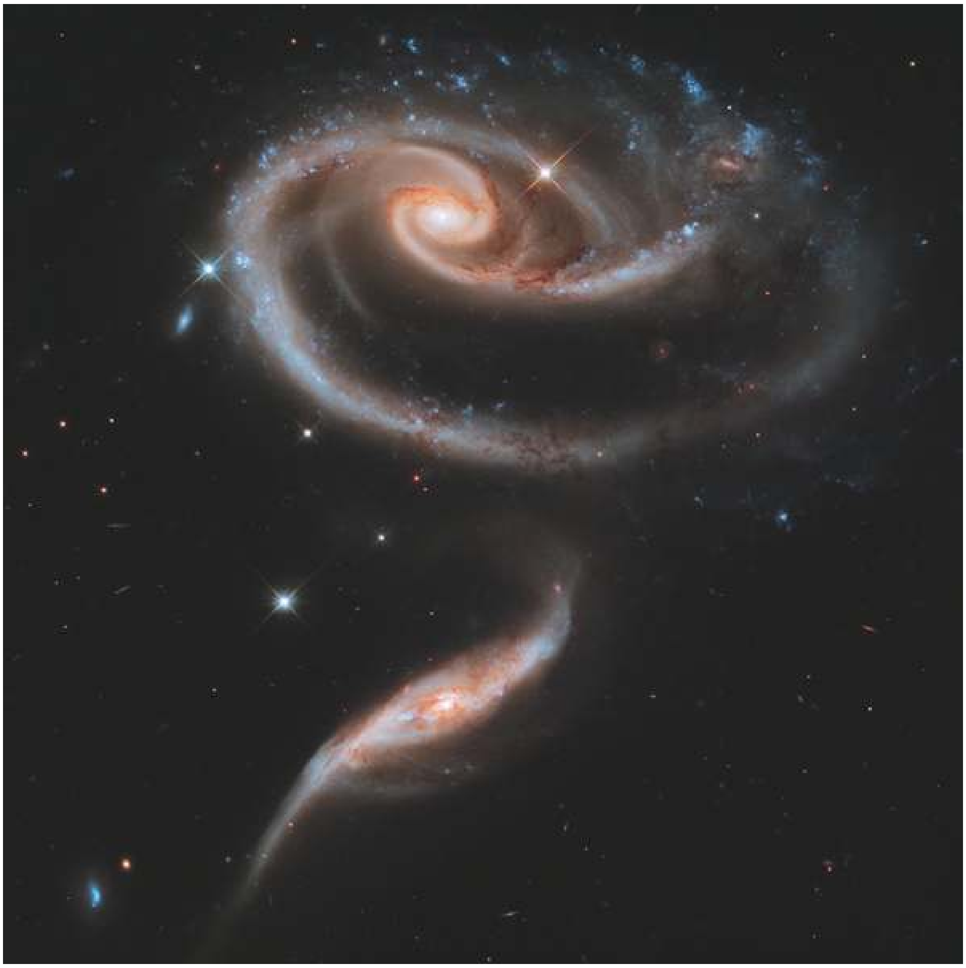
1953 年，年仅 25 岁的詹姆斯•沃森（James Waston）和 37 岁的弗朗西斯•克里克（Francis Crick）共同完成了一项伟业：他们从 DNA（脱氧核糖核酸）的 X 光衍射图上解读了它的双螺旋结构。当时大多数人对于这一发现并没有予以关注，就连当时的媒体，也只有一家小报（现早已停刊）稍作报道。然而随着时光流转，DNA 双螺旋结构的发现对人类社会产生的影

响与日俱增，克隆技术、基因工程、生物芯片技术等都与之不可分割。沃森和克里克改写了生物学的历史，他们的研究成果被誉为可与达尔文的进化论、孟德尔的遗传定律相媲美的重要科学发现。

双螺旋结构自发现以来就为人类提供了诠释和利用生命体有机结构的重要工具。关于不同螺旋结构的诠释和它在基因科学中起的巨大作用，是数学家、生物学家、生物医学工作者不断追求的研究方向。

保罗•尼兰德尔（Paul Nylander）保存了一系列数学之美图片；上页的图就是一张由计算机生成的双螺旋线图。

5 太空中的螺旋形



星云是由太空中的气体和尘埃结合成的云雾状天体，其体积十分庞大。由于邻近恒星的辐射线影响，星云会呈现缤纷的色彩和样式，令人目不暇接。

螺旋星云，永远是黑暗宇宙中的亮点，星体、灰尘、气体和等离子等物质由于重力的作用汇集到一起就形成了螺旋星云，看上去它就像是一个在黑暗的宇宙中划过的火风车。天

文学家早在200多年前就发现了它的存在，在这段时间里，它一直吸引着天文学家和爱好者们的目光，许多科学家运用了各种先进的探测方法对其进行研究。借助于哈勃太空望远镜，人们观察到一对螺旋星云彼此穿越对方（见上页图）。天文学家表示，这两个螺旋星云好像是在上演一段精彩的太空舞蹈。地心引力充当了“投掷者”的角色，将每一个星系中的恒星和气体“扔”进太空，其抛出的恒星和气体形成了一条10万光年的长尾巴。

6 莫比乌斯三叶形谜题

公元1858年，莫比乌斯发现：一个扭转180°后再两头粘接起来的纸条具有魔术般的性质。普通纸带具有两个面（双侧曲面），即一个正面和一个反面，两个面可以涂成不同的颜色；而莫比乌斯发现的纸带只有一个面（单侧曲面），一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘！

我们把这种由莫比乌斯发现的神奇的单面纸带，称为“莫比乌斯带”。

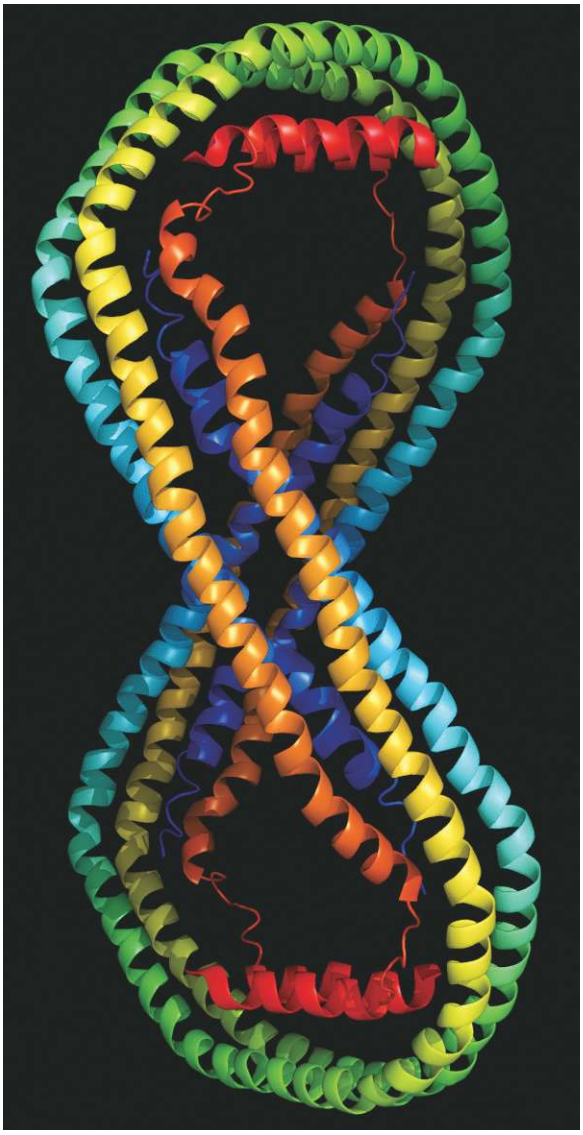
神秘的莫比乌斯带是数学家们的宠物。拿一张白的长纸条，把一面涂成黑色，然后把其中一端翻一个身，粘成一个莫比乌斯带，用剪刀沿纸带的中央把它剪开。你就会惊奇地发

现，纸带不仅没有一分为二，反而剪出一个两倍长的纸圈！有趣的是：新得到的这个较长的纸圈，本身却是一个双侧曲面，它的两条边界自身虽不打结，但却相互套在一起！为了让读者直观地看到这一不太容易想象出来的事实，我们可以把上述纸圈，再一次沿中线剪开，这回可真的一分为二了！得到的是两条互相套着的纸圈，而原先的两条边界，则分别包含于两条纸圈之中，只是每条纸圈本身并不打结罢了。

这方面更通俗的介绍可以参考科学松鼠会的《莫比乌斯带：只有一面的魔环》（http://songshuhui.net/archives/11714）

汤姆•朗丁（Tom Longtin）是一名莫比乌斯带及其变形的粉丝；上图就是他的图库里的一幅；有兴趣的读者可以参观其网页 http://homepages.sover.net/~tlongtin/index.html

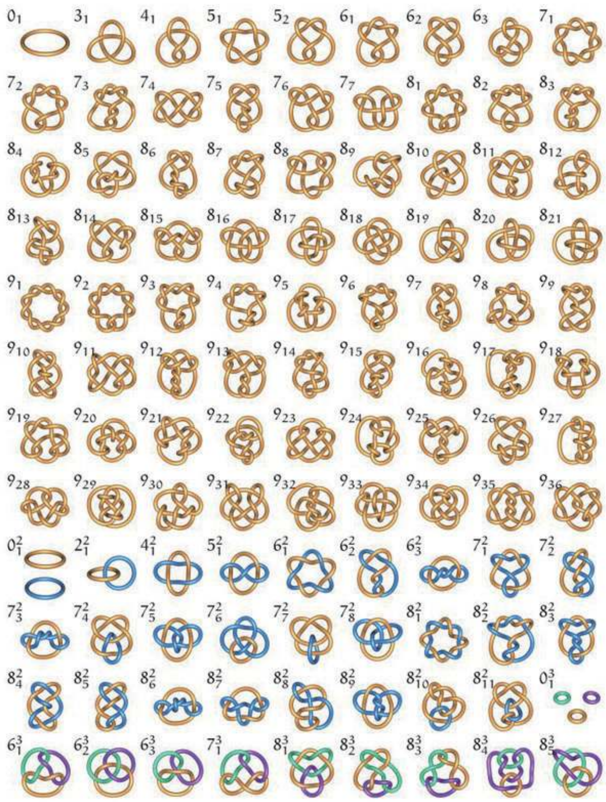
7 莫比乌斯蛋白质



莫比乌斯带是一种拓扑学结构，其特点是只有一个面。如今，研究人员创建出一个纳米莫比乌斯带，这种可用于制造全新分子设备的结构是折叠DNA 分子的自组装，并且通过DNA 链长度的剪切可变换成各种形状。实验室中也有可能产生莫比乌斯带形状的粒子。前不久，一群科学家在《化学物理期刊》（Journal of Chemical Physics）上发表了一篇论文，预言会有一种莫比乌斯带形状的碳单质（准确来说应该是石墨烯）。它能抵抗摄氏 200 度左右高温，性质相当稳定。由于其莫比乌斯带的结构，可以形成稳定的晶体。现在就等科学家们把它实际做出来了。

高密度脂蛋白（HDL）的重要组成部分阿朴脂蛋白由一个最大尺寸为 12.5 纳米的螺旋结构扭结而成。华盛顿大学的麦克•迪卡（Mike Tyka）是一位蛋白质折叠专家，他保存着很多这类图片；左图就是其中一幅。

3 纽结理论



低维拓扑与其余数学（或科学）分支的最令人惊异的结合发生在纽结理论中。纽结理论（knot theory）是一门研究绳子打结方式的数学分支，这方面的一本通俗读本是姜伯驹院士的《绳圈的数学》。

这一理论作为低维拓扑学的一个分支，起源于大数学家高斯和他的学生的工作。然而真正使纽结理论受到全世界重视的却是物理学家开尔文（Kelvin）勋爵的功劳，他于 1867 年提出了一个原子模型，其中一种元素的原子与一种纽结对应，不同的元素对应不同的纽结。这一学说立即受到物理学家们的重视，许多人开始研究打结现象。开尔文的理论使人们相信只要完全搞清楚纽结的性质就可以得到元素周期表，并且由于宇宙中元素的种类是有限的，从而通过对纽结的研究可以最终理解全部自然法则。不幸的是这个美好的蓝图被卢瑟福（Rutherford）的实验彻底粉碎了。卢瑟福发现原子其实并不像一团缠起来的线，而是像一个小的太阳系，无法用纽结理论给原子结构一个合乎情理的解释。

数学家们继续了物理学家对纽结的研究。纽结的奇妙性质来源于其嵌入三维空间的方式，只有在三维空间中才存在纽结，而我们人类恰恰也生活在三维空间中。另一方面，想要作好一个研究，最基础的工作就是收集总结经验资料。1899 年，英国人泰特（Tait）给出了世界上第一个纽结表。之后，找到含有更多纽结的纽结表就成了纽结研究中的中心工作之一。上图给出了部分纽结表。

数学札记

万精油

5.8 级的地震刚过，百年不遇的台风 IRENE 又来赶热闹，整个美国东部顿时紧张起来。电视上说新泽西马里兰一带有人购物买水做准备，把商店的货物架都搬空了。波士顿地区没听说有搬空商店的情况，但大家还是做了一些准备，孩子学校已经来电话说有可能推迟开学。大家严阵以待，结果却让孩子们很失望，IRENE 悄悄地来了，又悄悄地走了，影响没有预计的那么大。带来的云都以小雨的形式洒在了地上，所以志摩诗的最后一句还是可以用上，“不带走一片云彩”。当然，局部地区的小破坏还是有的。我家附近一个电线杆被吹倒的树挂倒，停电数小时。停电那一刻让我想起我的一个侄儿在 FACEBOOK 上的留言：

“台风来临清单：笔记本一小时，三个 DS 各一小时，DIX 四小时，共八小时。”

原来这些电玩都是为停电准备的。像我们这些从前在完全没有电的地方生活过的人，停几个小时电没有什么可怕的。先是与女儿下了几盘围棋，然后她去弹钢琴，我去看书，一切都很自然。

停电期间翻了几本数学杂志，简转几篇有意思的在这里，顺便短评一下。

陶哲轩教授2006年从西班牙国王手里接过菲尔兹奖

数学札记1　数学资深会员

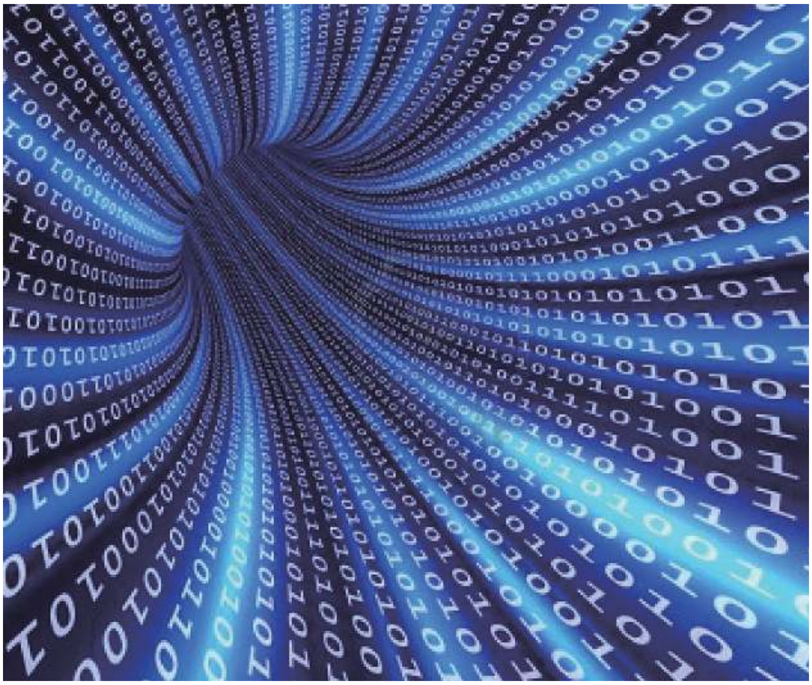
在2011年9月份美国数学协会的会刊“Notice”上，美国数学协会（AMS）主席说：长期以来，数学领域的各种奖都发给了那些最最优秀的数学家，很大一部分（不是最最）优秀数学家被冷落了。我们需要一种新的体制来鼓励、表彰、确认这些优秀数学家。所以，美国数学会准备建立资深会员制（Fellow），希望大家投票表决是否有必要。主席说别的协会（比如美国工业与应用数学协会（SIAM）等）都有资深会员制。这种制度可以提高数学家（和数学协会）的知名度，为他们的研究提供方便，也可以提高大家的工作激情。同期杂志上也登了反对方的意见。反方意见说数学家最可贵的东西就是纯洁，追求的是绝对真理，不受外界的影响。引进资深会员制就是在数学家中搞等级，会造成不必要的隔阂。而且，为了谁成谁不成资深会员的问题，必然会有争斗，会让许多数学家把宝贵的研究时间花在这些争斗上。最后说，我们不需要等级制度来划分我们。让我们为成为一个没有任何前缀的数学家而自豪吧。

我觉得正反两方是从两个不同的视角在看这个问题。数学协会主席是把数学家作为一个整体，与外面比较。别的学科有资深会员，简历上可以多写一项。数学家与别的科学家竞争时就少一个优势。而且，拿菲尔兹奖之类的大奖对绝大部分数学家来说是不现实的期望，设立资深会员制给大家多一个盼头。而反方是从数学家内部来看问题的。资深会员制必然产生内耗，引起山头主义，后患无穷。这几天国内学术界闹得轰轰烈烈的饶毅退选院士事件就是一个活生生的例子。

双方的考虑都有道理，关键是要看这个制度怎么管理。可以从别的学科借鉴好的管理经验。当然，只要有人为的参与，总会有这样或那样的非数学的因素。最后怎么决定就要看大家的表态结果了。

数学札记2　数学与网络

停电期间看的另一篇文章是陶哲轩的《数学与网络》。



陶哲轩何许人？菲尔兹奖获得者，神童中的神童。据他爸爸说，他两岁的时候，家里有聚会，看见他在教别的五岁的小孩做算术。家里人从来没有教过他算术，他自己说是看电视“芝麻街”学会的。也没有人教过他阅读，他说妈妈给他念书的时候他跟着看就学会了。11岁上大学，20岁拿博士，24岁当正教授。

陶哲轩年轻，还长着一副娃娃脸。记得有一次美国数学年会，他被邀作大会报告。上千人的大厅里座无虚席，台下的数学家们听台上一个中学生模样的人作报告。当时感觉很滑稽。

两年前，陶哲轩被邀请到美国科学院作演讲。这篇《数学与网络》就是他的演讲稿，《数学文化》2011年第1期有中文翻译。他在演讲中说，他作过很多数学讲座，但这种大型演讲（Speech）还只是第二次。上一次是他九岁时候作的，希望这次不要讲得像一个九岁小孩。顺便说一下，陶哲轩九岁时作的演讲网上也可以找到，有可读性。

陶哲轩在演讲中说，过去几十年意义最大的发明就是网络。网络影响了人类社会的每一个角落。他原来以为数学家呆在象牙塔里不会受到太多影响。其实不然，网络对数学家的影响也越来越大。反映在数学家工作的两个主要方面——教学与研究。

从教学方面来讲，网络使课堂变得很灵活。学生可以利用网络与老师互动，当然也可以利用网络来作弊。网络也使课堂变大。一个现实课堂或许只有二、三十人，但虚拟课堂可以有成百上千的学生。而且，虚拟课堂不受时间限制。他的一些旧讲义放在网上，很久以后都会有学生来提问题，继续学习。他还举例说，数学中有一个经典变换叫莫比乌斯变换（Mobius Transformation），被许许多多的老师教过上千遍。Youtube上有个关于莫比乌斯变换的视频，讲得比任何老师都好，已经被点击过几百万次。这就是大课堂。

从我的孩子的情况看，这种利用网络来帮助教学的现象不仅在大学存在，连高中甚至初中教学也已经很普遍了。学校经常让学生上网查资料做功课，家庭作业也是在网上公布，让学生自己去看或下载。我曾经想限制我女儿的上网时间，结果她告诉我做家庭作业需要上网。

再来看数学研究。陶哲轩说，从前一个人的研究结果只有很小圈子的人才能看到，等到大多数人看到出版物常常是好几年过去了。现在不一样了，现在有Email，有Archive，每个人都可以自己印Pre-Print。甚至有些人干脆不投稿给正规杂志，直接把文章放在网上。比如证明庞加莱猜想的佩尔曼，把他的证明直接放到网上的数学库里（Archive），到现在为止也没有把他的文章投给任何杂志。另外，现在刚刚开始兴起的Polymath也是网络时代的产物。所谓Polymath，就是把一个题放在网上，大家你一言我一语，提出各种想法。只是提想法，并不需要具体解决到底（可以验证别人的某个想法）。基本精神是任何人都不要企图从头到尾解决这个问题。大家根据别人的想法再产生新想法。这样下去，用不了多少时间一道难题就被解决了。这个方法已经有了成功的实例。

关于这个Polymath，以后有机会我会专门再讲。

数学札记3　数学与计算机

计算机对应用数学的帮助是很显然的事。现实生活中的方程，比如气像、工程方面的，不论是偏微分方程还是常微分方程，甚至代数方程绝大多数都没有解析解。要解决现实问题我们只能求数值解。求数值解必须要做大量的数值运算，这是计算机的强项。计算机的最原始功能就是做数值运算。事实上，在计算机出现以前，英

文的计算机这个单词 Computer 是一个职业，就像现在程序员叫 Programmer 一样，专门做计算的人就叫 Computer（可以译成计算员）。二次世界大战的时候，美国军方就雇有很多这样的计算员。随着计算机的出现和进步，计算员这个职业消失了，Computer 是机器，不是人。

这篇文章要说的不是计算机对应用数学的帮助，而是对纯粹数学研究的帮助。

或许有人要说，对纯数学的帮助也是很显然的。自从 Knuth 的 TeX 问世以后，纯数学家有相当一部分的时间都是在计算机上敲 TeX 或 LaTeX。TeX 对数学家发表学术文章当然是功不可没。与此相关的计算机作图功能也可以再加一枚勋章。但这些仍然不是这篇文章的重点。这篇文章所要谈的是计算机对纯粹数学研究的帮助。

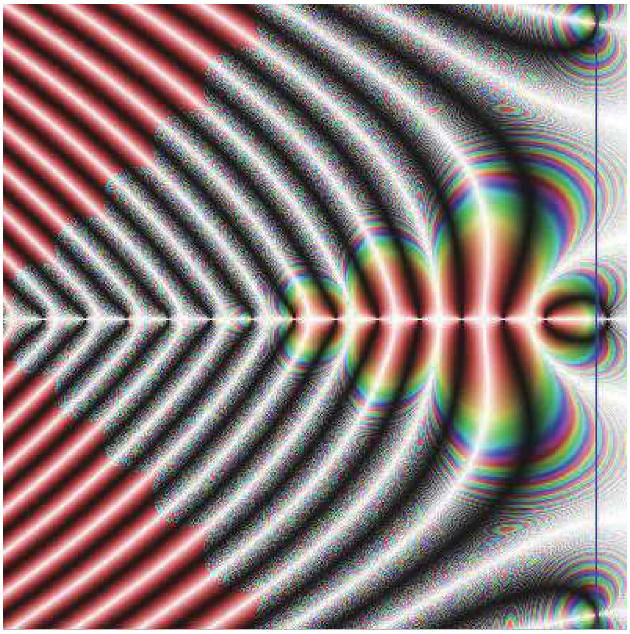
大家要问的第一个问题就是，纯数学的研究需要的是创造性思维，计算机完全是听命于我们的程序，没有一点创造性思维的能力，怎么可以帮助数学家搞研究？我下面就从一个数学命题由猜想到定理的几个方面来回答这个问题。

一个数学猜想提出来了，或证明它，或反证它，或者加上条件从各个方面去逼近它。证明的问题我们后面再讲。反证或逼近（或称之为验证）这条路有很多可以用计算机来帮助。比如黎曼猜想，最开始的验证工作就是算出它的一些零点来（从虚数部最小的算起）。刚开始时是用手算，算出 10 来个就很不得了了。后来改进了方法算的多一些，但真正的大量运算还是改用计算机以后。现在已经算到 10 的 12 次方以后。因为曾经有人预测反例会出现在第 3 亿个左右，所以算到 3 亿个算是一个突破。算得越多就给人越多的信心。这在某种程度上来说算是对纯数学研究的贡献。

读到这里一些读者或许会问，说来说去还是纯计算，计算机能不能自己发现一些东西，比如未知的公式什么的？

上个世纪有个很著名的数学家拉马努金（Ramanujan），他的思路与别人不一样，不时发现新奇的等式。比如数论中一些函数的等式，或有关 π 的等式等等，连大数学家哈代（Hardy）这样的人都感到很惊奇，别人去证明他的这些等式需要花很大的功夫。可是，像拉马努金这样的奇人一个世纪才出一个，一般人没有能力去发现这些新奇的公式。这又回到我们前面所提到的问题，计算机可不可以独立发现未知公式？

答案是肯定的。被评为二十世纪十大算法之一的 RSLQ 整数关系算法就可以用来发现新奇的公式。下面



用色彩表示的 Zeta 函数值。可以看到 s=1 是一个极点。图的右上方有一个非平凡零点，右下方是与其对称的非平凡零点。两个都在临界线 x=1/2 上。还可以看见 x 轴上那些平凡零点，x=-2, -4,…

这个关于 π 的公式就是用 RSLQ 算法发现的：

$$\pi=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

这个 RSLQ 算法还可以用来发现很多其它公式，其中许多公式都很有拉马努金公式的味道。这个算法甚至还发现了黎曼 Zeta 函数的一些生成函数，也就是说可以用它们来产生无穷多的关于黎曼 Zeta 函数值的公式。比如下面这个生成函数公式：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\zeta(2k+2)x^{2k}$$
$$=3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\binom{2k}{k}(1-x^2/k^2)}\prod_{m=1}^{k-1}\left(\frac{1-4x^2/m^2}{1-x^2/m^2}\right).$$

右面展开以后，每一个 x 项的系数都是一个相应于左边同一个 x 项的黎曼 Zeta 函数值的公式。

一个很显然的问题是，什么叫“发现”了这些公式，有证明吗？

所谓 PSLQ 算法就是用任意精度的运算找出的相关数值的整数关系，但任意精度落实到计算机还是有一个精度，所以这些公式的发现还不能算是证明。

超市中橘子的放法在数学上可证明是最紧密的放法

阿基米德有句名言说：证明已经发现了的东西比没有线索时去发现它要容易。这些由 PSLQ 算法发现的公式有些是可以找到严格的数学证明的。当然，并不是所有这些公式都那么容易找到严格证明。

最可喜的是这些搞算法的人又搞出一套证明算法，可以“严格”证明某些这样产生的公式。上面那个关于黎曼 Zeta 函数的生成函数就是由计算机发现并证明的公式。

这就产生了一个非数学的理念问题，我们如何看待这些由计算机算法发现并证明的公式？不少数学家对这些完全用计算机推导证明出来的东西是不能接受的。

从前的数学，尤其是纯数学，全靠纸笔加大脑，别的只能起辅助作用。甚至为了纯粹的数学研究，对辅助工具的应用都有很多限制。比如我们大家熟悉的三等分角问题、倍立方体问题就对辅助工具有严格限制。只能用圆规、直尺，而且这直尺还不能带刻度。事实上后来有定理说凡是通过圆规直尺可以得到的点，只用圆规也可以得到。这样一来，辅助工具又限制到圆规，直尺也没有了。如果没有这些限制，这些问题都不是问题。很多业余数学家不明白这点，所以常常看到有人说他找到了三分角或倍立方体的方法。最搞笑的是有些人的证明里不但直尺有刻度，圆规还可以有角度量。

对于只相信纸笔和大脑的数学家，不能接受这些完全用计算机推导证明出来的东西那是很自然的事。

其实，这个问题并不是现在才有的。著名的四色定理的证明就用到了计算机的帮助，验证上千个特殊地图。另一个用到计算机来证明（或验证）的定理是著名的开普勒(Kepler）装球问题。这个问题困扰了数学家几百年。后来有人提出几个步骤来证明这个问题，其中的最后一步用到计算机来验证。据说其源代码与验证所产生的数据有好几个 Gbytes。对于这些借助于计算机来做大量验证的定理的证明，有相当长一段时间不被数学家们接受。现在情况要稍微好一点，大约是人们对计算机越来越信任。另一方面，一些人提出，有些定理，比如有限群的分类定理的证明用到几万页纸，而且前后发表在上百本不同的杂志上。这种证明的可靠性不一定就比计算机证明的定理强。后来有一些知名数学家提议，今后把数学定理都贴上标签，比如计算机辅助、大规模合作、构造性证明等等。

总体来说，计算机对数学（包括应用数学与纯数学）的帮助已经是一个不争的事实。而且会越来越多，越来越深入。事实上计算机对数学研究的帮助还有很多别的方式，我们这里就不一一列举了。

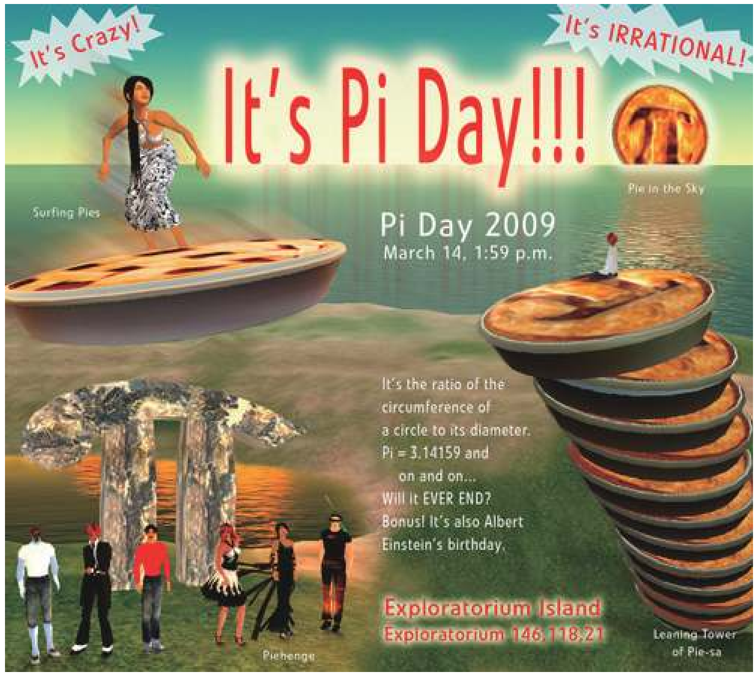
数学札记 4　π 的故事

在结束本文以前，顺便提一些与此相关的趣事，算是对感觉前面部分太枯燥的读者的一种补偿。

前面提到一个由 PSLQ 方法找到的关于 π 的公式，这个公式值得专门写一写。

我们的祖冲之把 π 算到七位在当时是一个很了不起的事。那时没有什么公式，完全靠内接正多边形去逼近，算到 7 位数差不多要算到边数上万的正多边形，相当辛苦。现在有了公式，算起来就方便多了。有一个递推公式，每多推一次就可以把位数精确度提高 4 倍。1，4，16，64 这样下去，开始那几项是完全可以手算的。有了这些公式，即使用手算也很容易算到几十位。

关于 π 的计算一直是搞计算的数学家们觉得有趣的试刀石。计算机的每一次升级都伴随着更多的 π 的位数的计算。我们知道，计算机速度的增长遵守一个莫尔规律，说的是计算机的运算速度大约每两年就要翻一番（也有说是 18 个月）。如果我们把 π 的位数的计算与计算机速度的增长做一个图，我们会发现这两个量线性相关程度相当高。现在有案可查的 π 的计算已经到了 10 的 13 次方。这就带来了一个问题，计算机程序出错是有可能的，我们怎么知道这些算出来的数字可信呢？前面提到的那个由 PSLQ 方法找到的关于 π 的公式有一个特性，那就是用它可以直接算出 π 的特定数段。比如直接算从第 8 亿位开始的 π 的数字，而不用算前面的那些位数。有了这



背诵 π 的吉尼斯世界纪录创造者：吕超

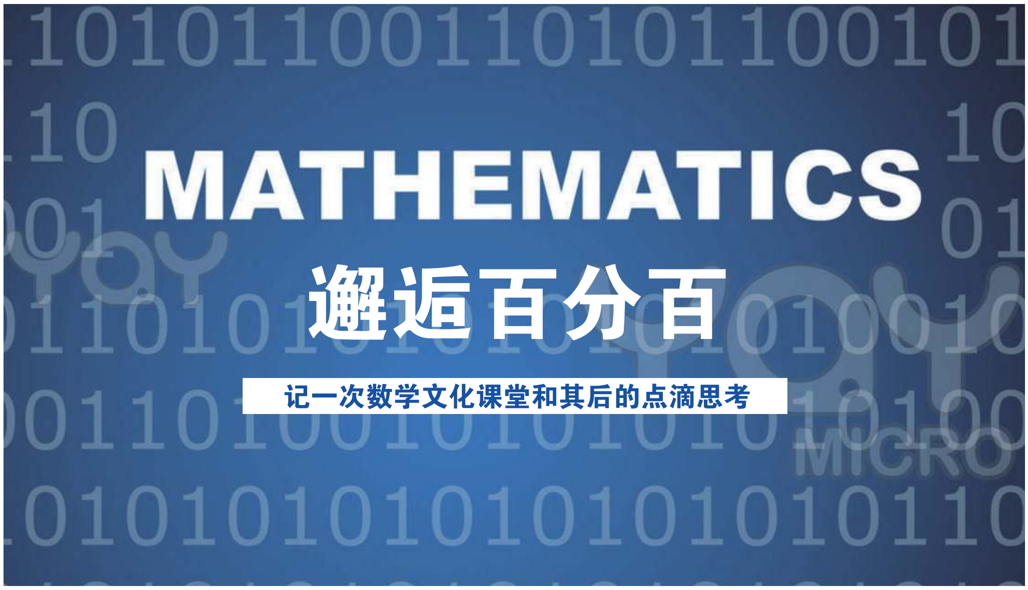
个特性，我们就可以用它来验证用别的公式算出的 π 值。随便挑出一截来，用这个公式验算一下，如果两个数值吻合，那么就可以几乎肯定这些数字不会错。

说到 π 的数字，我们知道 π 是无理数，也就是说它的数字永远不会有循环。曾经有人说我们永远不可能知道 π 的数字段中会不会有 0123456789 连续出现。这些人没有想象到计算机的速度可以进展得这么快（当然也因为有人发现更好的算法），这个数字段被人在 1997 年发现。它出现在 π 的第 17387594880 位数开始的那十位数。甚至到了 1989 年，英国数学家彭罗斯（Roger Penrose）还在他的名著《皇帝的新脑》里声称我们几乎不可能知道 π 的数字中是否会有连续十个 7 的出现。结果这个数段也被找到了。它出现在 π 的从 22869046249 开始的那十位数中。仔细想一想这其实不奇怪。π 的数字如果均匀分布，这些数字，0123456789 也好，十个 7 也好，都是一个很自然的十位数，只要算的位数足够多，每个数字的出现几乎都是很自然甚至必然的事。常常有人说数学家大都是无趣的人，这个关于 π 的自然而又奇妙的小知识可作为朋友聚会的话题，或许会帮你扭转一些无趣的印象。

目前背诵的吉尼斯世界纪录是吕超于 2005 年创造，当时这个西北农林科大的研究生用了 24 小时零 4 分的时间，背出 π 小数点后 67890 位数。根据竞赛规则，背诵每两个字之间的间隔不能超过 15 秒，所以他在参赛的一天一夜里不能吃不能打瞌睡，体力要求绝对高。

2009 年 3 月 12 日，美国众议院通过了一项决议，把 3 月 14 日确定为全国的 π 日。更有趣的是，麻省理工学院的招生办公室每年都把新生录取通知书留到 π 日才发送给新生。现在网络发达了，人家装了个程序等到 3 月 14 日下午 1 时 59 分 26 秒才在网上把录取通知向全世界发出去，对应 π=3.1415926。

作者简介：万精油，本科毕业于四川大学数学系。中国科学院数学研究所硕士，美国马里兰大学数学博士。业余时间爱好写作。以杂文、记事为主，科普为辅，偶尔也写小说。代表作为科幻小说《墨绿》。因为兴趣广泛，起笔名为万精油。



柳形上

数学文化作为当今我国大学数学教育中的热门话题，已经走进许多高校的课堂。数学文化课在华师大的开展已有多年的历史：最初有我国著名数学教育家张奠宙教授开设《数学文化透视》，而在近年课程调整后，数学文化已成为我校的一门通识限选课程。本文缘自作者在华师大的一次数学文化课堂的教学尝试。希望这些文字的简单呈现，可以分享那一课堂背后的点滴故事和数学感动。这段数学故事得由下面的一则游戏说起。

一则游戏

有个小游戏或许与想象力有关，这个游戏的名字是：什么能使生活变得圆满？

我们都学了许多年的英语，现在让我们发挥一下想象力，把英文字母与数字相联系，看看会发生什么？如果令 A, B, C, D …… X, Y, Z 这 26 个英文字母，分别对应于数字 1, 2, 3, 4 …… 24, 25, 26，那么我们就能得出如下有趣的结论：

有人认为努力工作就能使生活变得圆满，是这样吗？

HARD WORK（努力工作）

$H+A+R+D+W+O+R+K=8+1+18+4+23+15+18+11=98$

那知识呢？

KNOWLEDGE（知识）

$K+N+O+W+L+E+D+G+E=11+14+15+23+12+5+4+7+5=96$

那爱情呢？

LOVE（爱情）

$L+O+V+E=12+15+22+5=54$

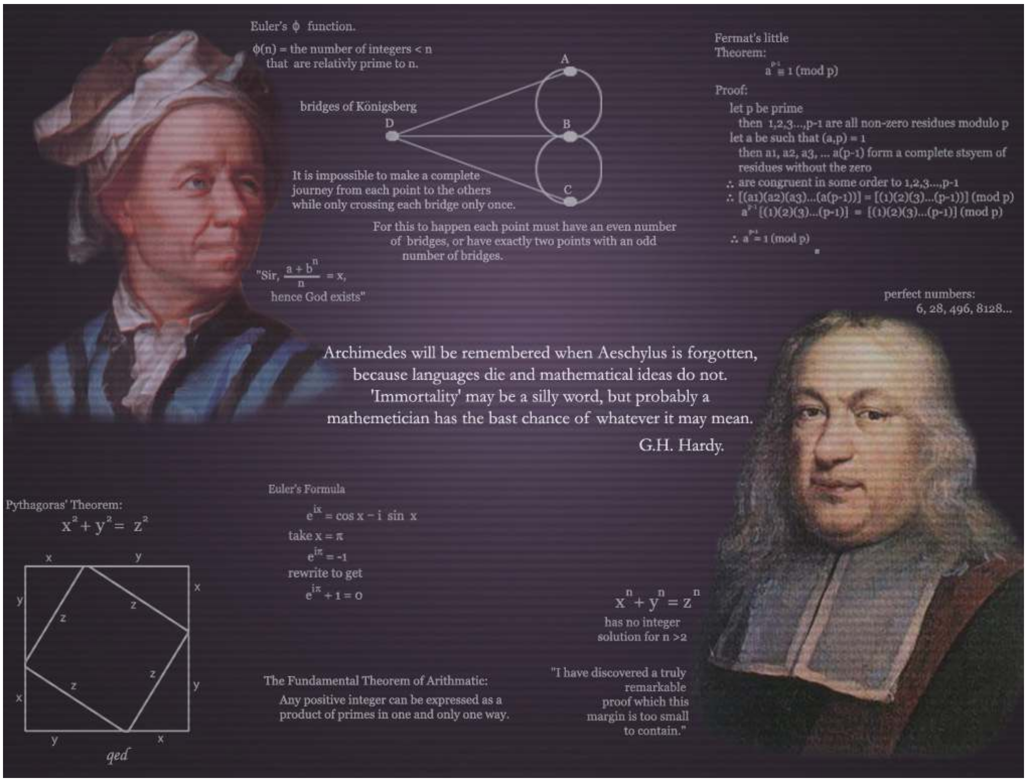
那好运呢？

LUCK（好运）

$L+U+C+K=12+21+3+11=47$

可以看到，这些我们通常非常看重的东西都不是最完满的，虽然它们非常重要。

那么，究竟什么能使得生活变得圆满呢？是 MONEY（金钱）吗？不！



M+O+N+E+Y=13+15+14+5+25=72

是 LEADERSHIP（领导能力）吗？不！

L+E+A+D+E+R+S+H+I+P=12+5+1+4+5+18+19+8+9+16=97

那么，究竟什么能使生活变成 100% 的圆满呢？

其回答是，

ATTITUDE（心态）！

A+T+T+I+T+U+D+E=1+20+20+9+20+21+4+5=100。

正是我们对待学习、工作、生活的态度能够使我们的生活达到 100% 的圆满！

有听过一句话叫：态度决定一切！若以积极向上的心态来融合我们的课堂学习，则我们的课堂可以是很快乐的拥有最大知识收获的课堂。而来到数学文化课堂的学生，大多都带着中学时代数学考试的烙印，对数学有着恐惧心理。如若可以改变这一消极的学习态度，相信我们必可或多或少走进数学文化的世界，读到其间所蕴藏的无穷魅力！

课堂间的花絮

Attitude，即态度，一个包含了诸多智慧、热情和创造力的词汇，又可以带给我们多少思考的财富呢？让我们经由上面的数字游戏的余香，来看看还有多少文字的精彩在此隐藏：

其后课堂的第 1 个问题是，按照其下的数字对应：

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

问：是否可以找寻到一些我们相识的英语单词，其数字和是 100?

1 + 20 + 20 + 9 + 20 + 21 + 4 + 5 = 100%
A T T I T U D E

Culture——这个单词曾在课堂前不经意间进入了我的视野。

C+U+L+T+U+R+E=3+21+12+20+21+18+5=100

是的。Culture，这个词汇的魅力或在于它联系着我们的数学文化课堂：Culture，文化。

于是可以想象课堂间有许多学生的数学童真刹那间被唤起——我们到底会有多少幸运，邂逅多少这样的英文词汇——其和等于 100？

有点惊讶的是，那段时刻我们并不是很幸运：在其后课堂间 10 分钟的时间里，三三两两的同学组合计算了许多他们熟悉的英语单词，可是却没有英语单词步入我们所期待的空间。

那么，若把我们的名字以汉语拼音的形式表达，并与上面的数字对应 ——是否会有哪位同学的名字隐藏着数字和为 100 的惊喜呢？这是我们课堂间的第 2 个问题。

——我们的课堂中依然没有那样的幸运者。

松下问童子，言师采药去；只在此山中，云深不知处。

贾岛的这首《寻隐者不遇》折射着一种很美的数学意境——我们可以相信，符合上面约定的单词或者名字会有不少，却偏偏可望而不可即。于是伴随着几许遗憾，我们暂离那一课堂的片断。上述单词对应数字之和为 100 的幸运者搜寻之旅或多或少折射出这样的单词并不很普遍，甚或很稀奇。这份寻隐者不遇的觅奇心理让许多同学对那一课堂片断留下比较深刻的印记。恰如一些学生在课堂后的文字说到的：

参加了“数学文化”的这堂课，说是“参加”而不是“上”，是因为这似乎不像是一堂课，而是一次让我们深深感受到数字魅力的活动。有一个领导者带领我们感受无处不在的数字和数学。

在这堂课上处处都有数字也有数学，但却没有十几年来让我们头痛的公式和计算。对于数学一直都不排斥也不讨厌，只是她没有像其他学科那样给予我足够的信心去学习和探索。这堂课让我有了这样的兴趣来研究数学，准确地说是数学和文化之间构架起的桥梁。

原以为文化类的东西会像经验上以为的那样枯燥无味，没想到一堂课下来彻底转变了我的观点，原来文化可以这么有趣，尤其是数学文化都可以这么生动！！

课堂后的寻隐者之旅

请在课后读书的闲暇，寻找一些其数字和为 100 的单词与名字——这很自然的成为我们数学课堂后的一个作业。我们的约定是，三个星期后让我们再来一起分享其间发现的快乐与感动。

其后的故事续篇折射着这样的哲理：等待也是一种希望。三个星期后，许多份作业的热情碰撞出幸运的火花。这里是同学们找寻到的其和是 100 的一些单词，汇总如下：

geographer（地理学家）	telephone（电话）	styles（风格）
useless（无用的）	turkey（火鸡）	whiskey（威士忌酒）
innovate（革新）	performed（表演）	repress（压抑）
profuse（充沛的）	strangled（突然止住的哭泣）	swimmer（游泳者）
swollen（涨满的）	discipline（纪律）	restore（恢复）
tailory（裁缝业）	orient（东方的）	excellent（优秀的）

闪烁在此间背后的故事的精彩、发现的快乐与数字的感动，已依稀远去。可其下一点文字的点滴或许可以让我们读到一部分同学邂逅隐者的那一份源自内心的喜悦。

我找到的单词是 pursue（追求），就像我一直在追求数学，虽然暂时赶不上他的脚步，但是我会永不言弃。相比而言，下面的数字发现让我们有些许惊奇。

毛泽东 MAO ZE DONG: 13 +1 +15 +26 +5 +4 +15 +14 +7 = 100 !

哈哈，领袖就是领袖，伟人就是伟人，我算了这么多帝王将相只有他老人家是 100。

在这许多的单词中，同学们比较偏爱的有：

Wednesday ,whenever, problems——它们离我们是如此的近。

Profuse, turkey, whiskey, orient, posting——这些单词中的字母各不相同。

……

这是一个很新颖的想法，被老师用在了课堂中，我相信，每个人心中，不仅是喜悦，更是一种感动。

一点注释，一点心想

在成千上万的英文单词的海洋中，这样的单词可以有很多。于是每一个参与游戏者都有着收获答案的希望。问：我们到底可以收获多少这样的单词？这又可以折射着同学间团结合作的力量和喜悦的分享。在众多的单词中，这样的单词的比例会有多少？这或许是一个很有挑战性的数学问题……这都是这个数字游戏的魅力所在。

回眸处，上面的数字游戏之所以带给我们数学课堂的心动，或也在于 26 个英文字母与 26 个数字的对应是如此的自然，而其和 100 的选择则符合我们对那一种完美的渴望。这有点像数学的公理化思想：《几何原本》的魅力或在于，经由一些人们普遍认同的定义和公理来构筑一几何学的大厦……书中虽有许多隐藏着秘密的不甚明了的地方，却无碍于我们对欧氏几何学许多定理的欣赏与赞美。

在每一个天才的思维字典里，或许隐藏着诸多思想的叛逆。伯兰特•罗素曾对数学如是说，“数学是这样的一门学问，在其中我们既不知道我们在谈论什么，也不知道我们所说的东西是否正确。”这句名言当包含着如下的含意：数学真理的相对性。《几何原本》的公理化思想曾是科学家们建构自然科学体系的典范。然历经两千多年的风雨，数学家们却发现在其外原来还有非欧几何奇妙的世界。

我们不妨给上面的游戏多加一点数字的遐想，比如，在同样的数字对应规则下寻找其和是某个数的单词。这个数的抉择或是随意的，却也可以带着数学的色彩——如 123，144（100-200 间的斐波那契数），153（独特的圣经数），198（我们名之曰樱桃河数）。且看如下的例证，其间隐藏有 2010 年上海世博会的元素：

Panama Pavilion = 144，

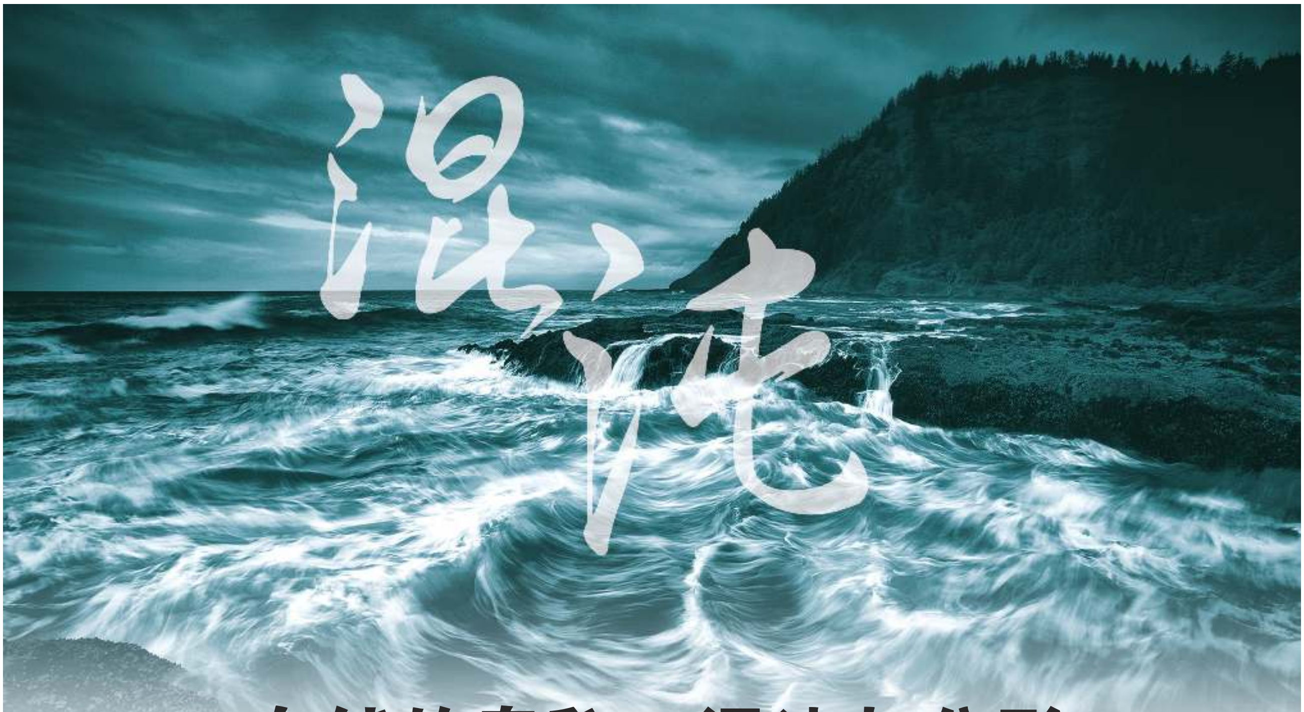
Turkey Pavilion = 198，

Australia Pavilion = 200。

这样的数字遐想，或许可以给我们打开一个很广阔的数学文化的星空。

一则很简单的数字游戏，在带给我们思考的快乐的同时，也诉说着如下的心声：数学文化的芳香，其实弥漫在你我的身边。

作者简介：柳形上，现任教于华东师范大学数学系，从事几何与 PDE 方面的一些研究；缘于华师大的数学传统而对数学教育和数学普及的文化事业有所兴趣。



自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。”——伽利略

（五）巴西海滩的“马蹄”

生于美国密西根州 Flint 市的斯蒂芬 • 斯梅尔（Stephen Smale, 1930-）是个有独特个性的数学家，这不光体现在他的数学研究上，也在于他独立思考的政治态度。1966 年夏天的 8 月，中国的文化大革命正在如火如荼之时，毛主席在天安门广场的城楼上接见激动得热泪盈眶的百万红卫兵小将，而此时的斯梅尔达到他个人学术生涯荣誉的最高峰：抵达莫斯科参加有 5000 人出席的国际数学家大会并领取菲尔兹奖。加拿大数学家菲尔兹（John Charles Fields, 1863-1932）去世前捐出 47000 美金建立了这个“数学的诺贝尔奖”，每四年全世界 40 岁以下的数学家只有二到四人获此殊荣，比得诺贝尔奖还难。

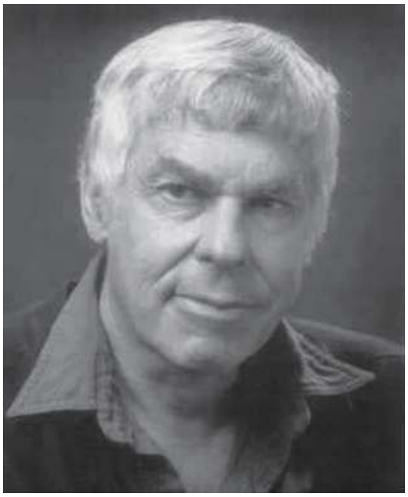
在国内，意气风发、精力充沛的斯梅尔就是一位“反越战英雄”。美国国会恰巧在他获菲尔兹奖的当天正在举行听证会，调查他和鲁宾（Jerry Rubin, 1938-）1965 年在他任教的加州大学伯克利校区建立从事反战抗议活动的“反动”组织“越南日委员会”并担任共同主席的这件事。国际数学家大会快要结束之际，在莫斯科大学的宽阔台阶上，年轻时曾经“左倾”的斯梅尔应一位北越记者的邀请举行了记者招待会。他以谴责他自己的国家对越南的武装干涉开始，这让招待会在场的主人、冷战时期的苏联人大喜过望。

突然间，他话锋一转，进而谴责苏联入侵匈牙利以及国内缺乏政治、言论和出版自由，这让刚刚高兴的主人尴尬不已。由于公开得罪了超级大国的政府，他立刻被请入汽车，在公众视野里消失了几小时，但仍受苏联官方礼遇，未有太大麻烦，可能是受惠于手中的菲尔兹奖章。还未回到美国，国家自然科学

基金会主任就毫不留情地马上扣下了资助他研究的两个月夏季薪水的第二张支票，并指控他一大堆“经济问题”，如“滥用政府资助，整夏欧洲旅游”。所谓“欲加之罪，何患无辞”。第二年当他继续申请自然科学基金会资助时，某些让基金会领导害怕的美国国会议员还不想“放他一马”，百般刁难。生性倔强的斯梅尔毫不妥协，在校方及数学家同仁的支持下最后以胜利告终。这真是极具讽刺意义的故事：批评过苏联缺乏言论自由的斯梅尔在标榜“自由、民主、平等”的祖国也饱吃了一餐“言论自由”的苦果。

斯梅尔出生在一个美国的共产党员之家，青年时代的他也加入过这个组织。这并不奇怪。在那时代，熬过三十年代大萧条的美国人有许多对共产主义的想法发生了兴趣，向往苏维埃制度。当代美国有数学家布劳德三兄弟（Felix Browder, 1927-, William Browder, 1934-, Andrew Browder），前两位都曾当过美国数学学会的会长。 他们的父亲老布劳德（Earl Browder, 1891-1973）担任过十六年美国共产党的主席（1929-1945），直至被他的“同志们”赶下了台。奥本海默年轻时也在共产党组织的边界上徘徊过，他后来自杀的美丽未婚妻以及他的弟弟都是共产党员。

斯梅尔在家乡一所仅有一间教室的简陋的乡村学校读到八年级，以全班第三名的成绩高中毕业，没有显现任何天才迹象，但被视为一个孤独者和象棋高手。不像匈牙利的冯•诺依曼或美国的费恩曼，中学时代的他不太是一个“算得快”的少年，可能像中国的传奇数学家陈景润（1933-1996）一样不太适合参与奥林匹克数学竞赛。他获得四年免学费奖学金在离家仅仅一步之遥的号称“美国大学之母”的密西根大学读本科，后来一直读到1956年，在


斯梅尔（1930-）

年轻的教授、匈牙利人博特（Raoul Bott, 1923-2005）门下获得他的博士学位。在密西根教书三十年后去了哈佛的杰出数学家博特是一个高大的斯洛伐克人，他在1953年开设了一门代数拓扑课，除了一大群旁听教师，只有三名本土的研究生注了册，其中的两人，斯梅尔和芒克斯（James Raymond Munkres, 1930-），都成了著名的拓扑学家，后者的教科书《拓扑学》一直是这个行当好评如潮的大学生标准教材。后来，博特却以调侃的口吻说过，第三位的研究生贝利（James Berry）是“真正聪明的一个”，可惜他未完成学位。

除了大一算是好学生，斯梅尔本科期间后三年的成绩大都是“非B即C”，甚至核物理课拿了个不体面的F（不及格）。这一部分原因是他对敏感政治活动的投入，在麦卡锡（Joseph McCarthy, 1908-1957） 主义“清算共产主义”方面不光与官方不配合，反而经常与校方对着干。幸运地被本系录取为研究生后，他的平均成绩依然是C，直到1953年6月收到系主任一封措辞强烈的“最后通牒”信，威吓着要赶他走，这才真正用功起来。从此，政治向数学低头，马列主义让位于拓扑学。大器晚成的他真是个“浪子回头金不换”的最好正例，也是流行中国的口号“不让孩子输在起跑线上”的最好反例。后来的斯梅尔以强有力的数学洞察力著称于世，例子之一就是他拿到博士之后在其学术生涯第一站的芝加哥大学教书首年，就与一般直觉相反地证明了数学意义上的“球体翻转”——他有生以来第一个世界级水平的结果。

斯梅尔最伟大的工作都和庞加莱创立的拓扑学和动力系统有关。拓扑学研究的是几何图形在像挤压、拉伸或扭曲这样的“连续变形”下仍然保持不变的那些性质。在欧几里得（Euclid, 前330-前275）的几何里，圆和椭圆是两样完全不同的东西，但在拓扑学里它们却被看成是一模一样的东西，因为一个圆铁圈一被挤压就变成一个椭圆圈。但是，一位少妇手腕上戴的玉镯表面和她儿子玩的皮球表面不光在欧几里得几何里不一样，在拓扑学里也不一样。学过拓扑学的学生都会津津有味地谈论为什么每个人头顶上都有一个旋窝，不长头发，他们也知道为什么地球上不可能每个地方都同时刮“不管是西北风还是东南风”。

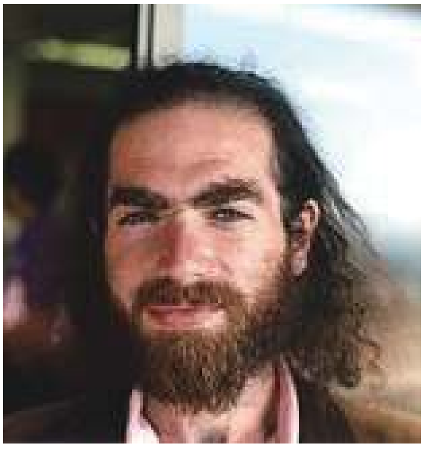
像斯梅尔这样的拓扑学家们考虑一个几何物体是否连通、是否有洞、是否打结。他们研究比我们的眼睛可以看到的一维曲线或二维曲面更为一般的“拓扑流形”。斯梅尔获得菲尔兹奖的成就是证明了对于维数大于四的“广义庞加莱猜想”，即1904年庞加莱提出的关于一类三维流形是否能与三维球面“拓扑等同”的著名猜想在四维以上的情形。四维的广义庞加莱猜想1982年被美国人佛雷德曼（Michael Freedman, 1951-）解决，并获菲尔兹奖。庞加莱猜想最终被俄罗斯数学天才佩雷尔曼（Grigori Parelman, 1966-）“临

门一脚”攻破，但他不光拒绝了随之而来的菲尔兹奖，而且拒绝接收由美国波士顿的成功商人兼数学爱好者克莱（Landon T. Clay）夫妇1998年设立的克莱数学研究所为全球公开悬赏求解庞加莱猜想而设立的一百万美元的奖金。

当斯梅尔摘取了庞加莱之树的第一个果实并奠定了他在本领域中的大师地位后，他“挥泪告别拓扑学”，踏进了动力系统的新疆场。奇怪得很，庞加莱这个取名为“动力系统”的小儿子在他死后五十年间没有他另一个儿子“拓扑学”那么风光，研究者寥寥无几，尤其是与微分方程有关的“微分动力系统”。历史是如此的巧合，几乎是同时，当洛伦茨在北美洲东海岸的美国麻省理工学院摆弄着他的天气模型时，斯梅尔在南美洲巴西里约热内卢的纯粹与应用数学研究所和临近的Copacabana海滩上发明了他的“马蹄”。

斯梅尔首先考虑的问题与动力系统的“结构稳定性”有关。低维系统的结构稳定性概念源于三十年代以柯尔莫果洛夫（Andrey N. Kolmogorov, 1903-1987）为首的苏联学派。1961年被美国哥伦比亚大学高薪挖去当正教授前，刚刚三十出头的斯梅尔在莫斯科见到比他更为年轻的四位崭露头角的数学家阿诺索夫（Dmitri V. Anosov, 1936-）、阿诺德（Vladimir I. Arnold, 1937-2010）、诺维科夫（Sergei P. Novikov, 1938-）和西奈（Yakov G. Sinai, 1935-），令他刮目相看，并叹息一声“西方并无这种组合”。巴西数学家佩肖托（Mauricio Peixoto, 1921-）研究圆这个特殊的数学框架时用到结构稳定性，但他未能将他得到的有关结果推广到更一般的动力系统。斯梅尔1958年申请到国家自然科学基金会两年资助到普林斯顿高等研究院做“博士后”研究，认识了早一年去那里访问的佩肖托，并洞察到这一概念的巨大前景。

佛雷德曼 (Michael Freedman, 1951-)



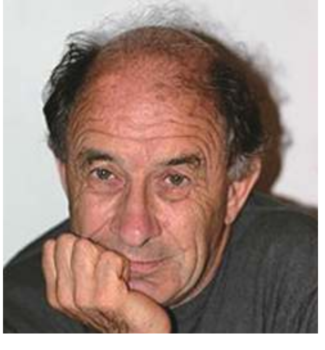
佩雷尔曼（1966-）

但是一开始，斯梅尔就给出了一个关于稳定性问题的错误猜测。其实，在研究家的探索过程中，这不奇怪。现在哈佛任教的卓越华人数学家丘成桐（1949-）因为证明极其难解的“卡拉比（Eugenio Calabi, 1923-）猜想”是对的，1982年荣获菲尔兹奖，但是一开始他差点儿“证出”卡拉比猜想是错的。

生活中到处都有关于稳定性的问题。站在高山之巅上欢呼的人要特别地小心，因为稍有不慎就会坠入深渊。但是年轻的父母不必担心放在圆锥形摇篮内的婴儿会掉下来。前一个情形的平衡状态是“不稳定”的，因为一个小小的扰动就回不了原先的平衡位置，而后一种情形的平衡状态却是“稳定”的，因为任何一个小扰动不会妨碍又回到原先的平衡位置。

上述的“稳定”或“不稳定”是关于一个固定系统的一个平衡点而言，因而称之为“平衡点的稳定性”，这是一个局部性的稳定性问题。斯梅尔关心的是一种全局性的稳定性问题，即当动力系统本身稍微改变一

柯尔莫果洛夫（1903-1987）



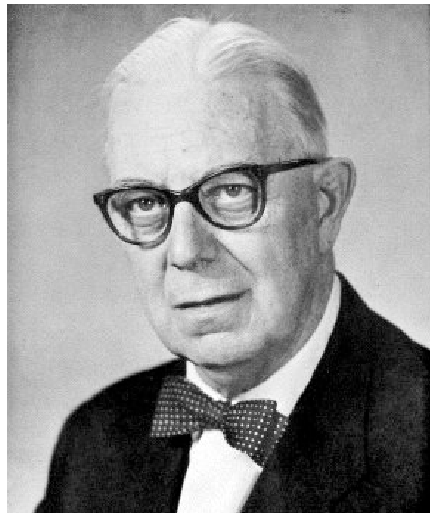
阿诺德（1937-2010）

诺维科夫（1938-）

西奈（1935-）

维纳（1894-1964）

莱温松（1912-1975）



范德波尔（1889-1959）

点时，系统的解是否有本质性的变化。这就是系统的“结构稳定性问题”。

如果原为圆锥形的山顶削成四面体形锥体，站在上面还是一样危险。同样，如果把圆锥形摇篮做成更为美观的半圆形摇篮，婴儿照样安全。所以，这些系统的小小改变并没有改变平衡点的性质，系统是“结构稳定的”。

有“结构不稳定”的例子吗？会画指数函数图像的人就有一例。中国的高中生都知道每一个以大于 1 的数 a 为底的指数函数 $y = a^x$ 的曲线都经过 y- 轴上半部和原点相距为 1 的那个点。它向上弯曲（向下凸）并且递增，底越大，递增越快，曲线越陡峭，底越靠近 1，递增越慢，曲线越平坦。当底为某一个特别的常数时，更确切地说，为 e（约为 2.71828）的 e 分之一次方这个在 1.445 附近的常数时，这条曲线恰好与 xy- 轴的对角线 $y = x$ 相切于 (e, e) 这个点，并站在对角线的上方。这就保证了这个特别的指数函数有，并且只有一个“不动点”（刚好为 e）。只要底比这个常数小，对应的曲线和对角线相交于两点，就是说该函数有两个“不动点”，而底大于这个常数的曲线再也不碰到对角线了，这时的函数就没有任何“不动点”。没有学过高中代数的人可以想象一根竖着的朝上开口的抛物线铅丝向上“穿过”一根挂衣服的水平绳线时的情形：先有两个截点，然后是一个切点，最后没有交点。

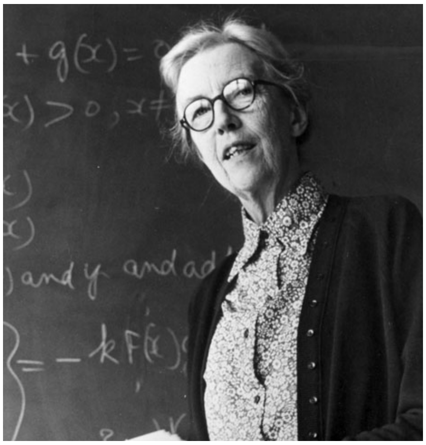
上面一段落的“千言万语”汇成一句话：底为 $e^{1/e}$ 的指数函数这个“系统”是“结构不稳定”的，因为底的变大或变小改变了不动点的数目。实际上，连不动点的性质也起了变化。懂得初等微积分并喜欢读读“课外书籍”的大学生可以打开《美国数学月刊》的姐妹期刊《高校数学杂志》（The College Mathematics Journal）2009 年 11 月的那一期，翻到一篇名叫“指数函数的动力学”的文章，其第二、三页上就有你想要看到的图形和分析。

斯梅尔考虑的描述微分动力系统的微分方程，带有可以取不同值的某些参数。例如，对于洛伦茨研究的热对流天气模型，流体的粘性指数就是一个参数。参数的大变化当然导致系统的解的大变化。自然地，人们都希望，小小的参数变化只会导致系统的解的微小变化，并且不改变解的主要性质，也就是说，系统是结构稳定的。

斯梅尔最开始的错误猜测大意是：具有不规则解的微分方程（即后来所称的混沌系统）不可能是结构稳定的。他定义了一类结构稳定的微分方程，后来被大家称为“莫尔斯（Marston Morse, 1892-1977）-斯梅尔型”，并宣称任何一个混沌系统都可用这类方程中的一个来任意逼近。学过大学矩阵理论的人可以这样来类比：具有固定行数和同等列数的所有的“非奇异矩阵”都可被看成是“结构稳定的”，而每一个“奇异矩阵”可被某个非奇异矩阵任意逼近。可惜的是，矩阵的这个性质在微分方程中的类似并不成立。

正当斯梅尔和他的太太在里约热内卢的临时公寓里被他们两个婴儿的尿布忙得不可开交时，1960 年元旦前寄来的一位数学同行的信让他大伤脑筋，就像十多年后年轻气盛的明日之星丘成桐公开宣称“卡拉比猜想”不对后不久，收到意大利出生的犹太人、美国宾夕法尼亚大学数学系讲座教授卡拉比本人寄来的“质疑信”那样令人苦恼。

这封信来自一位在维纳的熏陶下由电子工程硕士转变成的数学家、



卡特赖特（1900-1998）

李特尔伍德（1885-1977）

也曾是共产党员并在 1953 年在专门设立的调查共产党的国会非美委员会巨大压力之下“反悔”的麻省理工学院教授莱温松（Norman Levinson, 1912-1975）。他在信中描述了他于 1949 年发表的一篇论文中所考虑过的一个既是混沌的又是结构稳定的系统，小小的扰动并不让解的不规则性态消失掉。其实，这个“斯梅尔猜想”的反例是四十年前被一名荷兰工程师和物理学家范德波尔（Balthasar van der Pol, 1889-1959）研究过的刻画具有周期驱动电路的一个二阶非线性常微分方程。这个系统的解是不可预测的，但系统却实实在在是结构稳定的，和摇篮里的婴儿一样稳定得“固若金汤”。事实上，斯梅尔后来知道，洛伦茨将要研究的那三个微分方程解的不规则性在小扰动下也是保持不变的，但是他们当时并不认识对方，直到七十年代初约克把洛伦茨的论文给了斯梅尔后，他才知道洛伦茨这个人及其工作。

得到莱温松这个重量级数学家的启发，受过拓扑学训练而导致几何思维发达的斯梅尔深思熟虑，一下子“豁然开朗”。在他 1998 年发表在美国大众数学杂志《数学信使》（Mathematical Intelligencer）第二十期上的混沌：在里约的海滩上发现马蹄”这篇文章里，他回忆道：

“无论如何我最后说服自己莱温松是对的，而我的猜想是错了。混沌已经隐含在卡特赖特与李特尔伍德的分析之中！迷途已经解开，而我则作出错误的猜测。但是在这学习的过程中，我发现了马蹄！”

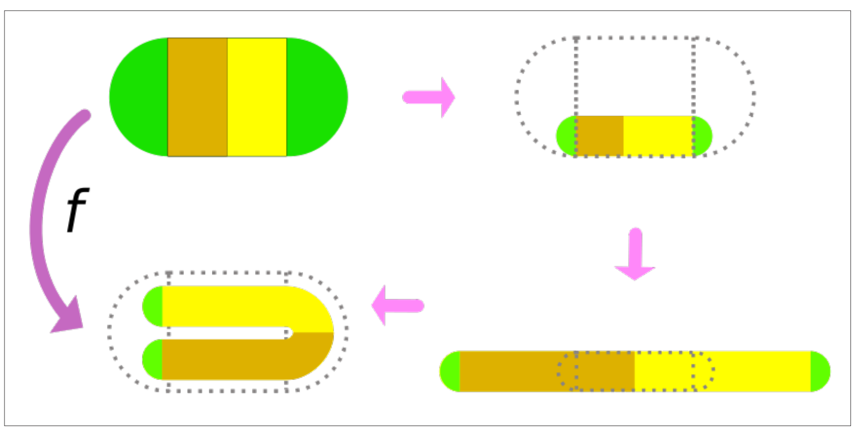
作为哈代（Godfrey H. Hardy, 1877-1947）与李特尔伍德（John E. Littlewood，1885-1977）这一“强强联手”在哈代 70 岁过世之后的“解析延拓”——哈代的博士生、“少有翻版”的英国女数学家卡特赖特（Mary Lucy Cartwright,1900-1998）与李特尔伍德形成了一个新的“科学组合”，他们对微分方程理论的精深研究，影响了这个领域的几代学者。

这个孕育在巴西海滩上的斯梅尔“骏马铁蹄”是怎样的东西？它又怎样踏进混沌的疆场？

我们在纸上画一个长方形，用 A、B、C、D 从左下角起顺时针来依次记它的四个顶点。我们设想把长方形横向拉长，同时纵向缩短，变成一个瘦长的长方形。这个过程有点像山西人做拉面，面条越拉越长、越拉越细。然后把它弯曲成一个马蹄形，使得长方形的左边出现在马蹄的上面顶端。马蹄对应的四顶点依次记为 A’、B’、C’、D’。下一步将马蹄放到原先的长方形上，它们相交成位于长方形内的两个有一定距离的平行的狭长长方形。

把这些操作复合成一步完成，就可以想象这定义了一个把长方形映到马蹄上的函数 h，它把长方形的每一个点映射到马蹄的一个点，例如，h 把 A 点映到 A’ 点，不同的点映到不同的点，相近的两点映到相近的两点。反过来，马蹄的每一点都是长方形的某一点被 h 映来。这个函数是一个拓扑学家们经常挂在嘴上的“拓扑同胚”。

斯梅尔构造的这个“马蹄函数”不属于他以前提出的“莫尔斯 - 斯梅尔型”的。他证明它不光是混沌的，而且是结构稳定的。其混沌与庞加莱在求解“三体问题”时苦苦思索



斯梅尔的“马蹄

康托尔（ 1845-1918）

康托尔三分集

过的同宿点存在性有关。同宿点联系着系统在将来和过去的相反方向时间都趋向于同一个不动点这一平衡状态。从美国第一代数学家领袖之一莫尔（Eliakim Hastings Moore, 1862-1932）手中拿到芝加哥大学博士文凭的伯克霍夫沿着庞加莱的思路进一步证明在同宿点附近有无穷多个周期状态。但是他的工作在之后的几十年内只是在故纸堆里睡大觉，一直到斯梅尔在巴西的研究所里叫醒它。

斯梅尔还记得当时的情形：“我从检视纯粹与应用数学研究所图书馆内的伯克霍夫文集而知悉同宿点和庞加莱的工作。”

我们已经看到在马蹄函数作用一次后，原先的长方形中有一部分的点将留在长方形内，这些点事实上构成两个平行的瘦高长方形。运用想象力，可以感知如果连续作用马蹄函数两次，那些仍然留在长方形内的那些点将组成四个平行的更瘦削的长方形。作用三次，就有八个平行的细细的长方形，看上去像物理光学实验课上看到的黑白相间的光谱线，它们的点在迭代马蹄函数三次后还留在原先的长方形内。不断迭代下去，我们就会“看”到愈来愈细、愈来愈多的“光谱线”。山西手工拉面的行家可能更容易体会它：多次拉面的动作就会拉出越来越多、越来越细的面条。这个漂亮的“几何图像”让我们立刻想起一个人，一个由于受到大权在握、极其富有金钱的同胞数学家克罗内克（Leopold Kronecker, 1823-1891）全方位的“数学迫害”，前后三十年一连串精神失常并在疯人院度过一生最后时光的倒霉德国人——“集合论之父”康托尔（Georg Cantor, 1845-1918）。

十九世纪末期的1883年，康托尔构造了实数轴上的一个点集合。他把0到1之间的数区间[0, 1]这一线段分成三等份，然后把中间那个等份的线段去掉，但留下它的1/3和2/3这两个端点。在剩下的两个线段[0, 1/3]和[2/3, 1]中再去掉中间的三分之一。这样就剩下四个小线段：[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]。再去掉每一段中间的三分之一，如此重复做下去，直至无穷。这样构造的一个点集称为“康托尔三分集”，它包含所有被挖掉的线段的端点和其他没被挖掉的点。事实上，这个康托尔集由不可数个点组成，但它本身不包含长度可以任意小的任何线段，无限地稀疏。

康托尔三分集的几何有个有趣的特色，这个称为“自相似性”的性质后来被“分形学”借了过去而大放异彩。如果我们只局限于看到三分集从0到1/3的这一段，一旦放大三倍，就会发现它的结构和原先的整个三分集一模一样。把0到1/27这一段放大27倍也是一回事。其实，三分集的任一小段放在放大镜下看都和整个三分集完全相同，就像小皮球放大一亿倍后看上去是个大月亮。这个数3就是康托尔集自相似性的“放大因子”。

康托尔的这个集合虽然出现在数学系本科生所修的课程《实变函数论》的教科书中，但跟他的其他伟大发现相比简直是“小巫见大巫”，只是他创造的震撼数学界的“集合论”大餐中的“一碟小菜”而已。故贝尔在他的大作《数学伟人传》中最后一章“失乐园？康托尔”谈到他的数学时就根本没提及到它。康托尔集除了在《实变函数论》中偶尔露个面，被关在集合论的象牙塔里几乎一百年，和美不胜收的自然界“老死不相往来”。

斯梅尔的马蹄动力学就这样和康托尔三分集联姻起来。将伯克霍夫早先的想法再向前推进，斯梅尔证明了他的马蹄函数同宿点的存在以及由此产生的迭代过程最终性态对初始状态的敏感依赖性，而这就是混沌的本质。几年后，他那里程碑式的著名长篇综合报告“微分动力系统”也在1967年被《美国数学会通报》（Bulletin of the American Mathematical Society）发表，马上被这个领域的建筑师们欢呼为一座“标志性大厦”

当数学家斯梅尔在他的微分动力系统开创性研究中大玩“高深数学”而大显身手的时候，他大概对一般只用到一点点“低级数学”的

马尔萨斯（1766-1834）

马寅初（1882-1982）

罗伯特•梅（1936-）

生物学“不屑一顾”。然而，就在这时，普林斯顿大学的一位动物学教授斩钉截铁地向世界宣告：简单的数学模型也可能复杂得令人咋舌。

（六）莫名其妙的人口涨落

十八世纪末的1798年，英国有位名叫马尔萨斯（Thomas Robert Malthus, 1766-1834）的经济学家出版了一本书《人口论》，忧心忡忡地提出了他的“人口理论”：人类赖以生存的生活资料是以算术级数增长的，然而人类自己却是以几何级数增长的。如果 n 代表未来的年数，前者的增长像 n^2，后者的像 2^n。当 n 为20时，20^2 仅为400，但 2^{20} 已经超过一百万。马尔萨斯解决人口过剩的简单而冷酷的办法是：战争。

一百六十年后，东方的中国也有一位姓马的经济学家。他的全名是马寅初（1882-1982），早年拿过美国哥伦比亚大学的博士学位，时任北京大学的校长。1957年，他在《新人口论》中也忧心忡忡地担心中国的人口如不注意节制，就增长太快了。他的担心是对的，但是相信“人多力量大”的最高领导认为他杞人忧天，不是另一个姓马的“共产主义之父”马克思的信徒。虽然他多年失去话语权，但每天洗冷水浴的他比活了99岁的贝特还多活一年。

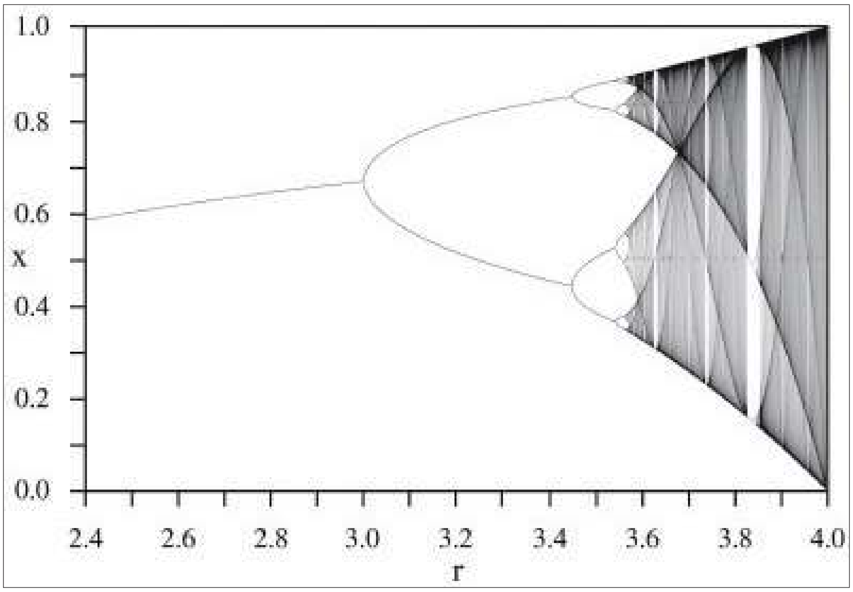
“人口动力学”这个学科并不一定要研究人，尽管研究人口很重要。中国人宋健（1931-）的“人口控制论”研究就在国际上有口皆碑。人口动力学更正式的名字叫“生态学”，英文术语是Ecology，研究的是生物种群数目的涨落、生命的盛衰。曾为英国“首席科学家”的罗伯特•梅（Robert M. May, 1936-）男爵就是在生态学领域里发现了混沌现象的一位生态学家。

梅和乌拉姆一样，生于律师之家，但不是犹太人。他1959年在祖国澳大利亚的悉尼大学获得理论物理学博士学位，然后去哈佛做了两年“博士后”，研究应用数学。回到母校做到理论物理正教授之后，他“心血来潮”地对生物学着了迷，1971年他到普林斯顿高等研究院呆了一年，不干别的，专找普林斯顿大学的生物学家“聊天”。1973年，硕果累累的他就成为普林斯顿大学的动物学讲座教授。

当年马尔萨斯的人口无限制增长模型太过粗糙了，因为它只用到线性函数。在食品无限充足的最理想情况下，如果一个种群的数目每年按某个增长率增加，那么种群下一年的数目为一个大于1的参数 r 乘上当年的数目，即迭代的函数为线性函数 $f(x) = r\,x$。这样的话，种群个数最终趋向无穷大，就像放在银行的存款永远不拿那样。然而，任何生命体有生，也有死，有复杂的生存环境，如天敌的存在。非洲狮子的数目不可能无限制增加，因没有足够多的斑马供它们享用，同样，斑马也不会太多，因为狮子总想吃它们。

这样，种群的数目必定随时间有升有降。要得到更反映现实的模型，生态学家合理地假设：种群数小时上升很快，数目适中时增长速度为零，而在数大时急剧下降。如果我们用0表示绝种，用1表示可设想的最大种群数，那么“相对种群数”x 由0与1之间的一个数来表示。满足上述自然要求的最简单的“相对种群数”函数是拿原先的线性函数 $r\,x$ 乘上因子 $(1 - x)$，得到的函数是一个二次多项式 $f(x) = r\,x\,(1 - x)$，其中参数 r 代表着种群的增长率。当 x 上涨时，$1- x$ 下跌，它们的乘积就会制约种群数目的变化。

这个最简单的二次模型称为“逻辑斯蒂模型”。它的函数图像是开口向下的抛物线。当 x 从0上升到1/2时，函数也跟着上升，但当 x 从1/2继续上升到1时，函数却随之下降。这恰恰反映了种群数目的涨落规律。



逻辑斯蒂模型的分支

这个函数的计算看上去连初中生都会难不倒，但在梅对它发生极大兴趣之前，没有人想到它的迭代点走向会复杂得如此令人眼花缭乱。后来的发展跟生态学家以前“种群数以相当规则的周期性在某个平衡点附近上下浮动”这个在大众眼里也说得过去的传统观念相悖。

梅开始了这样的迭代，并逐步增加参数值 r。他发现，当 r 不超过 3 这个数时，一切都很正常。比如说，如果参数 r 小于 1，那么无论起先有多少种群数，最迟第二年以后它的数目就逐步减少，最终走向消亡。但当 r 在 1 和 3 之间时，最后的种群数会逐渐稳定下来到某一个固定数，而全然不管开始的种群有多少。这个固定数随着参数增加而增加，在图像中表示为一条上升的曲线。举例来说，当参数为 2.7，最终的种群数固定在 0.6296，而参数在 3 时，终极种群数增加到 0.6667。

他继续加大参数的值。当 r 比 3 大得不多时，直到大约 3.45 的时候，他发现了新的现象：固定数曲线像《西游记》中沙和尚的月牙铲一分为二。种群数不再最终趋向于一个固定的值，而是按年份交替地先升后降（或者先降后升），最后在两个不同的固定数之间不停地来回跳动，而与最初的种群数无关。让参数值比 3.45 再大一点点，直到差不多 3.54 时，“月牙铲头”的两端又各生一个新的小“月牙铲”，即种群数每过四年有规则地涨落，最终在四个固定数之间周而复始地跳来跳去，而不管种群的初始数目有多大。这样一来，种群数的两年周期现象加倍成四年周期现象。

随着参数值一步步地提高，种群数目的周期数一次次地加倍。这种“倍周期分叉”现象既复杂得令人目瞪口呆，又美丽得令人目不暇接。这使我们想起古代中国的《周易》内的一列排比句：

“无极而太极，太极而两仪，两仪生四象，四象生八卦。”

这些分叉的参数值向前移动步伐越来越小，速度越来越快，周期数依次走过 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …，突然参数值到达一个极限点，在这一点的参数值，其不错的一个逼近是 3.57 这个数，周期现象戛然而止，种群数开始呈现一种像随机数一样无规律的涨落现象。

但当参数值继续向前走，稳定的周期又飘然而至，继续上升后，又冒出一个具有像三或七这样的奇数周期的“周期窗口”，在此窗口内，以周期三或周期七开始的倍周期分叉更快速地行进，然后再次中断而进入新的混沌。

这些都是在参数还未走到最大容许值 4 之前发生的怪事。当参数靠近 4 时，其迭代序列也变得愈加复杂。最后，参数为 4 时的种群数模型就是乌拉姆和冯•诺依曼研究过的那个函数，它复杂的动力学性态早已为人所知。

梅只看到参数由 3.45 变到 4 这整个图形的部分现象。这就足够了，“简单数学模型具有极其复杂动力学行为”的这一惊人发现足以让他在《科学》和《自然》这些顶尖学术期刊上让全世界的人看到自然界的新奥秘。关于这个最简单的非线性模型的大量数值实验将由纽约大学柯朗（Richard Courant, 1888-1972）数学研究所的生物数学家霍本斯台特（Frank Hoppensteadt, 1938-） 来完成。他选取了好几千个参数值，在计算机上画出迭代的参数变化分叉图像。他最后由此而拍成的电影充分显示了从分叉到混沌、从有序到无序不同瞬间的千变万化。霍本斯台特后来当过李天岩任教的密西根州立大学的理学院院长，还保持对研究的热爱。他八十年代在数学系放映了他的电影，让当时刚入学不久，李天岩教授招来的还不懂混沌的中国大陆弟子们大开眼界。

梅和洛伦茨一样发现了在不同学科中出现的自然界混沌现象，但是依然困惑于数学上精确、贴切的解释。历史给了数学家极好的机会，在这些科学研究的背景下，混沌的数学概念在李天岩与约克的著名论文中横空出世。

（七）"周期三则乱七八糟"

1973年3月的一个星期五下午，美国马里兰大学数学系的博士研究生李天岩来到他博士论文导师约克教授的办公室吐了一阵子"苦水"，到现在他还记得当时吐的是什么苦水，大概是什么"非少年维特"类型的烦恼吧。

约克完全没有理会他吐的苦水，却说，"I have a good idea for you!"

这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。那时李天岩正在做微分方程方面的研究，以为他所谓的"good idea"是关于那个方面的"高深想法"。但是，他心中的那点不爽还在那里。

李天岩（稍有羞辱并半开玩笑地）："Is your idea good enough for the Monthly?"

Monthly指的就是美国几乎每个大学数学系都订阅的《美国数学月刊》这个一般大学生都能看得懂的浅近杂志。当李天岩从约克嘴里得知这个牵涉的语言非常基本的"idea"之后，马上感慨地说：

"It would be a perfect work for the Monthly!"

李天岩祖籍湖南，1945年6月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获得医学博士学位，1934年回国任教湖南湘雅医学院，1939年起任福建省省立医院院长。

李天岩曾经回忆道："我父亲当初在湘雅医学院教书时，把小叔李震勋从家乡带出来到湘雅念书。可是小叔要'革命'。父亲跟他说，你要革命可以，可是要把书念好了再'革'。小叔还是跑到延安念'抗大'。解放后，他做了第一任的大连医学院院长。1958年反右，他就下台了。1968年文革时，再抓出来斗一斗就斗死掉了。我们在台湾知道了这事，都不胜唏嘘。"

李天岩三岁时，国民党在大陆大势已去，他的父亲也到了台湾，而他随母亲还滞留在上海。母亲家中及亲戚们劝她及孩子们不必逃了，定居下来再说。他们说这只是换朝代，几个月后就会平静下来了。可是父亲却坚持认为"绝非如此"，一定得离开，因为前景是不可预测的（这正是"混沌"的本质意义）。

李天岩母亲当时说："我必须立即去台湾，因我丈夫在那里！"

多年后，当李天岩的学生丁玖（本文作者），听到他亲口讲述的这段往事时，感慨万千。

丁玖对他说："如果你母亲当初做了相反的决定，那你就是大陆'文化大革命'中众多命运多舛的五类分子之子。"

是呀，如果历史改写，难以想象那个未来出了大名的"李约克"混沌的"姓"会是哪个"张三李四"。

李天岩与母亲感情极深。他1969年离家赴美后的几十年内从不中断地给常年住在台湾的母亲寄信，一写一整页，直到她2007年以89高龄去世。有一天，他问丁玖：

"你多长时间给你母亲写一次信？"

"大约一个月一封，基本是双方收到信就很快回信。"他的学生不无自豪地答道，因为深知"烽火连三月，家书抵万金"的他相信二十年如一日坚持写家信给远在家乡扬州、"桃李满天下"的父亲丁一平和母亲王柳风，在大陆留学生当中也不会多见吧，因为打越洋电话既方便又便宜。

"我每周写一封。"

"那怎么可能？你妈妈还没有收到你的信呢。"

"一星期写一封反而好写多了，什么鸡毛蒜皮的事都可以写。若是半年写一封还真不知写什么好。"

李天岩在台湾读书直至大学毕业，1968年为新竹清华大学数学系第一届毕业生，成绩名列前茅，踢过足球，也当过大学篮球队队长，是个全面发展的好学生。在按规定服役军队一年后，他赴美国马里兰大学数学系攻读博士学位。不久就通过博士资格考试，跟随约克教授做博士论文。

李天岩曾听约克说过他当年在哥伦比亚大学读本科时，"没有B"。在中国式教育环境中长大的李天岩以为他"全是A"。

约克却说："全是C或C以下。"

看来约克和斯梅尔大学读书时差不多一样"差"，或许"更差"点。这令人想起1976年诺贝尔物理奖获得者、祖籍山东日照的麻省理工学院实验物理学家丁肇中（1936-）曾经说过的一句"俏皮话"："我没有听说过哪一个诺贝尔奖获得者曾经是班上的第一名，倒是听说过是班上的倒数第一。"

2005年5月在李天岩的母校台湾新竹清华大学主办的庆祝他六十周岁生日的"数值分析与动力系统国际研讨会"上，约克承认当初上大学时是"有一、两个B"。"大概是体育课之类的，"他笑眯眯地对他昔日徒弟说。

詹姆斯•约克（1941-）这个纯粹的美国教授一生致力于数学与科学的联姻，他对上世纪上半叶领头的英国数学家哈代在其著名的随笔《一个数学家的自白》（A Mathematician's Apology）中以"无用"作为"美学标志"并引为自豪的纯粹数学家"象牙塔"式研究颇不以为然。1963年本科一毕业，他就直奔马里兰大学读数学博士，只因那里有一个流体力学与应用数学研究所这一巨大的"非奇异吸引子"。倘若过去一百年来世界上最伟大的两名数学家庞加莱和希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）都在马里兰大学教书，约克会

毫不犹豫地选择庞加莱作为他的博士论文导师的，因他在言行上与前者那个法国人更为合拍，而至少在哲学上不太欣赏后者那个东普鲁士人更重视公理化、形式化的数学思想。

1972年，马里兰大学气象学教授费勒（Allen Feller）将洛伦茨关于气象预测模型的那四篇在气象学家眼里理论性太强、数学味太浓的论文递给了同在流体力学与应用数学研究所的约克教授，认为数学家们也许会感一点兴趣。多亏了费勒的“引见”，约克和他的博士研究生李天岩才能接触到洛伦茨发表在气象期刊上的论文。他们的确对此“甚感兴趣”，约克甚至将那篇最重要的一文“确定性的非周期流”复印一份，在首页贴上了自己的名字和地址，交给了来访的斯梅尔。后者惊奇地读到一位气象学家十年前就发现了自己一度认为数学上不大可能的一类混沌现象，接着他也复制了许多份给别人看看。因为约克的大名也被复印上了，这就是为何坊间曾经流传过“约克‘发现了’洛伦茨”这一说法。

约克从洛伦茨试图求解的那三个微分方程的解对长远时间的“不可预测性”，提炼成一个关于函数迭代最终性态的问题。他猜测，一个连续函数只要有一个周期为三的点，这个函数的迭代就大有玩头。所以，他要他的得意弟子试试能不能证明他的判断。

什么是“周期为三的点？”一个过程如果连续使用三次，又回到初始状态，这就是周期三现象。比如三个小朋友玩皮球。甲把球抛给乙，乙将球抛给丙，而丙又把球抛给了甲。这就完成了一个周期三循环。

中学生都知道什么叫函数。对于一个给定的函数f，如果存在三个互不相等的数a, b, c，使得函数f在a的值为b，在b的值为c，在c的值为a，那么我们就说函数f有一个周期为三的点，并有一个周期三轨道$\{a, b, c\}$。比如，让我们观察下面这个函数$f(x)$：

当x大于或等于0并且小于或等于1/2时函数值为2乘上x，而当x大于或等于1/2并且小于或等于1时函数值为2乘上1减去x。

这个“逐片线性函数”的函数图像就像第二次世界大战时，英国首相丘吉尔（Winston Churchill, 1874-1965）把他粗壮的食指和中指分开形成的那著名的英文单词“Victory”（胜利）大写第一个字母“V”，但是把它上下颠倒一下。它看上去又像远方的帐篷或我们头上戴的帽子，故想象力丰富的数学家们把这个函数也称之为“帐篷函数”或“帽子函数”。每一个人都能够算出函数值当x等于2/7时为4/7，当x等于4/7时为6/7，当x等于6/7时又回到2/7。这个最简单的非线性函数的确有周期为三的点。

稍微复杂一点的具有周期三点的例子是乌拉姆和冯•诺依曼研究过的那个抛物线函数$f(x) = 4x(1-x)$。喜欢动手算算的人可以验证，f把$\sin^2(2/7)$映到$\sin^2(4/7)$，把$\sin^2(4/7)$映到$\sin^2(6/7)$，把$\sin^2(6/7)$映回到$\sin^2(2/7)$。

两个星期之后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了约克的想法真的是一个“good idea”。具体地说，巧妙不断地运用初等微积分中的“中间值定理”，李天岩证明了这个后来出了大名的**李-约克定理**：如果一个连续的函数有一个周期为三的点，那么对任意一个正整数n，这个函数有一个周期为n的点，即从该点起迭代函数n次后又第一次返回到这个点。更进一步，对于“不可数”个初始点，函数从这些点出发的“迭代点序列”既不是周期的，又不趋向于一个周期轨道，它们的最终走向将是杂乱无章的，无规律可循。

什么是“不可数”？一群对象，如果它们的“个数”比所有的自然数的“个数”还来得多，同时又至少和所有的无理数一样多，那么我们就说这群对象的个数“不可数”。所有的实数，即把所有的分数和所有的无理数放在一起，是不可数的。同样地，任意两个不同实数之间的所有实数也是不可数的。李天岩和约克的伟大发现是只要有“周期三”出现，就有数也数不清的初始点的“混沌轨道”出现，这些轨道的未来走向是“不可预测的”。

李天岩解释说：“理工科的大学生都学过‘中间值定理’。这个定理的几何意义十分显然：若用一条连续的曲线来连接位于一条直线一边的点A和另一边的点B，那么这条曲线一定穿过这根直线。用这条直观上人人理解的定理我们能进一步证明，如果一个连续函数把一个区间映成包含该区间的一个更大的区间，那么区间里一定有一个点，它在这个函数的作用下不会变。也就是说，这个点是这个函数的一个‘不动点’。这是整个定理证明的基本思想，大学生们都能看得懂。”

当文章写好后，尽管李天岩心里想到的是投给令人尊敬的高等专门杂志，但约克却有他自己的想法。正如英国“当代的爱因斯坦”霍金（Stephen W. Hawking, 1942-）的畅销书《时间简史》的责任编辑所云：“书中多一个公式，就会少一半读者。”同理，越是高深专门的杂志，读者越是稀少。约克决定要让天下的人都知道他的“好想法”。

这样，按照约克的意图，他们把这篇题目直截了当的论文“周期三意味着混沌”寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》，文章列出的所有“参考文献”只有洛伦茨的那四篇论文。但投稿后不久，文章就被编辑

退回，理由很简单：该文过于研究性，不太适合此期刊所重点面向的大学生读者群。编辑建议作者把原稿转寄其他的杂志，但又加了一句话，若他们能把文章改写到一般学生都能看懂的地步，可以再投回《月刊》。

但是，李天岩太忙了。他正在做微分方程等方面的博士论文研究，又对数值实现荷兰大数学家布劳威尔（Luitzen E. Jan Brouwer, 1881-1966）名闻天下的“不动点定理”有了特大的兴趣，埋头苦干地开辟计算数学非线性方程组数值解另一片崭新的土地。他既没功夫改这篇文章，也不知道怎么改它。于是乎，这篇文章就在他桌上被搁置了将近一年。

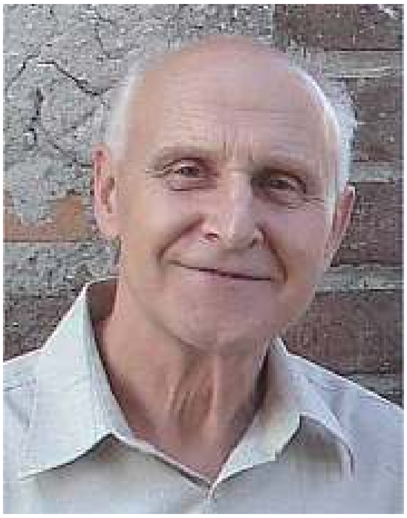
天赐的良机到了。1974 年是马里兰大学数学系生物数学的“特殊年”。在这一年里，每星期都要请“生物数学”这个领域里最杰出的学者来系里演讲。在五月份的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。在其最后一天的报告中，梅讲了令他着迷的种群生物学中那个带参数简单二次模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的合理解释，想象中也许只是计算上的什么误差所造成的吧。约克听完梅的讲演后，在把他送去飞机场的时候，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关于李 - 约克定理的文章给他看。梅看到了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大地解释了他的疑问。

约克从机场回来后立即跑到李天岩的办公室。

约克喊道：“我们应该马上改写这篇文章。”

文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

现今世界上稍微了解一点混沌学的人，无人不知李天岩与约克这



沙可夫斯基 (1936-)

篇篇幅不长、令他们一举成名的论文。该文不光证明了现已众所皆知的“李 - 约克混沌定理”，并且第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义，因而首创了“混沌”这一数学名词。它承上启下、推陈出新，开拓了整个数学界、科学界对混沌动力系统理论和应用研究的新纪元。

梅教授那年夏天到欧洲到处演讲，也让“周期三意味着混沌”的作者名扬天下，后来约克也被邀请到处讲他们的“混沌”。几年后的某一天，在东柏林一个国际会议上做完报告后，约克和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈。在一位既懂英文、又通俄文的波兰朋友的帮助之下，约克才听懂对方这位名叫沙可夫斯基（Oleksandr M. Sharkovsky, 1936-）的乌克兰数学教授比他早十来年就证明了较李 - 约克定理第一部分似乎更为一般的结果，并发表在西方人几乎看不到的《乌克兰数学杂志》1964 年第 16 期上。相识四个月以后，约克收到了沙可夫斯基寄来的他那篇论文。

冷战时期，苏联一些数学家，尤其是那位不时挖苦一部分西方数学家、2010 年在法国因病突然去世的俄罗斯“首席数学家”、20 岁不到就因证明“任意一个多变量的连续函数都可以由有限多个两个自变量的函数构造出来”而解决了希尔伯特在 1900 年国际数学家大会上提出的第十三个“世纪问题”、1965 年就和他的老师、上世纪全世界最伟大的数学家之一柯尔莫果洛夫同获苏联最高荣誉“列宁奖”的阿诺德，生前有时冷嘲热讽地说道：

“你们美国人搞的东西，我们苏联人早就搞过了。”

这话有时部分地不假，沙可夫斯基定理便是一例。在这篇“线段连续自映射周期之共存性”的论文中，沙可夫斯基硬是把连小学生都熟知的自然数的“自然顺序”1, 2, 3, 4, 5, … 打乱重来，按如下的新方式排成一列：

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, … , 即除 1 以外的所有奇数

$2\cdot3$, $2\cdot5$, $2\cdot7$, $2\cdot9$, $2\cdot11$, $2\cdot13$, … , 即 2 乘上上一行的每一个数

$2^2\cdot3$, $2^2\cdot5$, $2^2\cdot7$, $2^2\cdot9$, $2^2\cdot11$, … , 即 2 乘上上一行的每一个数

$2^3\cdot3$, $2^3\cdot5$, $2^3\cdot7$, $2^3\cdot9$, $2^3\cdot11$, … , 即 2 乘上上一行的每一个数

…………………………………… ,
等等、等等

…, 2^7, 2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0。即由大到小排列 2 的所有次方

他严格地证明了他的现已广为人知的**沙可夫斯基定理**：如果一个连续的函数有一个周期为 m 的点，则对在上述次序中排在 m 后面的任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点。

因为自然数 3 在沙可夫斯基的排序中名列第一，即其余的自然数都排在它后头，所以如果在沙可夫斯基

定理中让 m 为 3, 那么对任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点。哈哈，这就是李 - 约克定理的结论之一。因而后者只是前者的特例，或者，按照数学教科书的一般写法，李 - 约克定理之第一部分是沙可夫斯基定理的一个“推论”。

如果连续函数有一周期为九的点，那么由沙可夫斯基定理可知，除了可能没有周期为三、五、七的点，该函数有周期为任何其它数的点。这却不包括在李 - 约克定理之中，尽管李天岩和约克在他们的论文中给出一个连续函数的例子，它有周期为五的点而没有周期为三的点。

但是严格地说，李 - 约克定理中“周期三推出所有周期”并不能看成是沙可夫斯基定理的特例。事实上，李 - 约克定理的假设是：存在一个点 a，函数在该点连续迭代两次都变大，但第三次迭代的结果不大于 a，或函数在 a 连续迭代两次都变小，但第三次迭代的结果不小于 a。用不等式表示，就是

$$f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a) \text{ 或 }$$
$$f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a),$$

而“周期三点存在”的假定只是适合这些条件的一个特例。

李天岩评说道：“我们定理的更一般假设和沙可夫斯基的序列有一个很大的不同，可是这在应用上却有极大的差距。好比说在种群动力学上，种群的第一代和第二代都是在增长，但是在第三代却突然大降，于是乎什么‘鬼现象’都可能发生，但是第三代的种群数要降到和第一代一模一样（意指周期三点存在）恐怕不大可能。从这个角度来看，沙可夫斯基序列也许比较适合放在象牙塔里。”

由于沙可夫斯基定理关于周期点的结论看上去远较李 - 约克定理一般，在讲述函数迭代性质的“离散动力系统”这门学科的一些教科书里，作者干脆只介绍沙可夫斯基定理，而对李 - 约克定理只字不提。

尽管沙可夫斯基定理关于周期点的部分比李 - 约克定理更为一般，但只有李 - 约克定理特有之第二部分才深刻地揭示了混沌现象的本质特征：混沌函数的逐次迭代关于初始点的敏感依赖性，以及由此产生的迭代点序列最终走向的不可预测性。它向科学界给出了一个超乎于数学结果的信息：混沌无处不在，模拟自然系统的看似简单的非线性函数可能会展现极其复杂的动力学性质。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一，已经被引用了约两千六百次。

1985 年炎热的夏天，一身是病的传奇人物李天岩教授（他的故事可见《数学文化》杂志 2011 年 / 第 2 卷第 3 期）第一次回到祖国大陆，整整两个月，他南抵广州中山大学、北至长春吉林大学，东到浙江杭州大学、西临西安交通大学，中达北京中国科学院理论物理研究所，马不停蹄地讲解“混沌”或其他学术专题。在其学术演讲中，李 - 约克原始论文的英文题目“Period Three Implies Chaos”被他形象地翻译成“周期三则乱七八糟”。

具有五千年文明历史的中华民族从古到今不乏像十八世纪德国智者康德（Immanuel Kant, 1724-1804）那样“仰望星空”的哲人。自从“周期三”被它的作者、被“混沌”的传播者们带进中国，神州大地的哲学爱好者们掀起了一股数字“三”的考据热。只要在“百度”网站上打入“周期三与古代混沌思想的关系”、“周期三则乱七八糟”或者“混沌的哲学解释”诸如此类的关键词，就可看到“科学意义上的混沌”五花八门的中国式哲学解释：

老子（约前 571- 前 471）：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”

庄子（约前 369- 前 286）：“南海之帝为倏，北海之帝为忽，中央之帝为浑沌。”

王充（27- 约 97）：“元气未分，浑沌为一。”（《论衡 • 谈天篇》）

在西方学术界，类似的哲学解释颇为罕见，也许是因为西方文明是在古希腊的演绎推理法的地基上竖起的“埃菲尔铁塔”。当然，古希腊的神秘主义者和“数学证明”的引入者毕达哥拉斯（Pythagoras, 约前 569- 约前 500）学派认为“万物皆（整）数”。他们把一称为“神圣数”、二“女性数”、三“男性数”、四“公正数”、五“婚姻数”，然后有代表着“友善”、“完美”、“丰富”、“自恋”等等的数，这样，数字被人性化了。

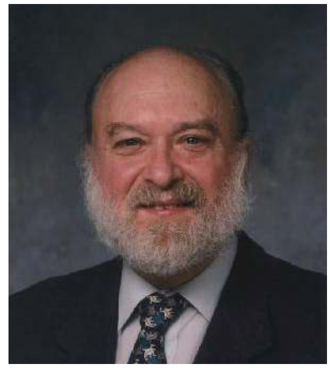
东方文明则更爱好归纳法和类比法。在汉语里，三和九都和“多”这个概念有关系，但前者表示的“多”少于后者。包含“三”的常见成语有“三思而行”、“三申五令”、“三人成虎”、“三教九流”、“一而再、再而三”、“三人行必有我师”，“三个臭皮匠，赛过诸葛亮”。但它们与“周期三”的隐含风马牛不相及。其实，“周期三意味着混沌”只是一个被严格证明的“不朽”的数学定理，并没有什么“一脉相承”的人文历史渊源或者“牵强附会”的哲学理由。如果“三”这个数字值得“大书特书”，“五”为什么不能呢？它毕竟是写不出解公式的一般代数方程式的最低次数。

事实上，从数学上来看，仅仅“周期一”或“周期二”点的存在并不引起一些“波澜壮阔”的事发生。比如，对于“恒同函数”$f(x) = x$ 来说，它的每一个点 x 都是“不动点”，即周期为一的点，但这个函数没有任何周期为大于 1 的周期点，是一个完全“规矩”的函数。对于“变号函数”$f(x) = -x$，每一个数 x 被映到它的相反数 $-x$，所以，除了 0 这个周期为一的点以外，


费根鲍姆（1944-）


威尔逊 （1936-）


费希尔 （1931-）


卡丹诺夫 (1937-)

每一个非零数都是周期为二的点。因而变号函数没有任何周期为大于 2 的周期点，也是一个特别“规矩”的函数。这两个函数的共同特点是，他们分别为严格递增或严格递减的“单调函数”，前者自变量越大函数值越大，后者自变量越大函数值越小。但当函数有了周期为三的点，它必定是一个非线性的非单调函数，它的函数图像上可以有山峰，可以有山谷。就像古诗“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”描绘的那样，翻山而过，眼前一片姹紫山红、气象万千，一派“混沌”的满园春色出现了。

李 - 约克“混沌”定义的破土而出，不光让世人的焦点聚集在洛伦茨十年之前注意到的混沌天气微分方程以及近年来梅所考虑的混沌种群差分方程，更引发了物理、工程、甚至社会科学探索混沌动力系统的热潮。

但是，七十年代的中末期，另一场“革命”正从一个科学怪人的手指前端汩汩地流出，继而“飞流直下三千尺”，“不飞则已，一飞冲天”。

（八）洛斯阿拉莫斯的“幽灵”——

一百六十年前，马克思、恩格斯在《共产党宣言》中第一句开宗明义地描绘道：“一个幽灵，一个共产主义的幽灵，在欧洲徘徊。”1974 年，一个披着长发的“幽灵”，经常在洛斯阿拉莫斯深夜的街道上游荡。

七十年代的洛斯阿拉莫斯国家实验室，早已从三十年前奥本海默时代的战时紧张中缓和过来，尽管大部分科学家“像士兵从战壕撤退一样回到各自的大学教书”，但这个曾经一片荒凉的地方已成长为一个引诱年轻人的超级“吸引子”，也是拥有大型计算机最多的研究中心之一。由于乌拉姆等人的早期开创性工作奠定的基础，这里也建立了一个“非线性分析研究中心”。

洛斯阿拉莫斯理论部的新主任卡拉瑟斯（Peter Carruthers, 1936-1997）来自康奈尔大学，就像他的这个位置四十年代的前任贝特一样。1973 年到任后，他做的第一件事就是解雇了几位高级研究员，而代之以他精心挑选的新一代。当费根鲍姆（Mitchell J. Feigenbaum, 1944-）第二年被他雇用时，30 岁还差了几个月，已经戴了麻省理工学院基本粒子物理四年的博士帽子，分别在康奈尔大学和弗吉尼亚理工学院工作过。这位头发长长、不修边幅的地道的纽约城布鲁克林人，讲话时眼光急转、语速飞快、激情四射。从东部搬到西部后，同事们只看到他与众不同地干活、漫步、思考，一天“二十五”个小时工作好像还嫌太少。

然而，到此为止他只发表过一篇论文。在论文数量决定一切的中国，大概前景黯淡，拿不到研究基金，津贴也大减。在美国研究型大学新科助理教授的“三年考察”报告中也会收到一个“警告”，下一个三年后试用期结束时很可能要“卷铺走人”。“不发表则灭亡”似乎是天经地义的大学游戏规则，今日更甚。但是，卡拉萨斯不是那种只看文章数量的上级领导，他清楚地知道，创造性研究不会是什么“计划”之后的产儿。他还清清楚楚地记得康奈尔的美国物理学教授威尔逊（Kenneth G. Wilson, 1936-）似乎也写不出什么论文，但无人敢说他缺乏对物理的洞察力。一旦他的思想开了花，论文就会像潮水般地汹涌而来。

威尔逊 1982 年获得诺贝尔奖的工作包括他和同为美国同胞的卡丹诺夫（Leo P. Kadanoff, 1937-）以及英国物理学家、化学家兼数学家、现为约克同僚的费希尔（Michael E. Fisher, 1931-）关于相变问题的“重正化群”理论，他们研究物质在两种不同状态之间临界区域的奇妙性质，如流体的液态和气态，或金属的磁化和非磁化。这时的复杂现象必须用非线性的数学来描述，可从液体突然沸腾时在它和气体的界面上看到的一团乱象来想象。这三人在 1980 年共享了以色列总统颁发的沃尔夫（Ricardo Wolf, 1887-1981）物理奖。

六十年代卡丹诺夫处理“临界

现象”的重正化基本想法是把原子间的相互联系用“尺度变换”来刻画，即把一些看上去不变的物理量，譬如质量，看成似乎随观测尺度而上下浮动，这和七十年代初法国人波努瓦•芒德勃罗（Benoit Mandelbrojt, 1924-2010）关于英国海岸线长度的看法颇有异曲同工之处。但是，跨越尺度的变化并非任意，而是遵循某种“相似性”的规律。威尔逊的重大贡献在于运用不同尺度的“自相似性”从而提供了计算可能性。

费根鲍姆被威尔逊的深刻思想迷住了，他要用自相似性的方法来对付湍流问题。湍流的特点之一就是自相似性：大涨落带有小涨落，大漩涡包含小漩涡。有序流体进入混沌状态产生湍流，吸烟者看到袅袅上升的烟柱破碎成乱七八糟的漩涡。但是混沌之中是否存在有序？这可是个大问题。

当吸烟不止的费根鲍姆站在快要进入瀑布区域、开始加速的溪流前，他凝神注视着急速前进、颤抖不已的水流，左右摇晃着自己的头颅：

“你可以注视着某种东西，一堆泡沫或别的什么。如果头动得特别快，你可以突然辨认出表面的整个结构，你可以从心中感觉到它。但是对任何有数学背景的人，当他看到这东西，或者仰望着累累浮云，或者在风暴中站在海堤上，他知道对于这一切实际上什么也不懂。”

费根鲍姆要当“科学的弄潮儿”，研究新科学。他有一种坚定不移的信念：迄今为止的物理科学未能理解困难的非线性数学。作为物理学家，虽然只有一篇发表在他名下的论文，但他有“粒子物理”、懂“量子场论”，他已经积累了不同领域丰富的知识，他已经掌握了最新出现的计算技术，厚积薄发、潜力无穷。正如后来他的上司对此评价：

“费根鲍姆具有正确的背景。他在正确的时候做正确的事，而且做得很出色。他不是做局部的事情，而是把整个问题弄清楚了。”

作为第一步，费根鲍姆找到最简单的非线性函数，就从梅考虑过的那个描写种群数目变化的带参数二次函数开始了他的数值试验。他不知道洛伦茨的工作，但在 1975 年夏天科罗拉多州的一个会议上，他听了斯梅尔讲了同一个带参数函数的迭代从周期变到混沌的某些尚未解决的问题。斯梅尔敏锐的直觉让他感觉到有进一步探索的必要。

为此，费根鲍姆摆弄起了当时流行的 HP-65 型手用计算器，把数学分析和数值实验结合起来研究有序和混沌之间的桥梁。这个桥梁类似于流体中层流和紊流之间的通道。梅这样的生态学家已经看到随着参数变化的种群数目倍周期律，例如，在某一个分叉点只要稍稍改变一点点长江“中华鲟”的出生率，它们的数目变化规则就会从四年周期变到八年周期。费根鲍姆决定先算出这些分叉点参数的精确值。

慢腾腾的计算器好几分钟才能算出周期加倍的精确参数值，参数越往前走，计算就越费时。这反而帮了费根鲍姆的大忙。他可以从容不迫地把数据记下，在等待下一个结果时可以思索一番，甚至还有余暇猜猜下一个答案会在哪里。如果三十年后的他重新开始，用的是“克雷”超级计算机，说不定一些有趣的结果“稍纵即逝”，某个重要的模式“逃之夭夭”，他也许有可能什么也发现不了。在科学的探索上，“慢工出细活”也一点不假。

几个回合下来，费根鲍姆眼睛突然一亮，就好比是“哥伦布发现了新大陆”。这些分叉参数出现了某种规律性：它们似乎是几何序列般地向前进，即目前值和前一个值的差与下一个值和目前值的差之比值最终趋向一个固定常数。倍周期的来临不光越来越快，而且以恒定的“加速度”越来越快。这种几何收敛的迹象暗示他，某种尚未人知的东西在不同的尺度上重复。

这个“收敛常数”在费根鲍姆计算器上最高精度为三位小数，他看到的是 4.669。这个奇怪的新数和那些数学上大名鼎鼎的绝对常数 $\pi = 3.14159\cdots$ 或 $e = 2.71828\cdots$ 等有亲戚关系吗？他找来找去，“家谱“上没发现什么。

过了两个月，他突然想起他的三个实验室同事：米特罗波利斯（Nicholas C. Metropolis, 1915-1999）、保罗•斯坦（Paul R. Stein）及迈伦•斯坦（Myron L. Stein）。他们 1971 年研究过类似函数的迭代，并警告过他这些迭代“吓人的复杂性”，也曾经考察过其他带参数的函数，并发现它们共享某些模式。事实上，就是前一个斯坦过去曾经告诉过他，倍周期分支的现象不只发生在二次函数上，它也发生在带有参数的正弦函数 $r\sin(\pi x)$ 上。一个念头飞了出来，何不再瞧瞧这族正弦函数？说干就干，他又拿起 HP-66 计算器进行了新一轮倍周期计算。没想到，新的分叉值依然是几何收敛的，但不可思议的是，其不变的收敛速率还是那个数：4.669。

两个家谱相距甚远的函数族，一为三角函数，另一为二次多项式，一个是“超越的”，另一个是“代数的”，却有某种一致的规律性，导致了同样的结果。费根鲍姆激动得打电话给他父母，告诉他们他也许因此名满天下。接下来，他不辞劳苦、马不停蹄试验了他能想得到的其他带参数的函数，分叉点产生的几何常数无一例外地仍是同一个数：4.669。

费根鲍姆又打电话给保罗•斯坦报告这一消息，但后者持怀疑态度，毕竟只有三位小数的精度，谁知道第

四位或到第八位是否都一样呢？洛斯阿拉莫斯有的是大型计算机，过去他像其他理论家一样不大看得起计算机的机械性运行，从未去学计算机语言。现在，为了证明谁更正确，费根鲍姆开始学编计算机 FORTRAN 程序。借助计算机的帮助，第一天对这些函数他就得到同一个有五位精度的常数：4.66920。当晚他又学会了怎样用“双精度”，第二天就得到如下的精度：4.66920160910，对所有试验过的函数都一样。

费根鲍姆发现了“普适性”。这个“放之四海而皆准”的普适常数是他强烈的“计算好奇心”催生的宠儿。计算，给了他发现自然界宝藏的极佳机会，带给他“阿里巴巴”的“芝麻开门”。难怪约克 2005 年 5 月在台湾新竹清华大学参加庆祝李天岩六十岁生日的国际研讨会之后，通过采访他的台湾数学界人士，对年轻一代的数学爱好者语重心长地说：

“研究就是去发现叫人赞叹的想法，动手计算则可能导致伟大发现。”

中国当今的计算数学权威之一石钟慈 (1933-) 二十年前就认为：

“计算已成为一种基本的科学方法。它与从牛顿、伽利略以来发展起来的两种传统科学方法——理论和实验——形成鼎足而立之势，大大改变了现代科学技术的面貌。人们现在已把计算称为‘第三种科学方法’。”

费根鲍姆的工作并没有立刻得到“一呼百应”，没有像李 - 约克定理的深刻思想和严格证明一下子被人“全盘接受”。他由此写成的论文两年内被学术期刊频频拒绝，编辑们认为他的文章“不宜发表”。

在科学史上，出乎意料的独创性工作常遭厄运，权威们经常武断地判处一个新思想的死刑，直至它“死而复生”。贫病而逝的挪威人阿贝尔（Niels Abel, 1802-1829）和决斗丧生的法国人伽罗瓦（Evariste Galois, 1811-1832）之高次代数方程、倒霉的匈牙利人鲍耶（Janos Bolyai, 1802-1860）和幸运的俄罗斯人罗巴切夫斯基（Nikolas Lobatchewsky, 1793-1856）之非欧双曲几何，都是众所周知的例子。“日本吸引子”的发现者、日本京都大学电机系当时的研究生上田皖亮（Yoshisuka Ueda）1961 年 11 月 27 日在研究电子线路的非线性微分方程时发现了十分混乱的现象，却被自己的导师视为“不合常理”而痛失了“发现权”的良机，直到 1970 年才让他报告这一重要发现。正如李天岩 1988 年登在台湾通俗数学杂志《数学传播》上的一篇短文中所惋惜的那样：

“头彩已经被洛伦茨抢走了。”

数学家们对费根鲍姆也有些疑虑，原因之一是他并未提供一个严格的证明。1976 年 9 月当他在洛斯阿拉莫斯召开的一个国际数学会议上向听众介绍他的理论时，刚刚起讲，乌拉姆的“老乡”、知名的数学家卡茨（Mark Kac, 1914-1984）就站起来毫不客气地问：

“先生，您想给出数目字还是给出证明？”

费根鲍姆回应道：“比前者多点，比后者少点。”

卡茨再次诘问道：“是任何讲道理的人都称作证明的东西吗？”

做完报告之后，当费根鲍姆征求卡茨的评述时，带波兰口音的后者有点挖苦意味地拖着颤动的 r 音说：

“是的，这果然是一个讲道理的人的证明，细节可以留给 r-r-rigorous（严格的）数学家们。”

过后不久，一位大体上还算“比较严格的”数学家果然不负“卡茨”们的众望。1979 年，美国人兰福特（Oscar E. Lanford III, 1940-）给出了“费根鲍姆定理”用计算机辅助证明的细节，虽然这个“土法炼钢”法不见得那么严格。这个普适数对所有的带参数“单峰函数”都一样地成立。单峰函数，顾名思义，它们的函数图像看上去像单峰骆驼的驼峰或公园里的土丘。

当然，费根鲍姆的开创性工作很快就获得了绝大多数人的承认和赞赏。尤其是 1979 年当大家听说一名意大利物理学家和一名法国物理学家通过实验证实了倍周期分支的确是依照他所预测的那样发展，他一下子就大红大紫起来。他前几年的发现分别在 1978 年和 1979 年连续两年都发表在《统计物理杂志》上。在 1977 年召开的那个第一届混沌国际会议上，福特评述道：

“费根鲍姆看到了普适性，发现了怎样作尺度变换，并且给出了一条走向混沌的道路。它是直觉上诱人的。这是我们第一次有了一个人人都能理解的清楚模型。”

然而，一些科学家仍然认为对费根鲍姆的贡献估计太高，“虽然漂亮，但不及李 - 约克的工作那样影响深远”。最持否定态度的是“分形之父”芒德勃罗 。当成名之后的费根鲍姆 1984 年应邀向瑞典的诺贝尔讨论会发表演讲时，芒德勃罗发表了讲话，被听众们形容为一个“反费根鲍姆演说”。他不知从什么地方居然挖出一位名为麦堡（P. J. Myrberg）的芬兰数学家二十年前所写的一篇关于倍周期现象的论文，并挑衅式地一直把“费根鲍姆序列”另外叫做“麦堡序列”。

不管怎么说，正是芒德勃罗这个人在七十年代初发出的一个“地问”，开创了一门新的几何学，研究具有分数维数“点的集合”的几何学。

未完待续

图论中的经典问题简介

史永堂

图论是一门古老的数学分支，主要研究用某种方式联系起来的若干事物之间的二元或多元关系。关于图论的文字记载最早出现在欧拉 1736 年的论著中，即著名的哥尼斯堡七桥问题。图论中很多重要的结果都是在 19 世纪得到的，大部分都跟电子网络相联系（电子工程可能是图论成功运用的第一个领域）。直到 1936 年匈牙利数学家 Konig 出版了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》，图论才以一个独立的数学学科出现在人们的视野中。目前，由于研究方法和内容的不同，图论已产生了若干分支，如代数图论、极值图论、随机图论、拓扑图论、应用图论等。

20 世纪中叶以后，由于生产管理、军事、交通运输、计算机网络等领域的需要，出现了很多的离散问题，而图论可为离散问题的研究提供数学模型。近代电子计算机的出现和发展，促使图论及其应用迅猛发展。图论与线性规划、动态规划等优化理论的内容和方法相互渗透，促进了组合优化理论和算法的研究。图论的引进改变了计算机科学、网络等领域的面貌。当前应用图论来解决化学、物理学、生物学、运筹学、网络理论、信息论、控制论、经济学、社会科学等学科的问题，已显示出极大的优越性。同时，对图论中古老问题以及经典问题（如最短路问题、旅行售货商问题、中国邮递员问题等）的研究，促进了图论本身的发展。著名数学家金芳蓉教授在《信息时代的图论》（Graph Theory in the Information Age, 2010）一文中指出：图论发展正处于一个新的征程，成为信息革命的核心部分。

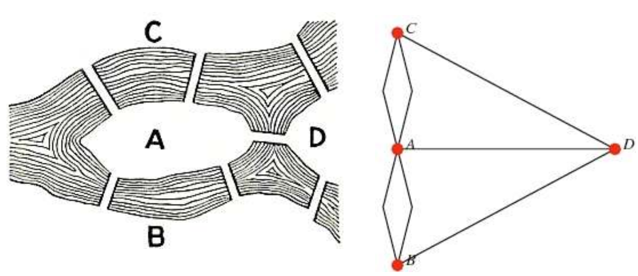
著名数学家、沃尔夫奖获得者 Lovasz 教授在《图论 45 年的发展》（Graph Theory Over 45 Years，2011）一文中写道："在过去的十年里，图论已经变得越来越重要，无论是它的应用还是它跟数学其他分支的紧密联系方面。"在文章中，通过对图论跟组合优化（离散优化）、计算机科学、概率论、代数、拓扑、网络等其他学科之间联系的描述，详细地回答了"今天图论在数学中占有什么样的地位？"这一问题。

本文我们将简单的介绍图论中的几个经典的问题。

1. 哥尼斯堡七桥问题

风景秀丽的哥尼斯堡城（今俄罗斯加里宁格勒）是德国的一座历史名城，也是哥德巴赫的出生地。普莱格尔河贯穿整个哥尼斯堡小城，这条河有两条支流，它们环绕一个小岛，在这两条支流上有七座桥（见下图）将岛与河岸连接。城里的居民晚饭后喜欢到这里散步，久而久之，就有了这样一个问题：一个人怎样才能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点？大家都试图找出问题的答案，但是谁也解决不了这个问题。

于是问题就被送到了正在俄国圣彼得堡（原列宁格勒）的科学院做研究的大数学家欧拉手里。1736 年 29 岁的欧拉向圣彼得堡科学院递交了《哥尼斯堡的七座桥》的论文。欧拉并没有跑到哥尼斯堡去走走，他将陆地和小岛用点表示，而将七座桥用线表示，于是七桥问题就等价于下图中图形的一笔画问题了。欧拉用严格的数学方法证明了这种画法是不存在的。对于类似的更一般的图形，欧拉也找到了一个简便的原则，可以判定它能否一笔画出：



它们是连通的，且奇顶点（通过此点边的条数是奇数）的个数为 0 或 2。

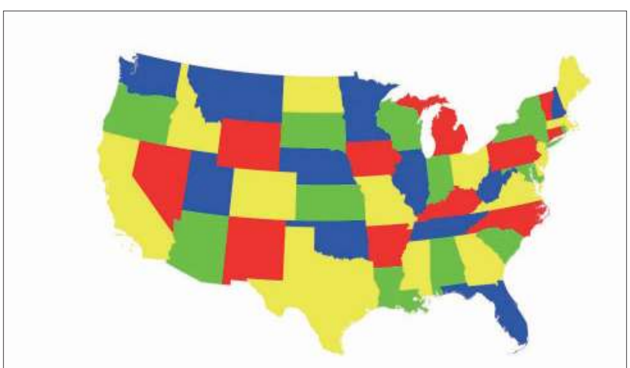
这就是“一笔画”定理，也称为欧拉定理，经过每个点恰好一次的回路也称为“欧拉回路”。欧拉通过对七桥问题的研究，不仅圆满地回答了哥尼斯堡居民提出的问题，而且由此开创了数学的两个新的分支——图论与拓扑。

随着时间的推移，图论不断发展，欧拉回路问题也有所拓广。就这样到了二十世纪，又出现了一个新的问题：邮递员从邮局出发，每次要走遍他所负责街区的每一条道路，投递完毕后仍须回到邮局，他应走什么路线才能使总路程最短。这个问题就是著名的“中国邮路问题”（China Route Inspection Problem）或“中国邮递员问题”（Chinese Postman Problem），首先由我国数学家管梅谷教授于 1962 年提出，而美国国家标准和技术研究院（NIST）的 Alan Goldman 首先将此问题命名为中国邮路问题。

若用顶点表示交叉路口，用边表示街道，那么邮递员所管辖的范围可用一个赋权图来表示，其中边的权重表示对应街道的长度。中国邮递员问题可以用图论语言叙述为：在一个具有非负权的赋权连通图中，找出一条权最小的环游。这种环游称为最优环游。无向图的中国邮路问题是容易解决的，而有向图的中国邮路问题是 NP 难问题。关于 NP 难的问题可参考任何一本组合优化或者算法复杂性的教材，这里推荐李学良教授和史永堂博士翻译的《组合优化》教材（高等教育出版社，2011），作者为 William J. Cook, William H. Cunningham, William R. Pulleyblank, Alexander Schrijver。

2. 四色问题

印制地图时，为了便于区分，常把相邻（有公共边界）的地区印成不同颜色。人们在实践中发现：不论地图上的行政区划多么复杂，最多使用四种颜色，一般都能保证相邻地区使用不同颜色。实践中这样的结果，要



四色地图示意图

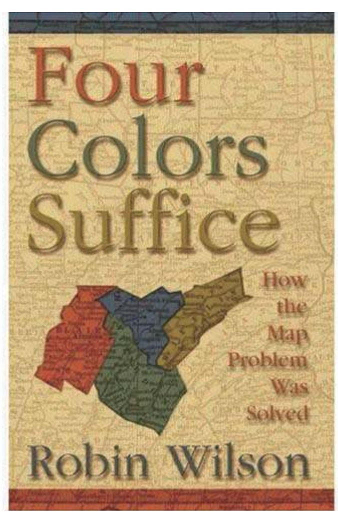
在理论上证明却不那么容易。这就是著名的四色问题——世界近代三大数学难题之一。

四色猜想的提出源自英国。1852 年，毕业于伦敦大学的弗南西斯 • 格思里（Francis Guthrie）工作时，发现了一个有趣的现象：看来，每幅地图都可以用四种颜色着色，使得有共同边界的国家着上不同的颜色。这个结论能不能从数学上加以证明呢？他和在大学读书的弟弟格里斯决心试一试。兄弟二人几经努力却没有进展。于是，他的弟弟就请教他的老师、著名数学家德 • 摩根，摩根也没找到解决途径，于是写信向著名数学家哈密尔顿爵士请教。哈密尔顿接信后开始研究，直到 1865 年逝世也没能解决。

1872 年，英国当时最著名的数学家凯利正式向伦敦数学学会提出了这个问题，于是四色猜想成了世界数学界关注的问题。世界上许多一流的数学家都纷纷参加了四色猜想的大会战。1878-1880 年两年间，著名的律师兼数学家肯普和泰勒两人分别提交了证明四色猜想的论文，宣布证明了四色定理，大家都认为四色猜想从此也就解决了。11 年后数学家赫伍德以自己的精确计算指出肯普的证明是错误的。不久，泰勒的证明也被人们否定了。后来，越来越多的数学家虽然对此绞尽脑汁，但一无所获。

于是，人们开始认识到这个貌似容易的题目并不简单。进入 20 世纪以来，科学家们的证明基本上是按照肯普的想法在进行。1913 年伯克霍夫在肯普的基础上引进了一些新技巧，美国数学家富兰克林于 1939 年证明了 22 国以下的地图都可以用四色着色。1960 年又推进到了 50 国。后来这种推进仍然十分缓慢。

电子计算机问世以后，大大加快了对四色猜想证明的进程。1976 年，美国数学家阿佩尔与哈肯在美国伊利诺斯大学的两台不同的电子计算机上，用了 1200 个小时，



作了 100 亿次判断，终于完成了四色定理的证明。为了纪念这一历史性的时刻，两位数学家所在的伊利诺伊大学邮局在每个邮件上盖上了这样的邮戳“Four Colors Suffice”（四种颜色足够了）。

四色猜想的计算机证明轰动了世界。它不仅解决了一个历时 100 多年的难题，而且有可能成为数学史上一系列新思维的起点。1997 年罗伯逊、桑德斯、西摩和托马斯简化了阿佩尔和哈肯的证明，但是证明的过程仍需借助于计算机。直到现在，数学家们仍在寻求一个纯粹数学的更简洁的证明。

3. 拉姆齐问题

“假如要求在组合数学中举出一个而且仅仅一个精美的定理，那么大多数组合数学家会提名 Ramsey 定理”，这是美国数学家 Gian-Carlo Rota 对 Ramsey 定理的评价，也是对 Ramsey 定理在组合数学中地位的评价。“世界上完全的无序是不可能存在的”、“任一个足够大的结构中必定包含一个给定大小的规则的子结构”，这富有哲理的格言恰是 Ramsey 理论的主导精神。

创立了 Ramsey 数和 Ramsey 理论的拉姆齐（F. P. Ramsey, 1903-1930），堪称旷世奇才。在如下领域都做出了相当有影响的成就：逻辑学、经济学、概率论、认知心理学、科学方法论等。1930 年去世时只有 26 岁，《图论杂志》（Journal of Graph Theory）在 1983 年 7 卷 1 期为纪念其 80 诞辰的专刊里，全面地介绍了他的生平、贡献以及 Ramsey 理论的发展。

拉姆齐（1903-1930）

1958 年，《美国数学月刊》（The American Mathematical Monthly）上登载着这样一个有趣的问题：“任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人相互认识，或 3 个人相互不认识”。对 Ramsey 理论作出重大贡献的组合数学家 Spencer 在 1983 年描写了他第一次得知这个问题——也是他第一次接触 Ramsey 理论时的情形：“当时我正在中学读书，得知这个问题后，回家花了很长时间才费劲地搞出了一个分很多种情况来讨论的冗长证明，我把我的证明带给老师，老师就给我看下面的简单明了的标准证明。此论证的简单扼要当时使我非常欣喜。”这个证明描述如下：用 A，B，C，D，E，F 分别表示聚会的 6 个人，若两个人相识，则在代表这两人的点之间用红边相连，否则连一条蓝边。这样把每对点都用红边和蓝边连好之后，原来的问题就等价于证明图中有红边三角形或者蓝边三角形。考虑从某一点（设为 A）连出 5 条边，根据抽屉原理，其中必有三条同色，不妨设它们是三条红边 AD, AE, AF。再考虑三角形 DEF，如果它有一条红边，不妨设为 DE，则 ADE 就是一个红边三角形；如果三角形 DEF 没有红边，则 DEF 自身就是一个蓝边三角形。论证完毕。

上面的聚会问题虽然产生于 Ramsey 理论的几十年之后，但它确实是 Ramsey 定理的一个最简单的特例。“6 人聚会问题”可以推广到“n 人聚会问题”：经典 Ramsey 数 $R(n, n)$ 表示满足如下要求的最小正整数 N，使得对完全图 K_N 的边进行任意二着色（红蓝两色），总存在单色的完全图 K_n。后来人们又对这一定义进行了推广：对于 n 阶完全图 K_n 进行边的红蓝二着色，只要 n 充分大，其红色边导出的子图必包含一个预先给定的图 G，或者其蓝色图包含一给定的图 H，上述的临界值 n，即最小的符合要求的整数 n 被称作 Ramsey 数，并记作 $R(G, H)$。

如果 $G=K_n$, $H=K_m$ ，则记 $R(G, H)$ 为 $R(n, m)$。

拉姆齐在 1930 年证明了 Ramsey 数 $R(n, m)$ 的存在性，这就是著名的 Ramsey 定理。然而确定 $R(n,m)$ 的精确值是非常困难的，美国数学家 Radziszowski 在《组合数学电子刊》（The Electronic Journal of Combinatorics）发表了关于 Ramsey 数的综述文章 Small Ramsey Numbers（文章自 1993 年 2 月起不断更新），下页图是其中部分 Ramsey 数的上下界的数据（2011 年 8 月的修改版）。

著名数学家、Ramsey 理论的主要推动者之一爱多士（Erdos）对此曾有过一个玩笑：外星人要挟人类说，必须在一年内交出 Ramsey 数 $R(5, 5)$ 的值，不然将毁灭地球。那么人类应集中所有的计算机去计算这个值；若改成 $R(6, 6)$ 的话，那么人类只能拼命了。

1947 年，爱多士创造性地利用了概率方法，给出了经典 Ramsey 数的下界，为之后的概率方法在组合数学中的运用，包括随机图理论、随机算法的发展走出了第一步。

现在 Ramsey 理论已经成为图论乃至整个数学研究的一个重要课题。数学家 Frank Harary（1921-2005）曾说道：“毫无疑问，Ramsey 理论现在是组合学中一个业已确

k \ l	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1139	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3705	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10581	15263	22116
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27490	41525	861 63620
9							565 6588	581 12677	22325	39025	64871	89203	
10								798 23556		81200			1265

部分 Ramsey 数的上下界的数据

立且兴旺发达的分支。其结果（在被发现后）往往易于陈述但难以证明；这些结果既精巧多彩又十分优美。尚未解决的问题不可胜数，而且有意义的新问题还在以超过老问题获解的速度不断涌现。”有很多知名数学家都对 Ramsey 理论作出过贡献，其中有：P. Erdos（1984 年沃尔夫奖得主）、J.H. Kim（1997 年 Fulkerson 奖得主）、W.T. Gowers（1998 年菲尔兹奖得主）、L. Lovasz（1999 年沃尔夫奖得主）、R.L. Graham（2003 年 Steele 奖得主）、N. Alon（2005 年 Godel 奖得主）、陶哲轩（2006 年菲尔兹奖得主）等等。

关于 Ramsey 理论的相关内容，可参考

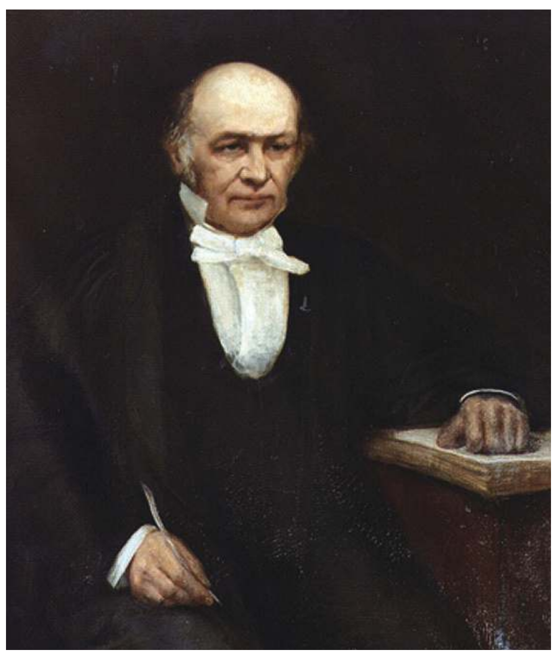
【1】 Alexander Soifer. Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow. Progress in Mathematics Volume 285. Springer, 2010.

【2】 李乔，李雨生，拉姆齐理论——入门和故事，大连理工大学出版社，2011.

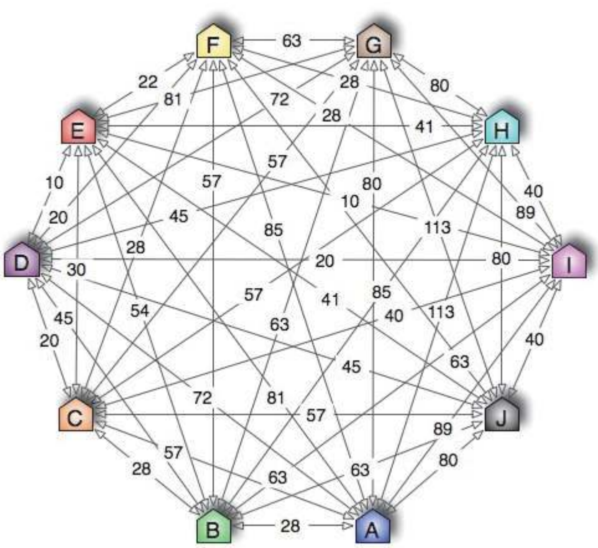
4. 旅行售货商问题

1856 年，爱尔兰数学家哈密尔顿（William Rowan Hamilton, 1805-1865）提出了一个周游世界的“正十二面体”游戏：一位旅行者，如果从伦敦出发，游历 20 个城市诸如巴黎、罗马、莫斯科、纽约等等，每个城市只能经过一次，然后回到伦敦，他该如何选择旅行路线呢？在若干个旅行路线中，哪条路线距离最短呢？经过图中所有顶点的回路称为“哈密尔顿回路”。这个命题引起数学家们极大的兴趣，被命名为“赋权哈密尔顿回路最小化问题”。数学家们希望找到，在一个多节点的回路中存在最小化哈密尔顿回路的充要条件，解决了这个理论问题将给工程设计与实施带来极大的经济利益。遗憾的是，数学家们没有找到满意的答案，这个看似简单的问题也成为了数学史上著名的难题。

上世纪 30 年代，数学家 Karl Menger 在哈佛大学首先研究了旅行售货商问题的一般形式，很快普林斯顿大学的 Hassler Whitney 引入了“旅行售货商问题”这一名词。现在也称为货郎担问题：一个旅行售货员想去访问若干城镇，然后返回他的出发地。给定各城镇之间的距离，应怎样计划他的路线，使他能访问每个城镇恰好一次且总路程最短？这个问题即为旅行售货商问题（Travelling Salesman Problem），简称 TSP。用图论的语言可描述为：



爱尔兰数学家哈密尔顿（1805-1865）



一个 Travelling Salesman Problem 的例子

在赋权完全图中，找出一个具有最小权的哈密尔顿圈。

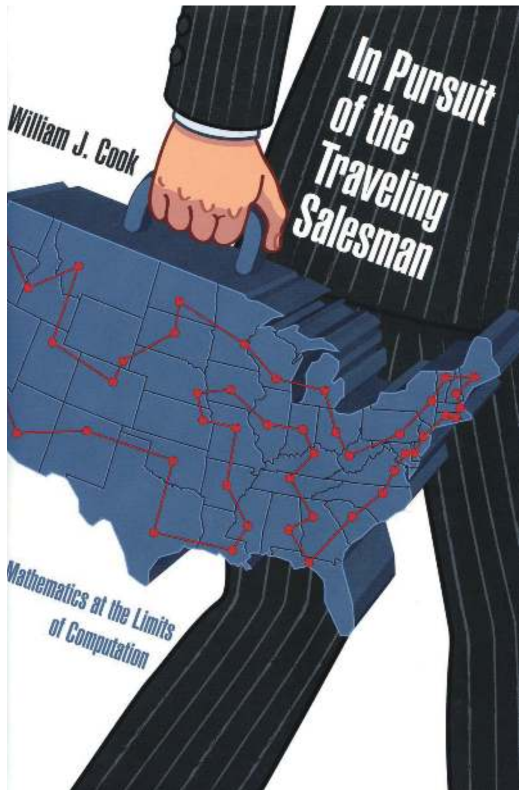
到了上世纪五六十年代，越来越多的数学家们参与到这一问题的研究中来，也提出了很多不同类型的 TSP。1972 年 Richard M. Karp 证明了哈密尔顿圈问题是 NP 完全的，从而意味着 TSP 是 NP 困难问题。

TSP 在逻辑学、遗传学、制造业、通讯及神经系统科学等许多领域都有广泛的应用，因而寻找其实际而有效的算法就显得颇为重要。由于 TSP 叙述的简洁性和求解的困难性，使得它为研究一般组合最优化问题的方法提供了一个平台。因此 TSP 的算法研究一直备受青睐，并且取得了相当的进展。在 1954 年，Dantzig, Fulkerson 与 Johnson 利用线性规划的方法找到了包含 49 个城市的 TSP 的最优圈，取得了第一个重要的突破。此后城市个数逐渐增加，120，550，2392，7397，19509…… 目前最大的进展是，继 2004 年 Cook 等人找到了包含瑞典 24978 个城市的 TSP 的最优圈之后，Cook 等人又于 2005 年解决了包含 33810 个城市的问题。

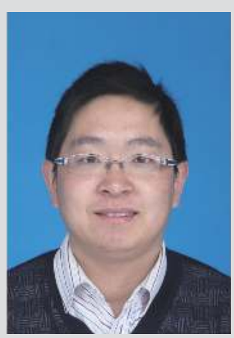
数学家 Jack Edmonds, Nicos Christofides, Brian Kernighan, George Dantzig, Ray Fulkerson, Selmer Johnson, Martin Grötschel, Michael Held, Richard Karp 等人均在 TSP 上作出过突出的贡献。例如，对于边的权重满足三角不等式的 TSP，Nicos Christofides 在 1976 年将欧拉和 Edmonds 的方法联系起来，用生成树、欧拉环游和完美匹配给出了一个近似比为 1.5 的近似算法（即算法得到的解为最优解的 1.5 倍）。这一算法现在称为“Christofides 算法”，在当时看来非常得简单，然而，三十多年过去了，仍然没有看到任何的改进。事实上，寻找近似比为 a（其中 a <1.5）的近似算法是个公开问题。

有关 TSP 的详细论述，可参考前面提到的李学良教授和史永堂博士翻译的《组合优化》教材（高等教育出版社，2011），也可参考 Cook 的最新力作《In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation》以及下面两个关于 TSP 的网站：http://www.tsp.gatech.edu/index.html

TSPLIB：http://www2.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/index.html



William J. Cook 关于旅行售货商问题的最新力作



作者简介：史永堂，博士，南开大学组合数学中心讲师，主要研究方向为图论与组合最优化。

图 1 2008 德国数学年宣传海报

2008 德国数学年

欧阳顺湘

2008 年是德国数学年。这一年我在德国比勒费尔德大学学习，期间我常注意到学校里频繁举行的数学年活动的消息，但因为较忙，并没有特别以较广的视角去关注这项活动。后来通过各种渠道，才了解到更多信息。

关于德国数学年的中文介绍，我只在网络上找到过几篇简短的相关中文消息。这里我记下我所了解到的一些信息，德国的经验或许对我们有些借鉴作用。

德国科学年及其它科普活动

2008 德国数学年是德国科学年系列活动的第九届。自 2000 年起德国联邦教育与研究部（Bundesministerium für Bildung und Forschung, 简称 BMBF）发起科学年活动，每年选择一个主题。从 2000 年到 2012 年，其主题分别为：物理学（2000）、生活科学（2001）、地学（2002）、化学（2003）、技术（2004）、物理学（2005，世界爱因斯坦年，该年为爱因斯坦 1905 奇迹年的 100 周年纪念）、信息学（2006）、人类学（2007）、数学（2008）、科学探索（2009）、能源问题（2010）、健康研究（2011）、未来项目——地球（2012，环境、可持续发展等内容）。各科学年活动的相关资料可以在德国联邦教育与研究部的网页下载，特别可以参考 2000 年到 2009 年科学年活动的英文综述[1]。

德国科学年的活动初衷是提供信息、传授知识，促进公众对科学的了解和直接体验，特别是希望激发年轻学生对科学的激情。近年来，德国科学年活动更多地着重于科学与社会的对话，希望促进公众对科技发展在社会进程中的作用的理解（这也反映在 2009 年以来的主题上）。

德国科学年活动已经形成了一些好的传统，如[1, 2]：

1. 在不同城市举行的大型开、闭幕式；
2. 为期一周的“科学之夏”（Wissenschaftssommer）活动；
3. 许多展览，包括一条整个夏天都在莱茵河、多瑙河、易北河等河流港岸停留的“科学船”上所举行的流动展览；
4. 媒体宣传。

[1] 德国联邦教育与研究部，*The Science Years 2000 to 2009, Experiences and Perspectives of Science Communications, 2009*。

德国科学年活动取得了很大的成功：已经举行了成千上万的活动，并有几百万人通过各种科学节、演讲、展览、讨论以及各研究所的开放日等方式参与其中。

近年来在德国居留或访问过的朋友一般或多或少都能接触到这项科学普及活动。例如，最近几次我旅行经过法兰克福总火车站大厅时都见到过那里有科普展览。2009 年我还和来德访问的师友到德国明斯特火车站参观过以列车为载体的流动展览—— 2009 年科学探索年活动内容之一的“科学特快”展览。该展览专列从 2009 年 4 月 23 日开始直到 11 月份，在全德 60 个城市流动展览。列车长 300 米，有 12 节车厢，每节车厢一个主题，从宇宙学、粒子物理到人类进化，从不同方面展示科学研究成果及其对人类生活的影响。

德国科学年的普及活动只是德国众多普及活动项目之一。在广泛、深入普及的基础上，许多科学活动的举行也举重若轻。我们这里另介绍一些例子。

自 2005 年以来德国科学促进者协会每年举办“科学之城（Stadt der Wissenschaft）”的竞赛。获胜城市不仅获得“科学之城”的称号，还得到一笔不菲的奖金用以支持参赛城市在申请中提出的科学项目。该竞赛的宗旨是促进德国城市重视科学与教育，让民众理解科学对城市发展的重要性，并促进科学界、企业界、地方政府与民众的广泛对话。这一活动迄今为止已有 50 多个城市参赛。例如，2011 年“科学之城”的角逐在美因茨、开姆尼茨及我所在的城市比勒费尔德之间展开。最终美因茨在“热情科技”的口号下获胜，并获得 25 万欧元的奖金。美因茨提出让民众尽可能广泛地亲近科学并获得接受良好教育的机会、促进科学界与企业界的合作并举办更多科普活动。而落选的两市在申请过程

图 2 科学快车：列车及内景（3 张图片组合）

图 3 2011 年比勒费尔德大学大厅的 GENIAL 活动

中也有不少好的主意。如比勒费尔德虽然没有得到官方的“科学之城”的称号，但还是得到了 5 万欧元的资助用以支持两个设想。

我们就“解剖一个麻雀”，介绍下我所在小城比勒费尔德市几个我目睹过的科普活动吧。比勒费尔德人口仅约 32 万，是一座典型的德国（中等）城市。在 2008 年数学年活动中，比勒费尔德就组织过一个名为 GENIAL 的科学节活动。2011 年 8 月底 9 月初在德国中小学学生新学期开学前，为期一周的 GENIAL 科学节再次举办。活动手册很厚很详细，如活动适合对象

图 4 2011 年比勒费尔德大学的条顿实验室在参与 GENIAL 活动

图 5 比勒费尔德大学儿童大学（2012 年 2 月，第二次讲座入场，儿童踊跃盖章）

的年龄和学生入学年级都分别标出。活动在大学大厅、教室和实验室，在市中心，在古城堡以及开放的动物园等地举行，许多家长带着小孩积极参加。还有较高阶介绍纳米科技、宇宙学的名为“科学之夜”的讲座，吸引了很多中老年听众，即便是在深夜。

GENIAL 主要组织活动被委托给比勒费尔德的一家商业机构 Bielefeld Marketing 来做。而具体活动，很多早就存在的机构和组织，如比勒费尔德大学主要针对中小学生的条顿实验室（Teutolab）[2]，就发挥了很大作用。

比勒费尔德大学的条顿实验室源于 2000 年 2 月 4 日开始的条顿化学实验室。现已发展有化学、物理、机器人和数学四个分支。实验室主要针对小学生，目的是使他们在实验室教师指导下，通过动手实践来学习。其中条顿数学实验室（Teutolab Mathematik）就在我办公室旁边。因此开学时间的每周三上午都能看到一群小朋友来“玩”。通常实验室的年轻教师先去大学门口迎接小朋友，然后分组到各房间（按实验室的概念为站【station】）做一些有趣的数学实验，如高尔顿板、认知柏拉图多面体的实验，同时小朋友也被带领参观了解大学。

2010 年 2 月 6 日周六，比勒费尔德大学大厅举办了一个大型活动来纪念条顿化学实验室创立 10 周年——800 多名学生同做一个化学实验。该实验室的创立确实值得庆祝。它开启了德国在大学设立实验室对中小学生进行教育之先河。按比勒费尔大学网页上的介绍，仅条顿化学实验室至 10 周年时就已有 2 万 5 千名学生来访。而且，以条顿实验室为模板，许多类似的实验室在比勒费尔德所在东北威地区扩展，最终形成了条顿实验室协作网。基于这些实验室，最近比勒费尔德大学还成立了一个针对小朋友的综合项目 Kolumbus-Kids，有兴趣的朋友可以参考。现在比勒费尔德大学的条顿实验室也走出德国，埃及、西班牙和中国上海也有了类似的实验室。

上述实验室也仅是德国重视儿童教育，着重“从娃娃抓起”的一个例子。幼儿园的英文单词 Kindergarten 即源于德语（Kinder 在德语中意为幼儿）——这是德国学前教育家、幼儿教育之父福禄贝尔（Friedrich Fröbel，1782—1852）给他创办的学前教育机构起的名字。而近年来很受欢迎的“儿童大学”（Kinderuniversität，常简称为 Kinder Uni）也是肇始于德国[3]。2002 年，德国图宾根大学创办首所“儿童大学”，初衷是请大学教授为好奇的儿童解释貌似简单而又不易回答的问题。图宾根大学的儿童大学开班之初就吸引了 400 名注册儿童。他们还给参加学习的儿童颁发学生证和毕业文凭。现在儿童大学在德国已经很普遍。欧洲许多国家也在积极推广“儿童大学”这一模式。在非洲及中国的广州、上海等地也有类似的儿童大学，如上海有一个德意志学术交流学会（DAAD）办的儿童大学。我所在的比勒费尔德大学从 2011 年开始也在 2、3 月份中小学学生假期中开设儿童大学讲座（每周五下午一次，共四次）。

后面我们将看到，德国数学年的一个特色也是极大地使得广大中小学生参与进来了。

数学年概览

2008 年德国数学年活动主要有四个合作伙伴：联邦教育与研究部、对话科学组织（Wissenschaft im Dialog，简称 WiD）、德国数学家协会（Deutsche Mathematiker-Vereinigung，简称 DMV）以及德国电信基金会（Deutsche Telekom Stiftung）。

对话科学组织是德国专门的科学传播中心。它于 1999 年由德国联邦教育与研究部以及德国主要的研究组织如马普所等机构联合成立。其目的是加强科学与社会之间的对话。

2008 年 DMV 的主席是柏林工业大学的数学教授齐格勒（Günter M. Ziegler）。齐格勒积极并善于将高深数学知识传达给大众。他还由此而获

[2] 比勒费尔德大学在德国著名的条顿堡森林脚下，是故有此实验室名。

[3] 在德国，这些活动都是免费的。

[4] Communicator Award，参考 http://www.dfg.de/en/service/press/press_releases/2008/pressemitteilung_nr_12/index.html。

得了 2008 年度的“传播者奖”[4]。该奖为德国自然科学基金会颁给在科普方面成就卓越的科学家的最高奖，奖金 5 万欧元。在数学年里将该奖授给数学家是再好不过的了。中国读者或对齐格勒并不陌生，近来畅销的《数学天书中的证明》[5] 即为他和另一位德国数学家编著的《Proofs From THE BOOK》一书的中译。该书英文版自 1998 年出版以来，已经多次再版，且被译为多国文字。一位对数学传播有热情的数学家领导 DMV 进行数学年活动无疑是很有帮助的。

德国电信基金会的慷慨资助使得组织者有充裕的资金使用。据齐格勒的介绍 [2]，德国数学年约有 750 万欧元的预算资金。

2008 德国数学年于 1 月 23 日在柏林开幕，还播放了德国总理默克尔的视频讲话；同年 12 月 11 日在科隆闭幕。本次活动的徽标是“数学—所有相关的（Mathematik. Alles, was zählt)”，而宣传语是“你懂的数学比你想的还要多（Du Kannst mehr Mathe, als Du denkst)”。这些都是数学年组织者不惜重金请来的知名专业广告设计公司“Scholz & Friends”的创意。

德国联邦教育与研究部出版了一些手册 [3] 为数学年的活动提供信息和指导，这些资料均可免费下载。

数学年的成果可以由下面一些具体数字看出 [1]：

1. 数学家：1300 多个合作者参与了演讲、展览等各种活动；
2. 中小学生：3400 多个学校收到了关于数学的各种信息；
3. 展览：四大展览（“Zahlen, bitte!”，Mathema，Imagenary，Matheschiff）吸引了 50 多万名参 观者；

图 6 数学船展览

4. 竞赛：组织了 30 多个不同水平的数学竞赛；
5. 数学电影：数学电影节的数学电影在 100 多个城市放映；
6. 文章：2500 多人在在线媒体上撰写了 3500 多篇数学相关文章；
7. 电广传媒：以电视和广播为载体，以数学为中心录制了 500 多个节目。

数学年的活动

我们下面具体介绍一些德国数学年的活动，有兴趣的读者可以进一步参考后文提供的相关资料以及链接。

海报宣传 2008 年 1 月伊始在德国街头、火车站以及机场等地出现了数学年的宣传海报 [1]。可惜笔者没太深印象，只见过他人拍摄的照片。但 2011 年我在德国柏林工业大学大厅见到过悬挂在那里的极大幅版的这些宣传海报的条幅。 这些海报将一些数学知识画龙点睛般地嵌在一些生动、有趣，与人们日常生活紧密相关的画面中。“数学随处可见”的主题跃然画面。比如有的图以德国青少年喜欢的滑板运动轨迹、速度、跳跃高度等来揭示函数、导数与微积分基本定理；或以教室里学生的嬉闹来联系抛物线；也有图以打领结来联系拓扑学，以 MP3 播放器来联系数据压缩等。

中小学 数学年除了继承以往科学年活动的传统，也开辟了新的传统：活动深入到学校（包括学生以及教师和家长）。德国几乎所有中小学都为学

图 7 数学年宣传海报

---

[5] 艾格纳（Aigner, Martin）和齐格勒（Ziegler, Günter M.），《数学天书中的证明（第 3 版）》（《Proofs From THE BOOK》），冯荣权、宋春伟和宗传明译，2010。

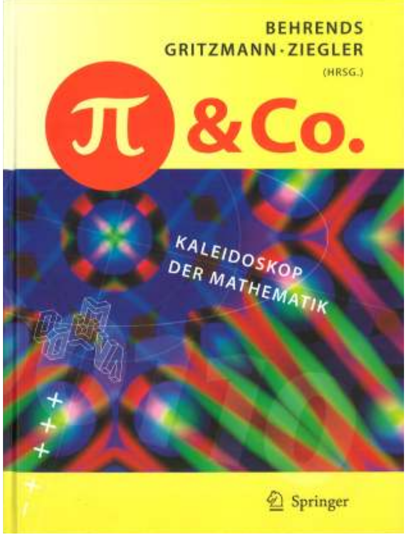


图 9 《π & Co. ——数学万花筒》

图 10 数学电影节获奖作品

生组织了特别活动。德国电信基金会还特别资助学生以“Mathekoffer”（数学箱）：这是专为数学年而设计的，箱中包含了各种教学辅助工具，如骰子等以辅助学习空间、随机等数学概念。数学箱的主要发明人德国多特蒙特大学的数学教授 Hans-Wolfgang Henn 还因此而获得德国 2010 年度的阿基米德奖。该奖为德国数学与自然科学教学促进会（MNU）设立，每逢偶数年颁发给数学教育方面有杰出贡献者（2008 年，该项阿基米德奖颁给了 2008 德国数学年的领导者齐格勒教授）。

高中毕业生数学奖 齐格勒教授等编辑了《π & Co. ——数学万花筒》[6] 一书，其中包含了许多德语数学科普

图 8 数学箱

文章。这是斯普林格（Springer）出版社曾计划出版的一本给高中毕业生的课外书。例如，柯朗和罗宾斯合著的数学科普经典《数学是什么》中关于素数分布以及拓扑学的介绍部分就包含在此书中。每所德国高中最优数学毕业生都获德国数学家协会的“高中毕业生数学奖”（DMV Abiturpreis Mathematik）：奖品是这本“万花筒”以及德国数学家协会一年免费会员资格。

数学之夏 2008 年科学年活动的传统活动“科学之夏”在莱比锡举行。它包含了很多活动，比如 2008 年度“心算”世界杯就被纳入在莱比锡的数学年活动中。但主要活动是在莱比锡歌剧院中心广场举行的大型展览。在这里许多研究机构以及大学的数学系都展出现代数学的应用，如奥博沃尔法赫数学所展出的“Imaginary”。

数学电影 数学年的一个重要内容是数学电影节。在这个活动中，各种与数学有关的电影或视频可以参与评选。优秀电影由斯普林格出版社结集出版为《MathFilm 2008 DVD》。其中包含莫比乌斯变换的视觉呈现等内容。一部分作品在德国 100 多个城市的影院放映，座无虚席。此外，还有许多与数学有关的电影，也被推荐给各相关组织播放。2008 年比勒费尔德大学就定期播放了不少数学电影。确实有不少这样与数学相关的影视作品，除了一些如介绍纳什的《美丽心灵》这样的艺术作品，也有不少纪录片，如介绍厄尔多思（Paul Erdös）的纪录片《N Is a Number: A Portrait of Paul Erdös》。斯普林格出版社出版了一系列数学视频（Springer VideoMath），如介绍早期数学史的《Early History of Mathematics》。

数学展览 数学年举办了很多数学相关的展览，如“神奇的数字 12”（12 sind Kult）、“结帐！”（Zahlen, bitte!）[7]、“虚数”（Imaginary）、“数学，数学是自然界的语言吗？（Mathema）”和“数学船”（MatheSchiff）等。

笔者曾介绍过黑森林中的奥博沃尔法赫数学所的数学与矿物博物馆（MiMa Museum）[8] 以及该博物馆的永久展览“虚数”（Imaginary）。我们这里仅介绍“Zahlen, bitte!”展览。该展览在海恩茨 • 尼克斯多夫博物馆论坛（Heinz Nixdorf MuseumsForum，缩写 HNF）举行。其副标题是：从零到无穷的奇异世界。海恩茨 • 尼克斯多夫博物馆位于离我所在城市不远的小城帕德博恩（Paderborn），

---

[6] Ehrhard Behrends, Peter Gritzmann 和 Günter M. Ziegler，*π & Co. Kaleidoskop der Mathematik*（《π & Co. ——数学万花筒》），Springer-Verlag, Heidelberg, 2008。

[7] “Zahlen, bitte!”是德国餐馆客人要求结账时的常用语。这里也可以译为“请数数！”。

[8] 欧阳顺湘，《黑森林中的数学胜地》，数学文化，第 2 卷第 3 期，2011。

号称世界上最大的计算机博物馆。该博物馆做这样一个展览也是有基础的，不但馆藏有历史上各种计算机（算盘，帕斯卡、莱布尼兹等分别发明的机械加法机、乘法机模型，以及各种各样的电子计算机等），还经常举办各种科普活动。该展览原计划从 2008 年 2 月 1 日开始到 5 月 18 日结束，后来由于参观者的强烈要求而延至 7 月 20 日。

一本基于此展览的数学“图”书《Zahlen, bitte!》[9] 于 2009 年出版。其中包含了上千幅很漂亮的图片，介绍了数字的产生、历史以及与数相关的现象和实物等。

数学船 如前所述德国科学年活动的传统内容之一是“科学船”流动展览。该船是一条普通的货船，从 9 月到 3 月都是用来运输土豆、木炭等货物。只是在夏天改装成博物馆。数学船活动时间从 5 月 6 日起到 9 月 31 日。船上展出了与数学相关的电影、展览、数学玩具、演讲等。

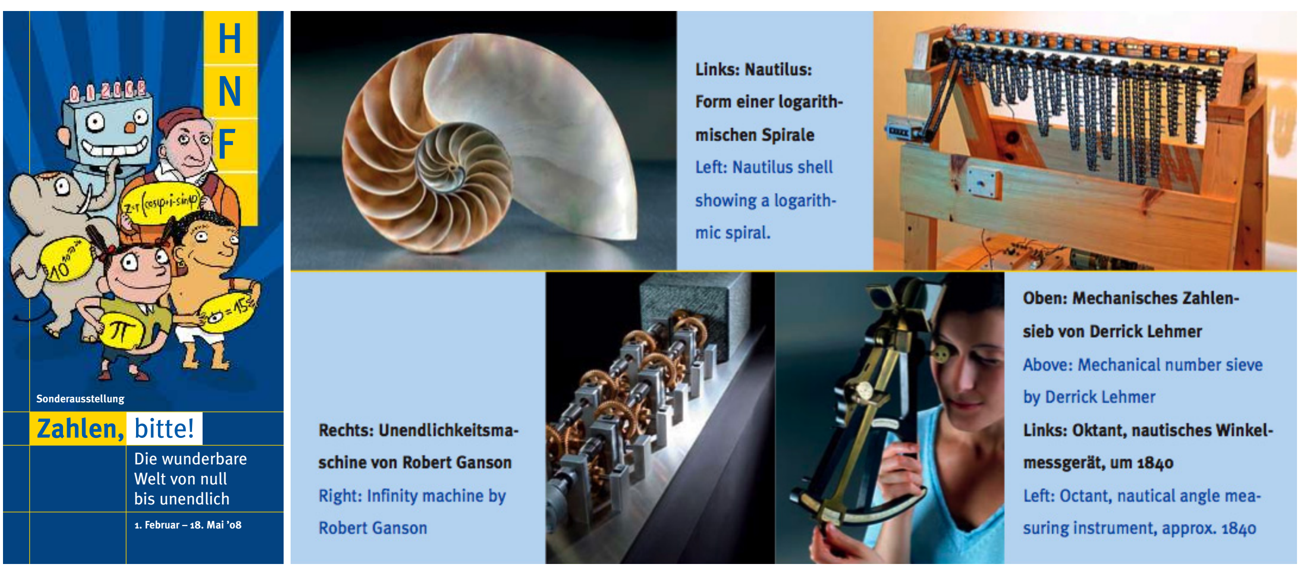
[9] Ulrich Vogt, “*Zahlen, bitte!”: - Ein mathematisches Bilderbuch*, UVO Verlag, 2009。

数学竞赛与游戏 在数学年里，参加各类数学竞赛的人也达到了前所未有的数目。在全德各学校 3 至 13 年级开展的“袋鼠杯”数学竞赛（Känguru-Wettbewerb）以 75 万的参赛者创造了纪录。其它竞赛或游戏还有如“体验数学（Mathe erleben）” 以及“城市图上军事演习（Planspiel Stadt）”等。

“头脑与数字（Kopf und Zahl）”竞赛 “头脑与数字”竞赛类似于前述“科学之城”和“数学电影节”竞赛。该竞赛由德国联邦教育与研究部发起，由不来梅的科学出版社（Haus der Wissenschaft）组织，旨在促进人文与数学之间的交流。最终有20个项目获奖，每个项目获得 1 万欧元的资助。获胜团体来自历史、艺术、音乐等方面的研究

图 11 奥博沃尔法赫的数学与矿物博物馆

图 12 海恩茨·尼克斯多夫博物馆



（a）宣传手册封面　　（b）展览手册掠影

图 13 Zahlen, bitte! 展览（图片来自“*HNF News letter*”以及“*Zahlen, bitte!*”展览手册）

图 14 《Zahlen, bitte!》一书封面

图 15 德语数学文化中的犹太数学家展

图 16 kittihawk 获奖作品：《曲线讨论收费几何》

机构，从此亦可领略该赛事的影响和益处。我简要介绍其中一个获奖项目——19 世纪德语国家中犹太数学家的生平与活动的流动展览。它由法兰克福歌德大学的七位科学史专家与法兰克福犹太博物馆和德国数学家协会合作完成。众所周知，这些犹太数学家在历史上曾经发挥了重要的作用，在纳粹时期他们普遍受到迫害，或流亡或自杀。因此这样的展览是很有意义的。该展览的第一版起始于 2006 年，2008 年因德国电信基金会的资助，得以在德国许多城市流动展出，吸引了各地媒体的广泛报道。2010 年该展览就曾在我所在大学图书馆展览过的。2011-2012 年还在以色列展出。此外，以此展览为基础的一本书也已由斯普林格出版（有德、英版）。

降临节数学日历 在德国从 12 月 1 日到 24 日是基督教的降临节。有小孩的德国家庭常常准备一个拥有 24 个格子的降临节日历（Advend Calender），每个日期，一个格子一个小门。每到相应日期，推开小门是一个礼物。这样围绕礼物的赠送就派生出很多有趣的活动。比如，我所在大学数学系每年都会有一些教授出一些有趣的数学题，每个题目的答案是一个 1 到 24 的数字。你可以在以答案为日期的那天去出题教授的办公室领取礼物。柏林工业大学的 MATHON 研究项目在 2003 年就开始了类似的数学日历：从 12 月 1 日到 24 日每天一个数学题目。利用 2008 数学年这一契机，该活动被扩展成不同年龄段的大型网络竞赛。更多信息，读者可以参考后文所附网页。

大学的支持 很多大学的数学系以及数学研究所都举办活动以支持数学年。比如在比勒费尔德大学 [10]，各领域的一些数学教授开讲座，向公众介绍“千禧年”数学难题；在教室定期播放数学电影；一个针对中小学生的“条顿”数学实验室也积极开展活动，吸引学生前来在玩的过程中体验数学。

数学实干家倡议 为了更好地呈现数学的应用领域，德国科学年的发起者招募了一批数学实干家来传播数学。“数学实干家倡议”（Mathemacher-Initiative）非常成功，它招募到了 818 名热爱数学的“使者”来传播数学的激情，这一倡议在 2008 年之后仍将进行下去。

数学传媒奖 德国数学家协会意识到和传媒搞好关系的重要性 [1]。2002 年德国数学家协会曾邀请主要媒体的记者到一高级餐馆进行“工作餐”，共商数学普及。德国数学家协会还从 2004 年起，每隔 2 年评选一次记者奖，奖励在数学传播方面有突出贡献的媒体工作者。2008 年德国数学家协会还新设数学卡通奖。在 2008 年 11 月，德国数学家协会在柏林—勃兰登堡科学院莱布尼兹讲堂颁发了德国数学家协会传媒奖、记者奖和卡通奖。Agnes Handwerk 凭借其关于亚历山大•格洛腾迪克（Alexander Grothendieck）的广播节目而获记者奖。卡通画家“kittihawk”则获数学卡通最高奖。更多介绍可以参考 Vogt 在德国数学家协会通报上的文章 [11]。

数学年的影响

德国数学年活动从计划开始就希望在数学年结束后，还有平台能给公众提供数学。2008 数学年活动确实还在产生影响。例如以 Imaginary 展览为基础而建立的奥博沃尔法赫数学与矿物博物馆就是德国数学年的遗产，而且该展览的影响也触及国际——该展览已经在美、英、瑞士、西班牙等国展出。特别，在笔者的联系下，苏州的西交利物浦大学已与奥博沃尔法

[10] 活动内容参 http://www.uni-bielefeld.de/mathematik/jdm/programm.html。

[11] Thomas Vogt, *Rote Rosen, weißer Wein – Die Verleihung der DMV-Medien- und Cartoonpreise für Mathematik 2008*, Mitteilungen der DMV, 17-1, 2009。

赫数学所达成协议，正在筹划在中国展出该展览德国数学家协会的高中毕业生数学奖也在数学年之后继续表彰中学生在数学方面取得的突出成绩。

齐格勒教授称：“在今后几年里我们还将致力于宣传数学作为关键性基础学科的重要地位，无论在中小学、大学还是高科技领域，数学都是一把打开其他学科大门的钥匙。”

联邦教育和研究部部长安妮特•沙范（Annette Schavan）女士总结道：“数学年活动取得了极大的成功。我们向儿童和青少年展示了一副全新的数学图景，并激发了他们对数学的好奇心。这一科学年的活动表明：数学无处不在，数学充满魅力，数学乐趣无穷！”，她还强调“2008 年里我们收获了许多很好的创意、项目和教材，它们产生的影响将远远超出这一年。”

“通过数学年的活动，我们向我们的目的——即让数学不再是一门令人望而生畏的学科——迈进了一大步。”德国电信基金会主席克劳斯•金克尔（Klaus Kinkel）博士说，“将来我们要继续努力推广数学。在 2008 年建立起来的网络和结构将继续得到支持，我们尤其要致力于推进数学的教与学。”

部分相关网页

2008 德国数学年：http://www.jahr-der-mathematik.de
德国联邦教育与研究部：http://www.bmbf.de
对话科学主页：http://www.wissenschaft-im-dialog.de
你会数学：http://www.du-kannst-mathe.de
“袋鼠杯”数学竞赛：http://www.mathe-kaenguru.de
ZAL 数学游戏：http://www.zal-das-mathespiel.de
城市图上军事演习：http://www.staedte-im-wissenschaftsjahr.de
数学电影：http://www.mathfilm2008.de
帕德博恩 HNF 博物馆 Zahlen, bitte! 展览：http://www.hnf.de/sonderausstellung/zahlen_bitte/Uebersicht.asp
奥博沃尔法赫 MiMa 博物馆 Imaginary 展览：http://www.imaginary-exhibition.com
柏林技术博物馆 Mathema 展览：http://www.mathema-ausstellung.de
降临节数学日历：http://www.mathekalender.de

“头脑与数字”竞赛：http://www.hausderwissenschaft.de/Kopf_und_Zahl.shtml
德语学术文化中的犹太数学家：http://www.juedische-mathematiker.de

德国科学之城：http://www.stadt-der-wissenschaft.de

德国儿童大学主页：http://www.die-kinder-uni.de
德意志学术交流中心上海儿童大学：http://kus2009.drupalcafe.com

比勒费尔德 GENIAL 科普活动：http://www.geniale-bielefeld.de
比勒费尔德条顿实验室：http://www.teutolab.de 或 http://www.uni-bielefeld.de/teutolab
比勒费尔德 kolumbus-kids 项目：http://www.kolumbus-kids.de

图片来源：图 1、7、8 来自 BMBF 资料；图 2、3、4、5、12 为作者所摄；图 6 属于对话科学组织；图 9、10、14 为作者扫描；图 11 为维基百科共享图片；图 13 来自 HNF 资料；图 15 来自该展览主页；图 16 为“kittihawk”作品（http://www.kittihawk.de）。

参考资料

1. Ehrhard Behrends, The Year of Mathematics in Germany, Gazette des mathématiques (SMF),121, 101–106, 2009, 见 http://page.mi.fu-berlin.de/bhrnds/publ_papers/smf_gazette_121_101-106.pdf。

2. Günter M. Ziegler, Math Year in Germany, Notices of the AMS, 2008, 见 http://lunyitsai.com/pdfs/GuenterMZiegler_fuer_AMS_2008~03.pdf。

3. 德国联邦教育与研究部，Mathe entdecken, Ideen zum Nachmachen（数学探索：可以模仿的想法），Mathematik in Ausbildungsberufen（职业中的数学），Mathematik ist überall Veranstaltungen im Wissenschaftsjahr 2008: Juli - Dezember 2008,（数学无处不在，2008 科学年下半年活动：2008 年 7 月 — 12 月），2008。

德国比勒费尔德和知阁
2012 年 2 月 10 日（2011 年 2 月初稿）

图灵机、人工智能以及我们的世界

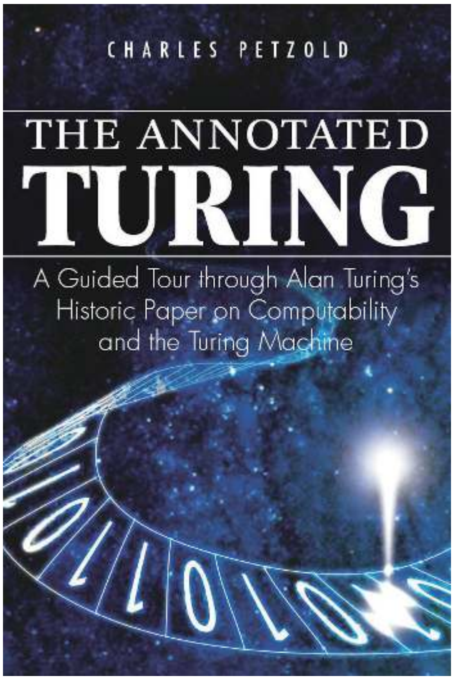
顾森

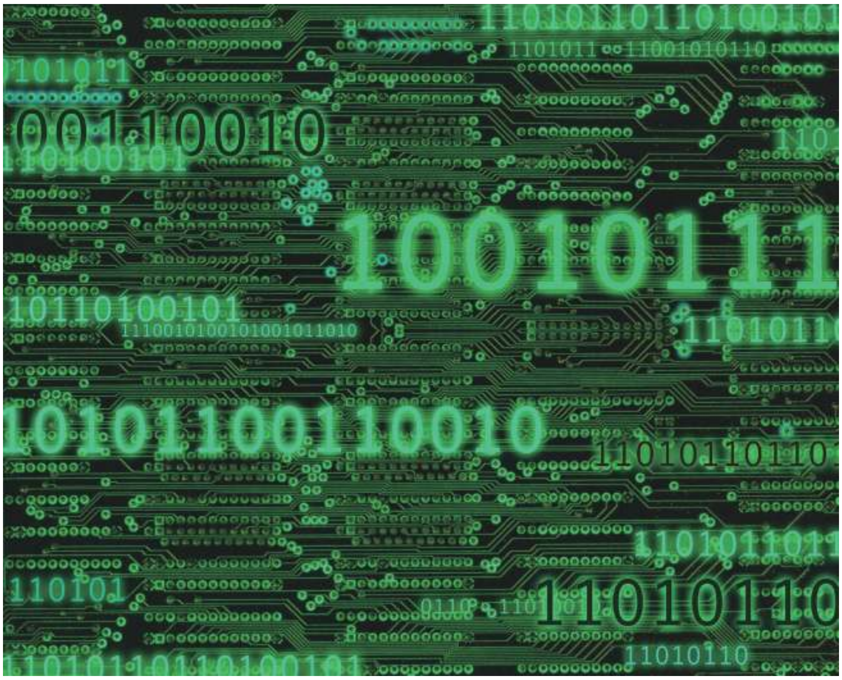
最近读完了 The Annotated Turing 一书，第一次完整地阅读了图灵最经典的那篇论文，理解了图灵机提出的动机和由此带来的一系列结论。不过，这本书的最大价值，则是让我开始重新认识和思考这个世界。在这里，我想把我以前积累的哲学观点和最近一些新的思考记下来，与大家一同分享。今年是阿兰•图灵诞辰 100 周年，图灵公司将推出这本书的中译本《图灵的秘密》，现在正在紧张的编辑排版中，不久之后就能和大家见面。

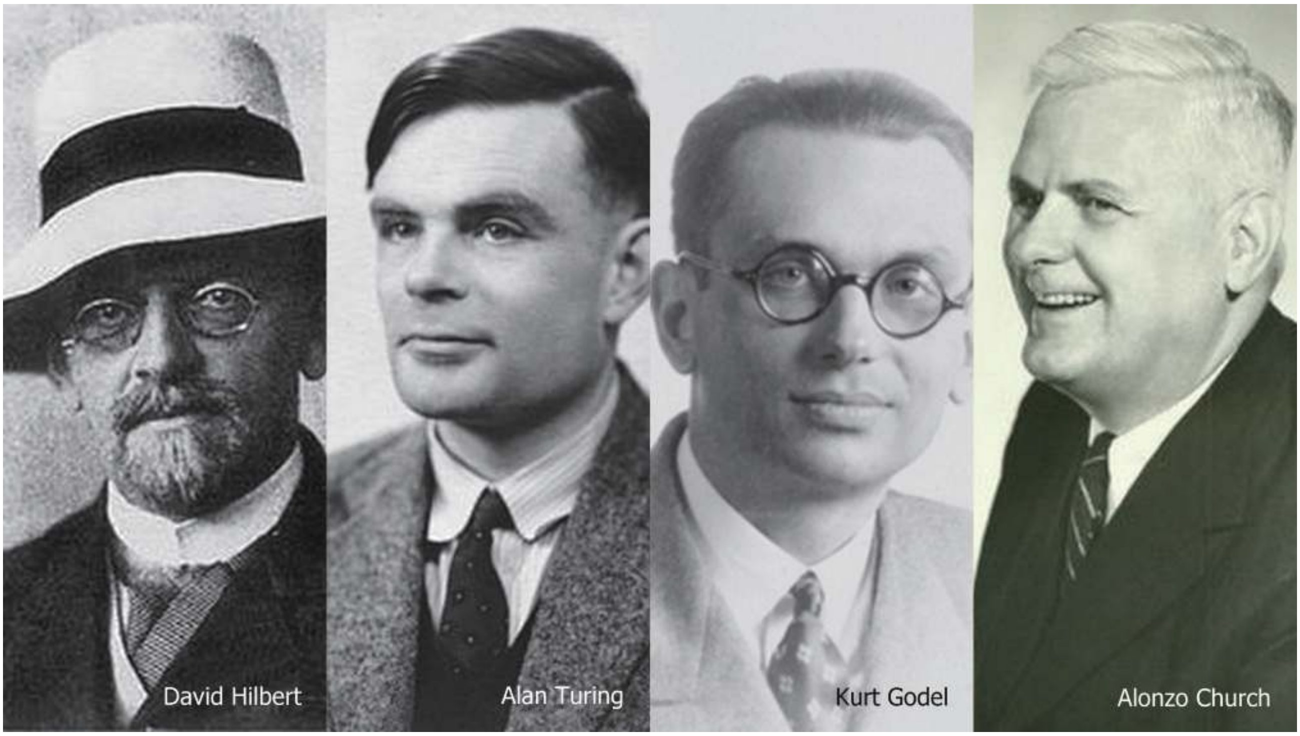
1928 年，大卫•希尔伯特（David Hilbert）提出了一个著名的问题：是否存在一系列有限的步骤，它能判定任意一个给定的数学命题的真假？这个问题就叫做 Entscheidungsproblem，德语“判定性问题”的意思。大家普遍认为，这样的一套步骤是不存在的，也就是说我们没有一种判断一个数学命题是否为真的通用方法。为了证明这一点，真正的难题是将问题形式化：什么叫做“一系列有限的步骤”？当然，现在大家知道，这里所说的“有限的步骤”指的就是由条件语句、循环语句等元素搭建而成的一个机械过程，也就是我们常说的“算法”。不过，在没有计算机的时代，人们只能模模糊糊地体会“一个机械过程”的意思。1936 年，阿兰•图灵在其著名的论文 On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem 提出了一种假想的机器，第一次给了“机械过程”一个确凿的含义。

图灵提出的机器非常简单。假设有一张无穷向右延伸的纸条，从左至右分成一个一个的小格子。每一个小格子里都可以填写一个字符（通常是单个数字或者字母）。纸条下方有一个用来标识“当前格子”的箭头，在机器运行过程中，箭头的位置会不断移动，颜色也会不断变化。不妨假设初始时所有格子都是空白，箭头的颜色是红色，并且指向左起第一个格子。为了让机器实现不同的功能，我们需要给它制定一大堆指令。每条指令都是由五个参数构成，格式非常单一，只能形如“如果当前箭头是红色，箭头所在格子写的是字符 A，则把这个格子里的字符改为 B，箭头变为绿色并且向右移动一格”，其中最后箭头的移动只能是“左移一格”、“右移一格”、“不动”中的一个。

精心设计不同的指令集合，我们就能得到功能不同







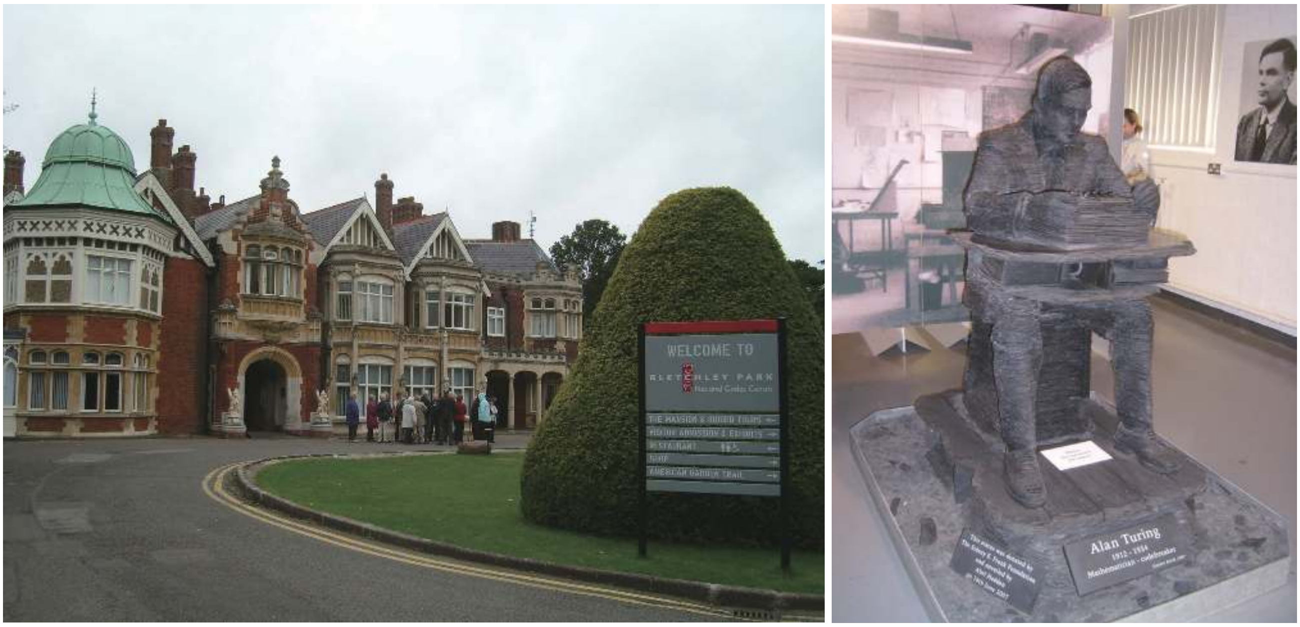
可计算理论研究的创始人（从左至右）：希尔伯特，图灵，哥德尔，邱奇

的图灵机。你可以设计一个生成自然数序列的图灵机，或者是计算根号 2 的图灵机，甚至是打印圆周率的图灵机。图灵本人甚至在论文中实现了这么一种特殊的图灵机叫做通用图灵机，它可以模拟别的图灵机的运行。具体地说，如果把任意一个图灵机的指令集用图灵自己提出的一种规范方式编码并预存在纸条上，那么通用图灵机就能够根据纸条上已有的信息，在纸条的空白处模拟那台图灵机的运作，输出那台图灵机应该输出的东西。

但是，图灵机并不是无所不能的。图灵证明了一个看似有些惊人的事实：不存在这样的一个图灵机，它能读取任意一个图灵机的指令集，并判断该图灵机是否将会在纸条上打印出至少一个 0 。注意，简单地用通用图灵机做模拟并不是一个可行的方案，因为模拟到现在还没有打出 0 ，不意味着今后永远不会打出 0 。这个定理有一个更深刻的含义，即没有一种通用的方法可以预测一台图灵机无穷远后的将来（后人把这个结论简化为了著名的停机问题）。正如 The Annotated Turing 封底上的一段文字所说：在没有计算机的时代，图灵不但探索了计算机能做的事，还指出了计算机永远不能做到的事。

在论文的最后一章，图灵给出了一种图灵机指令集和一阶逻辑表达式的转换规则，使得这个图灵机将会打出 0 来，当且仅当对应的一阶逻辑表达式为真。然而，我们没有一种判断图灵机是否会输出 0 的算法，因此我们也就没有一种判断数学命题是否为真的通用办法。于是，Entscheidungsproblem 有了一个完美的解答。

有趣的是，图灵机本身的提出比 Entscheidungsproblem 的解决意义更大。计算机诞生以后，出现了五花八门的高级编程语言，一个比一个帅气，但它们的表达能力实际上都没有超过图灵机。事实上，再庞大的流程图，再复杂的数学关系，再怪异的语法规则，最终都可以用图灵机来描述。图灵机似乎是一个终极工具，它似乎能够表达一切形式的计算方法，可以描述一切事物背后的规律。在同一时代，美国数学家阿隆佐 • 邱奇（Alonzo Church）创立了 λ 算子（λ-calculus），用数学的方法去阐释“机械过程”的含义。后来人们发现，图灵机和 λ 算子是等价的，它们具有相同的表达能力，是描述“可计算性”的两种不同的模型。图灵机和 λ 算子真的能够描述所有直观意义上的“可计算数”、“可计算数列”、“可计算函数”吗？有没有什么东西超出了它们的表达能力？这个深刻的哲学问题就叫做邱奇 - 图灵论题（ Church-Turing thesis）。当然，我们没法用形式化的方法对其进行论证，不过大家普遍认为，图灵机和 λ 算子确实已经具有描述世间一切复杂关系的能力了。人们曾经提出过一些 hypercomputer ，即超出图灵机范围的假想机器，比如能



二战时丘吉尔成立的英国密码学校原址（左），以及大厅里的图灵雕塑（右）。图灵曾在此协助破译德军密码

在有限时间里运行无穷多步的机器，能真正处理实数的机器。不过这在理论上都是不可能实现的。

事实上，图灵在他的论文中就已经指出，人的思维也没有跳出图灵机的范围。对此，图灵有一段非常漂亮的论证：人在思考过程中，总能在任意时刻停下来，把当前进度记录在一张纸上，然后彻底走开并把它完全抛之脑后，过一会儿再回来，并完全凭借纸上的内容拾起记忆，读取进度，继续演算。也就是说，人的每一帧思维，都可以完全由上一帧思维推过来，不依赖于历史的思维过程。而图灵机所做的，也就是把人的思维步骤拆分到最细罢了。

没错，这意味着，或许一个人的语言、计算甚至学习能力，完全等价于一个图灵机，只不过这个图灵机的指令集可能异常庞大。1950 年，图灵的另一篇经典论文 Computing Machinery and Intelligence 中正式把人和机器放到了相同的高度：让一个真人 C 先后与一台计算机 A 和另一个真人 B 进行聊天，但事先不告诉他 A 和 B 哪个是机器哪个是人；如果 C 无法通过聊天内容分辨出谁是机器谁是人，我们就认为计算机 A 具有了所谓的人工智能。这就是图灵测试。

计算机拥有智能？这岂不意味着计算机也能学习，也能思考，也拥有喜怒哀乐？人类似乎瞬间失去了不少优越感，于是不少科学家都旗帜鲜明地提出了反对意见。其中最为经典的恐怕要数美国哲学家约翰•塞尔（John Searle）在 1980 年提出的“中文屋子”思想实验了。把一个不懂汉语的老外关在一个屋子里，屋子里放有足够多的草稿纸和铅笔，以及一本汉语机器聊天程序的源代码。屋子外面则坐着一个地地道道的中国人。屋里屋外只能通过纸条传递信息。老外可以用人工模拟程序运行的方式，与屋外的人进行文字聊天，但这能说明老外就懂中文了吗？显然不能。每次讲到中文屋子时，我往往会换一种更具戏剧效果的说法。一群微软研究员在小屋子里研究代码研究了半天，最后某人指着草稿纸一角的某个数字一拍大腿说，哦，原来屋外的人传进来的是一段笑话！于是，研究员们派一个代表到屋子外面捧腹大笑——但是，显然这个研究员是在装笑，他完全不懂笑点在哪儿。这个例子非常有力地说明了，机器虽然能通过图灵测试，但它并不具有真正的智能。

当然，有反方必有正方。另一派观点则认为，计算机拥有智能是一件理所当然的事。这涉及到一个更为根本的问题：究竟什么是智能？

记得我曾经看过一本科幻小说，书名不记得了，情节内容也完全不记得了，只记得当我看完小说第一页时的那种震撼。在小说的开头，作者发问，什么是自我意识？作者继续写到，草履虫、蚯蚓之类的小动物，通常是谈不上自我意识的。猫猫狗狗之类的动物，或许会有一些自我意识吧。至于人呢，其实我只敢保证我自己有自我意识，其他人有没有自我意识我就不知道了。看到这里我被吓得毛骨悚然：完全有可能整个世界就只有我一个人有自我意识，其他所有人都是装出一副有意识的样子

的无生命物！

有一次做汉语语义识别的演讲时，讲到利用语义角色模型结合内置的知识库，计算机就能区别出“我吃完了”和“苹果吃完了”的不同，可以推出“孩子吃完了”多半指的是什么。一位听众举手说，难道计算机真的“理解”句子的意思了？我的回答是，没有冒犯的意思，你认为你能理解一个汉语句子的意思对吧，那你怎样证明这一点呢？听众朋友立即明白了。你怎样证明，你真的懂了某一句话？你或许会说，我能对其进行扩句缩句啊，我能换一种句型表达同样的意思啊，我能顺着这句话讲下去，讲出与这句话有关的故事、笑话或者典故，我甚至还能在纸上画出句子里的场景来呢！那好，现在某台电脑也能做到这样的事情了，怎么办？

这就是所谓的“功能主义”：只要它的输入输出表现得和人一样，不管它是什么，不管它是怎么工作的，哪怕它只是一块石头，我们也认为它是有智能的。永远不要觉得规则化、机械化的东西就没有智能。你觉得你能一拍脑袋想一个随机数，并且嘲笑计算机永远无法生成真正的随机数。但是，你凭什么认为你想的数真的就是随机的呢？事实上，你想的数究竟是什么，这也是由你的大脑机器一步一步产生的。你的大脑逃不出图灵机。

事实上，整个世界也逃不出图灵机的范围。牛顿系统地总结了物体运动规律后，人类豁然开朗，原来世界万事万物都是由“力”来支配的。扔出一个东西后，这个东西将以怎样的路线做怎样的运动，会撞击到哪些其他的物体，它们分别又会受到怎样的影响，这都是可以算出来的。这便是所谓的机械唯物主义：我们的世界是一个简单的、确定的、线性的、无生的世界。1814 年，法国数学家拉普拉斯（Laplace）给出一个更加漂亮的诠释：如果有一个妖精，它知道宇宙某个时刻所有基本粒子的位置和动量，那么它就能够根据物理规律，计算出今后每一时刻整个宇宙的状态，从而预测未来。刘慈欣在科幻小说《镜子》中更加极端地把初始状态取到宇宙大爆炸的时刻，因为宇宙诞生之初的状态极其简单，调整到正确的参数就可以生成我们所处的这个宇宙。这就是所谓的决定论。

我特别相信这些说法。我的拖延症有一个非常怪异的缘由，那就是我会告诉自己，截止的那一天总会到来的，这堆破事儿总会被我做完的。遇上纠结的问题，我不会做过多的思考，而会让一切顺其自然。其实，结果已经是确定的了，我真正需要做的不过是亲自把这个过程经历一遍。就仿佛我没有自由意志了一样。

不过，有了现代物理学的观念，尤其是量子理论的诞生，人们开始质疑上帝究竟会不会掷骰子了。然而，上帝会不会掷骰子，对于我们来说其实并不重要。图灵的结论告诉我们，即使未来是注定的，我们也不一定有一种算法去预测它，除非模拟它运行一遍。但是，要想模拟这个宇宙的运行，需要的计算量必然超出了这个宇宙自身的所有资源。运行这个宇宙的唯一方式，就是运行这个宇宙本身。塞思•劳埃德（Seth Lloyd）在 Programming the Universe 里说到：“我们体会到的自由意志很像图灵的停机问题：一旦把某个想法付诸实践，我们完全不知道它会通向一个怎样的结局，除非我们亲身经历这一切，目睹结局的到来。”

未来很可能是既定的，但是谁也不知道未来究竟是什么样。每个人的将来依旧充满了未知数，依旧充满了不确定性。所以，努力吧，未来仍然是属于你的。

作者简介：顾森，网名 matrix67，北京大学中文系应用语言学专业本科大四学生，数学爱好者，2005 年开办博客 matrix67.com，至今有上千篇文章，已有上万人订阅。曾任果壳网死理性派编辑，担任三年初中奥数培训教师，现兼任人人网产品部算法组技术人员。

微积分
——人类文明史上的一株奇葩

曹之江

文化，似乎是一个很复杂的范畴，人们很难用简单的话对它进行扼要的概括，它的内容也许可以有很多的方面，如哲学的方面、美学的方面等等。本文由于是论述数学的文化，因此，论述侧重在哲学方面，即知识与逻辑演绎的方面。

一、数学文化的初级阶段。人类社会形成之初就有了最原始的文化形态。在这个阶段，人的思维是简单的，不懂什么是理性的推演和逻辑演绎，他们的语言只是周围事物的简单反映，比如在数量上他们只懂得反映事物的多寡与大小的几个自然数（这也是数学的发端）。提到数学文化的初级阶段我们需要总结下列几点：

1、自然数系的发现。人们发现可以通过少量几个符号的不同排列组合去表示出所有的自然数，这就是进位计数法。例如我们现在用的 0, 1, 2, …, 9 等十个符号，用它们不同的排列组合去表示任何位数的自然数，这就是十进位记数法。然后我们又发现自然数的自然演算——加法与乘法，这样我们就得到了人类第一个无穷数系——自然数系。

2、有理数系的建立。人们为了表现事物的局部，就将自然数自然的推广到分数与小数以及它们的四则运算，这就是人们所称的有理数系。在应用上，人们可以用有理数系去表示任何物体的大小与多寡。

3、坐标方法的发现。人们后来发现，可以用两个有序的数去表示平面上的一个点，可以用三个有序的数去表示三维立体空间上的一个点。根据这样的原理，我们就可以将一条无限长的直线用一个二元一次方程式来表示，将一个无限扩展的平面，用一个三元一次方程式来表示。这样我们就可以用解析的方法去研究直线和平面，或者说我们将几何形体的研究归入到了解析的或数的范畴。

4、人们从二元一次的直线方程式中发现了匀速直线运动方程式，这时候，一个量是时间，另一个量是物体行径的距离。人们由此进一步发现了两个量之间的正比关系，也就是 $\Delta y/\Delta x=k$，这里 x,y 是指两个不同物体的量，Δ 是指它们的增量，k 是一个常数。若将上述增量成正比的关系展开，就成了一个二元一次方程式。因此增量成正比的量的关系也称为线性关系。这个线性关系虽然是最简单的关系，但下面就能够发现这也是世界万物最普遍的变化关系，是微积分原理的基础。

二、变量数学的兴起。人类文明进化到了中世纪就已不能满足这初级形态的文化，在前一时期，任何数都不过是孤立、静态量的一种表述。然而到了中世纪，人们就需要了解事物的各种各样的运动和变化形态，并给予精确的描述和演算。如人们需要了解地球及各种行星的运动，以及地球上万物的运动变化关系等，这就需要把事物的量从孤立、静止的形态转化成变化的形态。这就要求数学的文化从初级形态深化到变量数学的高级形态。于是，我们就将静态的数的研究与表述转化成为动态的变量与函数的研究表述。这就使人类文明进入到新的时代，在这个时代面前，高高耸立着“微积分”这三个大字。微积分是人类两种文明的界石，是人类现代工业与物质文明的先导。它不是造物主的自然赐予，而是人类理性主义智慧的产物。因此，微积分是人类文明史上的一株奇葩。

然而，要将静态数学上升为动态的变量数学却谈何容易。首先，造物主并没有给出变量数学的理想平台，造物主所赐予的只是人类在感觉误差以内的数学的应用平台，即前面所说的自然数系及其推广的有理数系。然而，这个有理数系可以描述任何人的感官所及的物体，它决不是一个可资逻辑演绎的理想平台。有理数系虽然可以表示万物无处不在，但它却缺少理想的“致密性”。简单地说，我们若将所有的有理数都映射到一条无限长的直线上（数轴），就会产生许多不能用有理数来表述的空隙，比如，纪元500年以前古希腊人已经发现了单位长的正方形的对角线，其长度不能用数（有理数）来表示，人们后来把这样的长度称为无理数。以后有人证明这样的无理数何止千千万万！它们占满了整个数轴的长度，而只留给有理数为 0 尺度的地盘。显然，这样残缺

曹之江编著的图书

不全的有理数系是完全不理想的，是不能满足理性主义思维需求的，这样建造一个变量数学所谓理想平台的任务就完全落在了人类自己的头上。这个理想数域平台就是实数域。它们在19世纪下半叶由德国数学家康托、戴德金等人用严谨的逻辑演绎加以完成了。这个实数域就是与一条无限长的数轴同构的有致密性的理想数域。基于这一实数论域，严格的变量与函数的论述就变得畅行无阻。

三、微积分学应运而生。在滚滚的历史潮流推动下和几代千百个代表人物的努力下，作为新一代的文化——变量数学的主体微积分学终于脱颖而出了。我们说它是应运而生的，因为它是时代和历史的产物，是千千万万人共同努力的结果。首先伴随它出现的是极限理论。学习微积分的人们都可发现微积分的任何一个新概念，都是以极限来定义的，由此可见极限是连接旧与新的两种文化的桥梁，是微积分的前奏，是从有理数到实数域平台的一种必要的转化。其次是初等函数系的形成。变量数学的任务是要描述并演算客观世界中千千万万的运动变化关系。然而，要用文字来完全表示出这无数个运动变化关系是不可能的。因此，必须从它们中间抽象出若干最常见的变化关系作为主干，并由它们的各种组合去表现出众多的常见的变化关系，这就是我们常说的初等函数系。初等函数的出现是人类文化史上最伟大成就之一。它主要分成为三类：①日常加减乘除四则运算为主的多项式及多种有理函数类；②与人口增长及物质的衰变为主要背景的指数函数类及它们的反函数、对数函数类；③以三角形边角计算以及力学中简谐振动为主要背景的正余弦函数为主体的三角函数类，以及它们的反函数（反三角函数类），这是一种周期的、有阶的特殊函数类。上述函数由于它们的变化演算不在四则运算之列，因此它们又称超越函数类（除有理函数）。因为这些新规则划界的初等函数，其主体都是超越函数，函数值都不属于四则运算，那么它们又将如何运算？如等于什么等等。这个函数值的计算问题没有解决，这类函数在现实应用中是毫无价值的。因为人们只会进行四则演算，因此他们只会计算在有理数域上的多项式函数，而在微积分里我们专门有一章讨论了如何在每一个光滑超越函数的局部来进行多项式的逼近。它们因自变量的区间与逼近多项式的次数，可以逼近准确到任何程度，这就是 Tayor 公式，完全解决了超越函数值的计算问题。今天我们有了非常详尽的三角函数表、对数表、…，就是这么产生的。

除此而外，我们还可以将任何一个无限光滑的超越函数，在它整个的定义域上用一个无穷多次的多项式来表示，即所谓幂级数理论。这就有点

像将任何一个实数表示成为具有无限位数的小数。其实质是将一定的超越函数用一个无限次演算的有理函数来表示，也是一种多项式的逼近。这本身就说明了两种文化的联系。

四、神妙的微分和积分。作为变量数学主体的微积分学，它是对周围世界千变万化的函数引进了两种新的运算——微分与积分。变量数学，要应用函数去描述并演算客观世界的各种物质运动与变化，但早期人们只懂得事物之间的正比变化关系，那么如何将这两者联系起来，我们还是以物质的运动为例来说明。起初，人们只懂得物体运动的距离与时间成正比，这里若把时间看成是变量，那它就是匀速的直线运动方程。然而，我们面临的是一个变速运动，那么如何去计算在时间 T 内所经过的距离呢？一个朴素的思想是我们将整个时间 T 分割成许多小段，在每一个小段里我们把运动视为是匀速的。于是，可以按照匀速运动的公式去计算它们的距离，然后把它们叠加，就得到了整段时间内的运动距离。然而这样做，第一有很大的累积误差，第二是步骤繁杂，因此难以实行。然而，微积分学里的微分就是根据这个朴素思想来实现的。微积分学把整个 T 时间上的区间分割成每一个时刻的局部领域，它们是如此的微小，因此在这个局部可以看成是匀速运动，它的运动方程 $dy/dt=k$，其中 t 是时间变量，y 是距离变量。在微积分学里我们把这个比例常数 k 称为距离变量 y 在 t 时刻的导数，而上述方程也成为 y 在 t 时刻的微分，这里的增量符号 d 本应写成为常规符号 Δ，因这是微分的专用符号，故写成 d。由于这时运动已转化成为匀速直线运动，于是我们可以按照匀速直线运动公式来计算出在这段时间区间内行经的距离。最后，我们再把所有这些在各个时刻点的领域所计算出来的距离叠加起来，就得出在整段时间 T 内变速运动所走过的距离。这就是将在整体时间 T 上的变速运动转化成为许多局部上可计算的匀速运动的叠加，这就是微积分学中局部化的思想。在上述过程中，我们还需要指出的是：可以将时刻变量 t 转变为一般的自变量 x。因此，我们可以将微分学原理用到一切非均匀的物质变化之中。例如我们最常见的平面上曲边梯形的面积计算，或在一般曲面包围下的空间体积的计算等等。这种将微小的直线形体叠加起来的方法就是微积学中的定积分。然而，这种计算若采用朴素的方法去实现，不但步骤繁琐，而且累积误差很大，是不可实行的。但在微积分学的理论中我们用严密的极限理论的论述，将这些缺点完全克服了，这里限于篇幅就不加以赘述了。

下面再谈谈函数在一定区间上的积分。这个积分就是上文所说的函数在各点领域中微分的叠加。从积分的朴素观点来看，它是一个很复杂的量，然而，我们应用极限的理论将它极大的规则化和精确化。由于积分区间是有上下限的，因此，它的值也随着它的上限（或下限）而变，故它也是积分上限的函数，这个函数我们平常就称为不定积分。由于不定积分的计算就是函数中变动上限的定积分计算。至此，微积分学已经赋予了从函数到函数的两种全新运算——微分与积分。它们本质上是两类新函数，即导函数与不定积分的演算。这两种演算都是通过极限理论来加以严密化与规则化的。这是微积分学所赋予函数类的两种神妙的演算，它们完全不同于实数的四则运算。这两种演算的建立与完善可以说是微积分学屹立迄今的基础。因为微积分学若只有漂亮的理论而没有简便精确可行的演算，那就等于是“纸上谈兵”，是完全没有用的。微积分学至今天，所以能够应用到理工科及多种学科，并且成为物质文明的先导，完全依靠了这两种演算的可行性。

现在来简单谈谈这两种演算。首先是导函数（又称为函数在各点上的变化率）的寻求。乘方函数 $y=x^k$（k 为自然数）的导数，只需应用二项式和极限立即就能求得。至于多类超越函数的导数，则需依靠两类特殊的极限公式（即超越数 e 和 $\frac{\sin x}{x}$，当 $x \to 0$ 时的极限）推导而得。与此同时，我们又推导出了一个函数在多种演算组合下的求导公式。这样我们就完全解决了函数寻求导函数的问题。至于积分的演算，按照原意，它是一项很复杂的极限，是不能演算的。然而根据牛顿 - 莱布尼茨公式，函数的不定积分和导函数互为逆运算。因此，求函数不定积分的演算变成为对它的原函数的寻求，从而，事情就变得相当简单。而牛顿 - 莱布尼茨公式也就被称为微积分的基本定律。至于函数被表述成为幂级数函数的形式，则它的求导与积分就成了简单的逐项求导与积分的问题。至此我们已完全说明了这神妙的微分与积分问题。由于微分和积分的重要性和简便性，现已被应用到科学和一切工程领域，成为当今物质文明的支柱。读者如对这方面的内容有兴趣可参阅参考（1）（2）（3）等著作。

参考文献

1. 曹之江，微积分简明教程（上），北京高等教育出版社，1999 年。
2. 曹之江，数学分析基础原理，内蒙古大学出版社，2004 年。
3. 曹之江，谈数学及其优教，北京高等教育出版社，2007 年。

微博上的数学漫游（连载一）

歌之忆 http://weibo.com/wildmath

如果在微博上来一次随机走动式的数学漫游，那么我想把坐标原点定为笛卡尔。比起那些严密得让你喘不过气来的数学理论，更有意思的事情，倒是去拜访那些创造了数学的人们，去回望那滋养了数学的历史情境。

笛卡尔 Descartes

法国数学家笛卡尔（1596-1650）

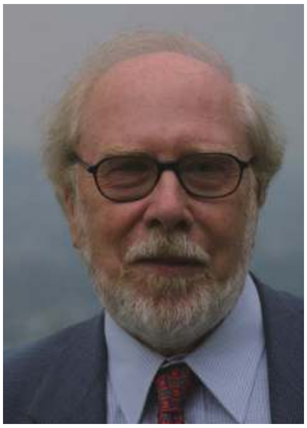
Pierre Louis Dumesnil 的油画《瑞典女王》，描述笛卡儿教数学的场景

■ 传说笛卡尔（Rene Descartes）某日躺在床上，饶有兴致地盯着天花板上的一只苍蝇，天花板上是木条嵌成的正方形网格，他居然就发明了直角坐标系。他追女孩的方式酷毙了：送女孩一个心形线方程 。他的一句“我思，故我在”，影响了几代欧洲人，被誉为“第一个为人类争取并保证理性权利的人”。

17世纪的欧洲，古希腊数学再度复兴，欧几里得的《几何原本》和丢番图的《算术》风靡一时，数学成为知识界的中心话题之一，连城市广场也经常张贴数学难题征解。正是在《算术》一书的空白处，律师费马写下了著名的费马大定理。而笛卡尔致力于把古希腊的几何学与新兴的代数学结合起来，建立了解析几何学。

笛卡尔开创的欧陆理性主义，也影响到一代杰出学者帕斯卡（Blaise Pascal），此君 16 岁就发现了帕斯卡定理。启蒙运动时期的学者，并不行止于空谈，帕斯卡还发明了最早的加法器。帕斯卡认为人同时需要随心灵而走的“纤细精神”和随理性而走的“几何精神”——“人是一支芦苇，但他是一支会思想的芦苇”。

法国数学家帕斯卡（1623-1662）

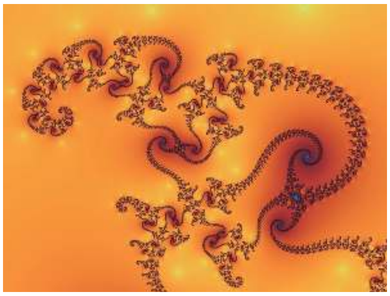


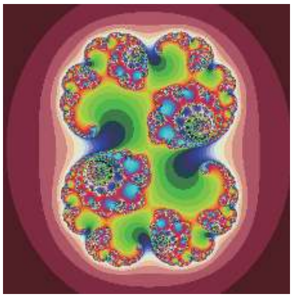
瑞士计算机科学家沃思（1934-）

当代计算机学者沃思（Niklaus Wirth）十分崇拜帕斯卡。他发明了著名的结构化程序设计语言——Pascal，应用极为广泛。因其简洁、结构化的特点，成为信息学国际奥林匹克竞赛使用最广泛的编程语言之一。沃思教授获得了 1984 年图灵奖，其得奖贡献就是他的一句经典名言：“算法＋数据结构＝程序。”

朱利亚 *Julia*

■ 浪漫之都法兰西，总是流传数学家的传奇故事。比如朱利亚（Gaston Julia），参加第一次世界大战，他失去了鼻子。战后，他在 25 岁时发表了一篇 199 页的论文，论述有理函数迭代的混沌行为点集（Julia 集）。此工作的价值，多年后被分形几何大师孟德尔布罗特（Benoit Mandelbrot）发现。美丽的 Julia 集，诞生在没有计算机的时代。





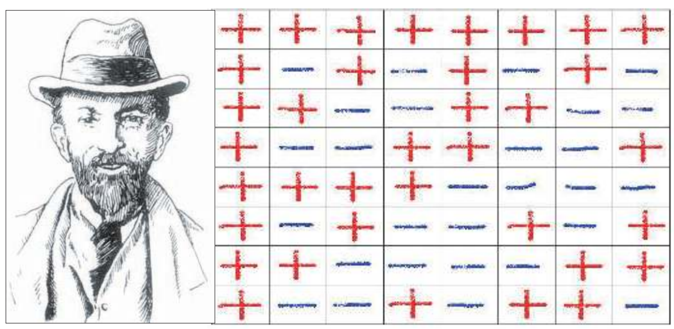
法国数学家朱利亚（1893-1978）

1912 年庞加莱去世，数年之后第一次世界大战爆发，类似朱利亚的才俊们被送上前线，法国数学错失了整整一代人。单靠函数论强撑门面，根本无法抗衡德国。而阿达玛（Jacques Hadamard）和他的继任者朱利亚主持法兰西学院数学讨论班，坚持研习先进数学。为法兰西带来巨大光荣的布尔巴基，早期骨干全出自该讨论班。

阿达玛 Hadamard

法国数学家阿达玛（1865-1963）

法国数学家阿达玛有多厉害？这位犹太人证明了素数定理，提出了“泛函”和偏微分方程适定性概念。Hadamard 矩阵、Hadamard 变换长期是研究热点。在引人入胜的量子计算中，有 Hadamard 门。Walsh-Hadamard 矩阵甚至被 IS-95、WCDMA、CDMA2000 等移动通信标准采纳，作为下行链路用户码等使用。



执掌法兰西学院数学部的阿达玛，自幼各门功课表现出色——唯独数学一塌糊涂！七年级之后他遇上一位优秀的数学老师，渐露头角。法国崇尚精英体制，其高等教育的两张王牌是巴黎高等师范与巴黎综合理工学院。而阿达玛在这两所顶尖学府的入学考试中都名列前茅，最终选择了巴黎高师。

阿达玛对中国人民有着深厚的情意——1936 年他在国立清华大学数学系任教，同一时期，维纳在电机系任教。自清华起，阿达玛开始培养中国偏微分方程的先驱者吴新谋。他还和维纳分别将华罗庚介绍给了维诺格拉朵夫和哈代。阿达玛 1963 年逝世，其法文著作《偏微分方程论》于 1964 年在中国出版。

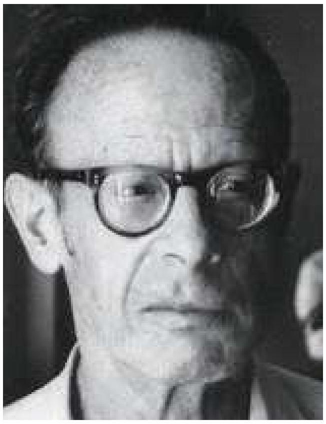
美国数学家维纳（1894-1964）

前苏联数学家维诺格拉朵夫（1891-1983）

中国数学家华罗庚（1910-1985）

中国数学家吴新谋（1910-1989）

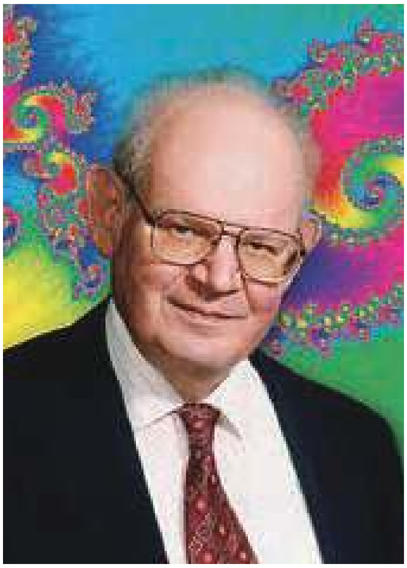
阿达玛名下弟子寥寥，却威震天下。先说安德烈 • 韦伊（André Weil），20 世纪最伟大的数学全才之一，布尔巴基的领袖，毕生两度挽法国数学于狂澜，荣享至尊；再说莱维（Pail Pierre. Lévy），Lévy 过程早已是随机过程的标准内容，其学生孟德尔布罗特（Benoît B. Mandelbrot）是分形几何之父、Matheron 参与发明数学形态学、Loève 则以统计上的 KL 变换闻名。



法国数学家安德烈•韦伊（1906-1998）

法国数学家莱维（1886-1971）

孟德尔布罗特 Mandelbrot

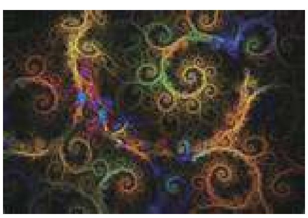


法国数学家孟德尔布罗特（1924-2010）

分形固然好看，却也颇多争议。80 年代末，格兰茨（Steven G. Krantz）向美国数学会的研究刊物 Bulletin 撰文，质疑孟德尔布罗特的优先权和工作价值，他还把清样寄给了孟德尔布罗特，后者迅即反驳。为难的编辑先想改在美国数学会的会刊 Notices 发表，最终决定撤稿了事。后来施普林格出版了双方论战檄文。而格兰茨现在成 Notices 的主编了！

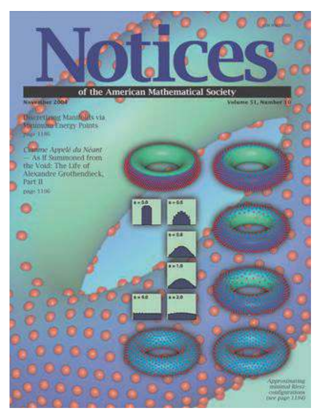
美国数学家格兰茨
（1951-）

格兰茨向孟德尔布罗特就分形的首创人与数学意义发起质疑，煞是吸引眼球。攻方是多复变权威，师出调和分析大师 Stein，看今日他名震天下的师弟陶哲轩，可想其身手该是不凡。而守方乃概率大师莱维之徒，绝非等闲之辈。胜负姑且不论，这场论战告诫世人：数学追求严肃的理论，而不是艺术炫图。



孟德尔布罗特的一生真够“分形”的。年幼从波兰逃难巴黎，凭天赋闯入高师，又转学巴黎高工。到美国加州理工拿了个航空学硕士，回巴黎大学拿到数学博士。冯 • 诺伊曼请他到高等研究所干过，在哈佛做过客座教授，在 IBM 工作了 35 年。落脚耶鲁任教 12 年之后，创下了 75 岁高龄才拿到终身教授（tenure）的纪录！

以分形成名的孟德尔布罗特，早在上个世纪 50 年代就开始琢磨股市，他发现了股市数据噪声并不服从高斯分布，而是服从长尾的 Lévy 分布。在金融领域，长尾意味着更高风险。这类体现“幂律”的还包括经常用于衡量财富分布的 Pareto 分布。“分形之父”也被称作“长尾分布之父”。



享有“长尾分布之父”与“分形之父”两项美誉的孟德尔布罗特，少年投靠他的数学家叔叔 Mandelbrojt，而后成为概率论大师莱维的学生。这两位老师都是阿达玛的博士。Lévy 分布成就了他的第一项美誉，Lévy 的 C- 曲线又近乎于分形。面对这样一群优秀的犹太学者，你会有多羡慕他们的学术传承！

著名科学作家 Gleick 在《混沌》一书中大幅介绍了孟德尔布罗特的分形。虽然理论数学家格兰茨强调：Fatou 和朱利亚在复动力系统中的工作才是真正出色的数学。但赢得沃尔夫奖的孟德尔布罗特对得起“分形之父”的桂冠。他 2010 年逝世后，法国总统萨科奇称道他拥有强大而富有创造力的智慧。

法国数学家 Pierre Fatou
（1878-1929）

法国数学家 Paul Montel
（1876-1975）

作为数学家的孟德尔布罗特未必算第一流的，但绝对是特立独行的。他直觉思维如此发达，从达利的画作看到的是自相似性。IBM 公司不但给了他自由探索的空间，而且他还能利用 IBM 强大的计算机。分形的研究，繁盛于计算机时代，还为数学联接艺术打通了一座新的桥梁。

被格兰茨推崇备至的 Fatou 和朱利亚，当之无愧是法国函数论学派在复动力系统的杰出代表。在第一次世界大战后的低谷期，正是 Fatou、朱利亚和 Montel（正规族理论）这批杰出的函数论人才，为法国数学储备了实力。不过，貌似抽象的函数论在信息社会中扮演的极为关键的角色，却长期不为公众所知。

佩利 Paley

信息社会的基础是电信。麦克斯韦理论提出之后，马可尼研制起基于辐射电磁波的无线通信。1930 年代，长途电话网逐步采用了频分复用技术。通信的收发装置都牵涉到“滤波”技术。很基本的问题就是：能量有限的信号经过（严格低通）滤波器后变成了什么？充分而且必要的答案是：指数型整函数。

英国数学家佩利（1907-1933）

要理解函数论在现代电信中的基本作用，不得不提一个超级数学天才、剑桥大学研究生佩利（Raymond Paley）。此君身出伊顿公学，23 岁即为剑桥大学三一学院院士，年轻的他和世界顶级数学名家 Zygmund、维纳、波利亚、里特尔伍德合作发表过论文。但天妒英才，1933 年他在加拿大阿尔伯特滑雪蒙难于雪崩，时年 26 岁。

擅于从工程角度提问的维纳邀请攻无不克的佩利到 MIT 合作研究。维纳提的问题是：电子工程中，滤波器在截止频率附近不可过于尖锐，如何在数学上解释？在剑桥受教于里特尔伍德的佩利，以无比精湛的技巧建立了极为深刻的 Paley-Wiener 定理，其难度之高、涉及面之广，令人惊讶。

意大利发明家马可尼（1874-1937）

法国数学家 Laurent Schwartz（1915-2002）

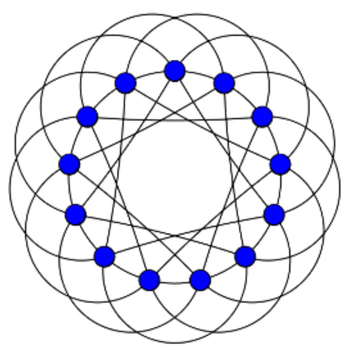
一个普通的信号，其形式可以相当随意，可一旦辨识出它有某种解析结构，丰富的数学工具就可以发威。能在傅立叶分析和函数论之间架起一座如此美丽的桥梁，把电子工程的疑问回答得如此干净利落，正是 Paley-Wiener 定理的威力所在。可这种深刻的洞察力，已经远离当代教育的平庸追求了。

电工电子学一直向数学提出挑战性的问题。比如，如何对 Heavside 函数求导、给量子力学的 Dirac 函数确立严密的数学基础？历史上曾经有不少人研究过“运算微积”，而最终法国数学家 Schwartz 以广义函数论赢得了菲尔兹奖，他还建立了 Paley-Wiener-Schwartz 定理，成为偏微分方程的核心定理之一。

年仅 26 岁的佩利（Paley），受邀美国数学会 1934 年度报告（每年不过 1-3 人），请看历年报告人包括了冯•诺伊曼、Whitney、Zygmund、Doob、陈省身、Kac、丘成桐、威腾（Witten）、Wiles，再回想 Littlewood-Paley 分解、Paley 图、Paley-Wiener 积分，人们痛惜英国失去了一颗天赋异禀却酷爱冒险的数学巨星。

佩利之死，让维纳难以释怀，哀叹英国就此失去了未来数学的台柱，他称佩利是伟大的传统的英国古典学者。15 世纪以来致力于打造精英的伊顿公学，不仅将佩利培养成谦谦君子，更练就了他的粗犷好勇，外加导师里特尔伍德是位滑雪健将。这一切，令加拿大滑雪胜地班夫的禁滑标志，刺激了一场生命豪赌。

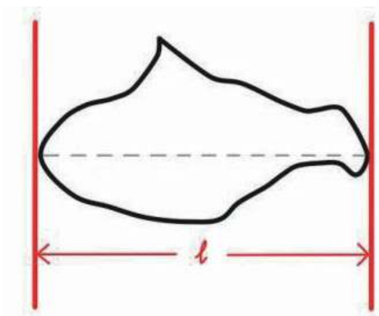
维纳和佩利常泡在 MIT 的旧办公室做推演。每当维纳提出一个难题，两人一筹莫展之时，佩利就会对维纳嚷嚷：不行啊！太难啦！搞不定啊！周末我得去纽约泡泡妞、喝喝酒，放松放松才能接着整啊！而每到周一，佩利总是能把完整的证明带来。这强悍的硬分析功夫，是被一流高手里特尔伍德严格训练出来的。

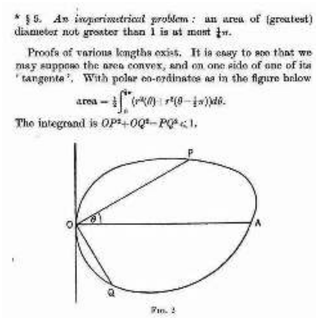


Paley 图

里特尔伍德 Littlewood

■ 真正的高手从来不空谈思想，而是直接亮出功夫。里特尔伍德的功夫有多深？不妨看一个等周问题：平面上一段封闭曲线围出来的几何形状，最远端的两点距离为 1，则其面积最大不过是 $\pi/4$。里特尔伍德只用了一行大一水平的积分公式，一行高中水平的不等式，就证明清楚了。想不想试试看？





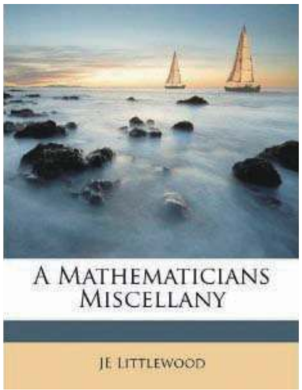
* § 5. *An isoperimetrical problem*: an area of (greatest) diameter not greater than 1 is at most $\frac{1}{4}\pi$.

Proofs of various lengths exist. It is easy to see that we may suppose the area convex, and on one side of one of its 'tangents'. With polar co-ordinates as in the figure below

$$\text{area} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(r^2(\theta)+r^2(\theta-\tfrac{1}{2}\pi))d\theta.$$

The integrand is $OP^2+OQ^2=PQ^2\leq 1$.

英国数学家里特尔伍德（1885-1977）



里特尔伍德写过一本精彩的《一个数学家的札记》。这本 150 页的小书，仿佛一个老戏骨在出神入化地表演数学的无穷奥妙。书中，他甚至还调侃了一下他的老搭档。某次他让哈代找出他们合写的论文中的一个错，可怜的哈代查了半天一无所获。谜底却是哈代的名字被错印了一个逗号：G, H. Hardy。

里特尔伍德的这本《一个数学家的札记》，颇有毛姆的笔风。看上去都是细枝末节的细小玩意，可真正的人生不就是这样享受细节之美吗？一个数学家的常态，不就是像孩子们一样享受做游戏的快乐吗？他的文笔有多简练？看刚才的问题：提问 2 行，解答 5 行（含公式 2 个），图形 1 个。

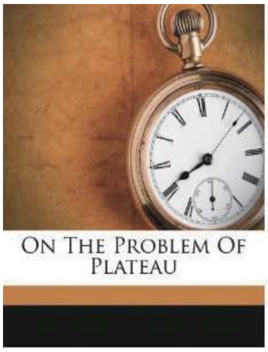
但凡出自学术大师，哪怕是闲暇之作，大多像是武林秘籍。更何况是分析大师里特尔伍德，其札记既谈了牛顿、费马、拉玛努金，也谈数学教育和各种八卦。到 80 年代，图论和泛函分析双料权威 Bollobás 搜集了大量新的材料，重新编辑出版。他甚至挖掘出精彩的研究素材，其中有个令人称奇的故事。

这段传奇，要从赫利（E. Helly）谈起。此君很早就证明了占据泛函分析中心地位的 Hahn-Banach 定理的一个深刻的特例。赫利身出维也纳大学，曾随希尔伯特一干人马做研究，但在第一次世界大战中不幸被枪击中，被俄军俘虏到西伯利亚战俘营。一战结束后，又逢俄国内战爆发，他辗转日本才回到维也纳。

奥地利数学家赫利（1884-1943）

赫利伤在肺部，落下终生病根。战俘营里的这位犹太数学家遇上一位年轻的匈牙利战俘、原在布达佩斯念土木工程的军官拉都（Tibor Radó）。在西伯利亚战俘营，数学家向土木工程大学生传授起了数学。赫利该不会遗憾，他去世 7 年之后，他曾在战俘营培养的拉都走上了 1950 年世界数学家大会，做起了报告。

一战结束后，拉都乘乱逃出西伯利亚战俘营。千里北上辗转到北极地区，在爱斯基摩人的关爱下，最终逃回到布达佩斯。经赫利调教后的他研究起数学。经历生死逃亡的他，提出了一个问题：圆盘内有个狮子和一个人，他们最快的速度一样，人能否逃脱狮子的追赶？这就是有名的“狮与人”问题。



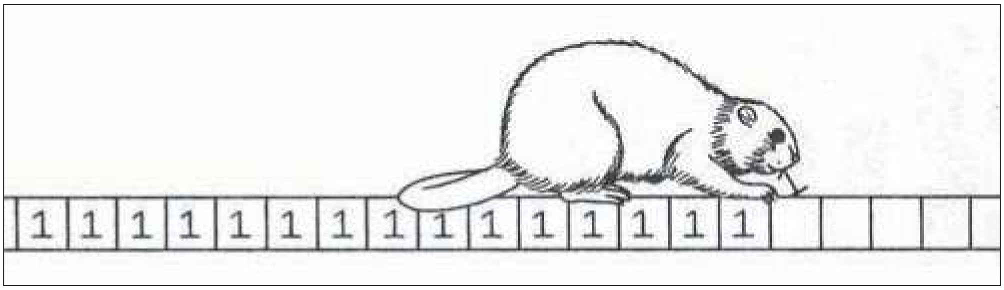
拉都的著作

拉都 Radó

匈牙利数学家拉都（1895-1965）

如果说数学充满了理性，成就这种理性的过程则不乏艰辛甚至血腥。看看被送到一战前线的家伙们：法国的朱利亚丢了鼻子，奥地利的赫利被抓到西伯利亚战俘营、居然在里面调教出了匈牙利的拉都。后者到美国后，在极小曲面问题上曾一展风采。二战结束后他还受美国之命赴德国搜罗核科学家。

拉都思考数学问题的方式极其生动而形象。比如他提出的“狮子与人”的追逐问题，引出了里特尔伍德乃至 Bollobás 的深入研究。你可以在 Bollobás 编辑的里特尔伍德数学札记里找到踪迹。拉都更为有名的工作，则是在图灵机的停机问题上，提出了“忙碌的河狸”函数，看他总爱直观！



似乎只在电影里才会出现的传奇情节，全在拉都身上真实地发生了：西伯利亚战俘营、北极荒岛、爱斯基摩人、千里逃亡、登上哈佛和世界数学家大会的讲坛。从战争的生死劫难中，宛如逃脱狮子追赶那样逃过一命的拉都，60年代抛出“忙碌的河狸”的开创性论文，全文仅只引用了唯一一篇文献，而论文发表在贝尔系统内部的技术期刊 Bell System Technical Journal 上。1948年香农那篇开创信息论和通信理论的历史性巨作也发表在此。

说到期刊，传闻维纳曾将不苟言笑的拉都恶搞过一回。维纳杜撰了一份期刊《数学琐屑》，还杜撰了一堆狂搞笑的论文标题，如“费马大定理：素数为偶数的情形”、“变态数学家的正态分布”。特别题献要“纪念”拉都，还一本正经地宣布因受到国家肃静基金会的及时资助，决定永不出版该刊！

像维纳杜撰《数学琐屑》来哄拉都开心之类令人忍俊不禁的故事，在智者身上数不胜数。大物理学家玻尔主帅的哥本哈根学派，搞过《诙谐物理学期刊》，登的是诗歌和八卦——比如玻尔某次很客气地在会议上评价某人的报告“很有趣”。散会后，老头儿对同事说，刚才的报告“纯粹一派胡言”。

未完待续

作者简介：歌之忆（笔名），生于六十年代，数学博士，任电子信息专业教授十年有余。现阶段在网络数据分析与图像识别等领域主持技术研发。

《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》

序一

欣闻《思考的乐趣：Matrix67 数学笔记》即将出版，应作者北大中文系的数学侠客顾森的要求写个序。我非常荣幸也非常高兴做这个命题作业。记得几个月前和人民邮电出版社图灵新知丛书的编辑朋友们相聚北大资源楼，并与顾森校友喝茶谈此书的出版，还谈到书名等细节。没想到图灵的朋友出手如此之快，策划如此到位。在此也表示敬意。我本人也是图灵丛书的粉丝，看过他们好几本书，比如《数学万花筒》、《数学那些事儿》、《历史上最伟大的 10 个方程》等，都是很不错的书。

我和作者顾森同学虽然只有一面之缘，但我好几年前就知道并关注他的博客了。他的博客内容丰富、有趣，有很多独到之处。诚如一篇关于他的报道所说，在百度和谷歌的搜索框里输入“matrix”，搜索提示栏里排在第一位的并不是那部英文名为“Matrix”中文名为《黑客帝国》的著名电影，而是一个名为“Matrix67”的个人博客。自 2005 年 6 月建立以来，这个博客始终保持更新，如今已有了近千篇博文。在果壳科技的网站里（这也是一个我喜欢看的网站），他的自我介绍也很有意思：“数学宅，能背到圆周率小数点后 50 位，会证明圆周率是无理数，理解欧拉公式的意义，知道四维立方体是由 8 个三维立方体组成的，能够把直线上的点和平面上的点一一对应起来。认为生活中的数学无处不在，无时不影响着我们的生活。”

据说，顾森进入北大中文系纯属误打误撞。2006 年，还在念高二的他代表重庆八中参加了第 23 届中国青少年信息学竞赛并拿到银牌，获得了保送北大的机会。选专业时，招生老师傻了眼：他竟然是个文科生。为了专业对口，顾森被送入了中文系，学习应用语言学。虽然身在文科，他却始终明恋着数学。在他看来，数学似乎无所不能。对于用数学来解释生活，他持有一种近乎偏执的狂热——在他的博客上，油画、可乐罐、选举制度、打出租车，甚至和女朋友在公园约会，都能与数学建立起看似不可思议却又合情合理的联系。这些题目，也在他这本新书里充分体现出来。

近代有很多数学普及家，他们不只对数学有着较深刻的理解，更重要的是对数学有着一种与生俱来的挚爱。他们的努力搭起了数学圈外人和数学圈内事的桥梁。这里最值得称颂的是马丁•嘉德纳，他是公认的趣味数学大师。他为《科学美国人》杂志写趣味数学专栏，一写就是二十多年，同时还写了几十本这方面的书。这些书和专栏影响了好几代人。在美国受过高等教育的人（尤其是搞自然科学的），绝大多数都知道他的大名。许多大数学家、科学家都说过他们是读着嘉德纳的专栏走向自己现有专业的。他的许多书被译成各种文字，影响力遍及全世界。有人甚至说他是上世纪后半叶在全世界范围内数学界最有影响力的人。对我们这一代中国人来说，他那本被译成《啊哈，灵机一动！》的书很有影响力，相信不少人都读过。让人吃惊的是，在数学界如此有影响力的嘉德纳竟然不是数学家，他甚至没有修过任何一门大学数学课。他只有本科学历，

而且是哲学专业。他从小喜欢趣味数学，喜欢魔术。读大学时本来是想到加州理工去学物理，但听说要先上两年预科，于是决定先到芝加哥大学读两年再说。没想到一去就迷上了哲学，一口气读了四年，拿了个哲学学士。这段读书经历似乎和顾森有些相似之处。

当然，也有很多职业的数学家，他们在学术生涯里也不断为数学的传播做出巨大努力。比如英国华威大学（University of Warwick) 的 Ian Stewart，他是著名数学教育家，一直致力于推动数学知识走通俗易懂的道路。他编著的书籍深受广大读者喜爱，包括《上帝掷骰子吗？》、《更平坦之地》、《给青年数学家的信》、《如何切蛋糕》、《数学万花筒》等。由于在科学推广方面做出了巨大贡献，他 2001 年被选为皇家学会院士（FRS），1995 年被授予英国皇家学会法拉第奖章，1997 年被邀请在英国皇家学院圣诞讲座（Royal Institution Christmas Lectures）上做数学之美的演讲。英国皇家学院圣诞讲座是每年一度面向公众，特别是年青人的科普讲座。自从 1825 年由法拉第开设以来，除 1939-1942 因二战暂停以外，从未中断，一直延续到今天。法拉第本人讲了 19 次，根据他的讲稿汇编出版了《蜡烛的故事》一书，被译为多种文字，是科普读物的典范。由于法拉第的原因，这个每年一度的科普讲座的演讲者大多是实验科学家，他们更容易用深入浅出的方法向年轻人展示科学之美。在 Ian Stewart 之前，很少有数学家能够被皇家学院邀请到这一法拉第讲坛上。在他之后，牛津大学的 Marcus du Sautoy 再次在圣诞讲座上讲演了素数和音乐这一美丽的话题。

回到顾森的这本书上，书的很多章节题目都很吸引人，比如“数学之美”、“几何的大厦”、“精妙的证明”。书的特点就是将抽象、枯燥的数学知识，通过创造情景深入浅出地展现出来，让读者在愉悦中学习数学。比如其中的一些小节“概率论教你说谎”、“找东西背后的概率问题”、“统计数据的陷阱”、“定宽曲线与蒲丰投针试验”、“利用赌博求解数学问题”，就是利用一些趣味性的话题，一方面可以轻松地消除读者对数学的畏惧感，另一方面又可以把概率和统计的原始思想糅合在这些小段子里。

数学是美丽的。对此有切身体会的陈省身先生在南开的时候曾亲自设计了“数学美”的挂历，其中 12 幅画页分别为复数、正多面体、刘徽与祖冲之、圆周率的计算、数学家高斯、圆锥曲线、双螺旋线、国际数学家大会、计算机的发展、分形、麦克斯韦方程和中国剩余定理。这是陈先生心目中的数学之美。我的好朋友刘建亚教授有句名言：“欣赏美女需要一定的视力基础；欣赏数学美需要一定的数学基础。”此书的第二部分“数学之美”通过游戏、图形、数列，就是让有简单数学基础的读者朋友们也会领略到数学之美。

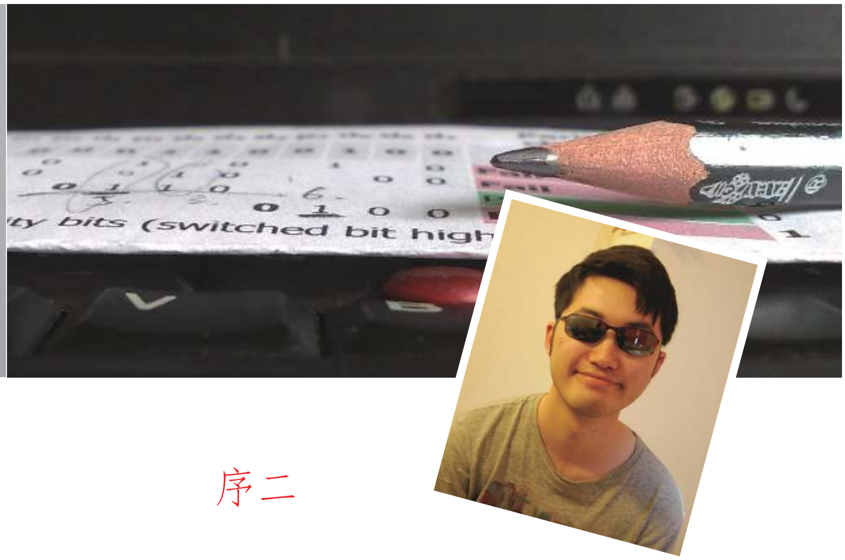
我发现顾森的博客里谈了很多作图问题，这和网上大部分数学博客不同。作图是数学里一个很有意思的部分，历史上有很多相关的难题和故事（最著名的可能是高斯 19 岁时仅用尺规构造出了正 17 边形的故事）。本书的第三部分专门讲了“尺规作图问题”、“单规作图的力量”、“火柴棒搭成的几何世界”、“折纸的学问”、“探索图形剪拼”等，愿意动动手的数学爱好者绝对会感到兴奋。对于作图的乐趣和意义，我想在此引用本人在新浪微博上的一个小段子加以阐述：

> 学生：“咱家有的是钱，画图仪都买得起，为啥作图只能用直尺和圆规，有时只让用其中的一个？”
>
> 老师：“上世纪有个中国将军观看学生篮球赛。比赛很激烈，将军却慷慨地说：娃们这么多人抢一个球？发给他们每人一个球开心地玩。”
>
> 数学文化微博评论：生活中更有意思的是战胜困难和挑战所赢得的快乐和满足。

书的最后一部分叫做“思维的尺度”，有些题目像“俄罗斯方块可以永无止境地玩下去吗？”、“比无穷更大的无穷”、“无以言表的大数”、“不同维度的对话”——看起来就很有意思，作者试图通过一个个有趣的话题使读者享受数学概念间的联系、享受数学的思维方式。陈省身先生临终前不久曾为数学爱好者题词：“数学好玩”，事实上顾森的每篇文章都在向读者展示数学确实好玩。数学好玩这个命题不仅对懂得数学奥妙的数学大师成立，对于广大数学爱好者一样成立。

见过他本人或看过他的相片的一定会同意顾森是一个美男子，有阳刚之气。很高兴看到这个英俊才子对数学如此热爱。在太平洋彼岸有个美女演员麦克拉（Danica McKellar），她因电视剧《奇迹年代》而出名，出演过《生活大爆炸》等。毕业于加州洛杉矶大学数学系的麦克拉念书期间的一个研究工作被称为 Chayes-McKellar-Winn 定理；她还写畅销的数学科普书，书名很诱人，如《数学并非没劲》（Math Doesn't Suck）、《亲吻数学》（Kiss My Math）。她有三本书曾经荣登《纽约时报》的畅销书榜。我期待顾森的书在不久的将来会成为畅销书；也期待他有一天会成为像马丁•嘉德纳那样的趣味数学大师。

香港浸会大学
汤涛
2012 年 3 月 5 日



序二

我本不想写这个序。因为知道多数人看书不爱看序言。特别是像本书这样有趣的书，看了目录就被吊起了胃口，性急的读者肯定会直奔那最吸引眼球的章节，哪还有耐心看你的序言?

话虽如此，我还是答应了作者，同意写这个序。一个中文系的青年学生如此喜欢数学，居然写起数学科普来，而且写得如此投入又如此精彩，使我无法拒绝。

书从日常生活说起，一开始就讲概率论教你如何说谎。接下来谈到失物、物价、健康、公平、密码还有中文分词，原来这么多问题都与数学有关！但有关的数学内容，理解起来好像并不是很容易。一个消费税的问题，又是图表曲线，又是均衡价格，立刻有了高深模样。说到最后，道理很浅显:向消费者收税，消费意愿减少，商人的利润也就减少；向商人收税，成本上涨，消费者也就要多出钱。数学就是这样，无论什么都能插进去说说，而且千方百计把事情说个明白，力求返璞归真。

如果你对生活中这些事无所谓，就从第二部分开始看吧。这里有“让你立刻爱上数学的 8 个算术游戏”。作者口气好大，区区 5 页文字，能让人立刻爱上数学?你看下去，就知道作者没有骗你。这些算术游戏做起来十分简单却又有趣，背后的奥秘又好像深不可测。8 个游戏中有 6 个与数的十进制有关，这给了你思考的空间和当一回数学家的机会。不妨想想做做，换成二进制或八进制，这些游戏又会如何?如果这几个游戏勾起了探究数字奥秘的兴趣，那就接着往下看，后面是一大串折磨人的长期没有解决的数学之谜。问题说起来很浅显明白，学过算术就懂，可就是难以回答。到底有多难，谁也不知道。也许明天就有人想到了一个巧妙的解答，这个人可能就是你；也许一万年后仍然是个悬案。

但是这一部分的主题不是数学之难，而是数学之美。这是数学文化中常说常新的话题，大家从各自不同的角度欣赏数学之美。陈省身出资两万设计出版了《数学之美》挂历，十二幅画中有一张是分形，是唯一在本书这一部分中出现的主题。这应了作者的说法:“讲数学之美，分形图形是不可不讲的。”喜爱分形图的读者不妨到网上搜索一下，在图片库里有丰富的彩色分形图。一边读着本书，一边欣赏神秘而惊人美丽的艺术作品，从理性和感性两方面享受思考和观察的乐趣吧。此外，书里还有不常见的信息，例如三角形居然有 5000 多颗心，我是第一次知道。看了这一章，马上到网上看有关的网站，确实是开了眼界。

作者接下来介绍几何。几何内容太丰富了，作者着重讲了几何作图。从经典的尺规作图、有趣的单规作图，到疯狂的生锈圆规作图、意外有效的火柴杆作图，再到功能特强的折纸作图和现代化机械化的连杆作图，在几何世界里我们做了一次心旷神怡的旅游。原来小时候玩过的折纸剪纸，都能够进入数学的大雅之堂了！最近看到《数学文化》季刊上有篇文章，说折纸技术可以用来解决有关太阳能飞船、轮胎、血管支架等工业设计中的许多实际问题，真是不可思议。

学习数学的过程中，会体验到三种感觉。

一种是思想解放的感觉。从小学里学习加减乘除

开始，就不断地突破清规戒律。两个整数相除可能除不尽，引进分数就除尽了；两个数相减可能不够减，引进负数就能够相减了；负数不能开平方，引进虚数就开出来了。很多现象是不确定的，引进概率就有规律了。浏览本书过程中,心底常常升起数学无禁区的感觉。说谎问题、定价问题、语文句子分析问题，都可以成为数学问题；摆火柴杆、折纸、剪拼，皆可成为严谨的学术。好像在数学里没有什么问题不能讨论，在世界上没有什么事情不能提炼出数学。

一种是智慧和力量增长的感觉。小学里使人焦头烂额的四则应用题，一旦学会方程，做起来轻松愉快，摧枯拉朽地就解决了。曾经使许多饱学之士百思不解的曲线切线或面积计算问题，一旦学了微积分，即使让普通人做起来也是小菜一碟。有时仅仅读一个小时甚至十几分钟，就能感受到自己智慧和力量的增长。十几分钟之前还是一头雾水，十几分钟之后豁然开朗。读本书的第 4 部分时，这种智慧和力量增长的感觉特别明显。作者把精心选择的巧妙的数学证明，一个接一个地抛出来，让读者反复体验智慧和力量增长的感觉。这里有小题目也有大题目，不管是大题还是小题，解法常能令人拍案叫绝。在解答一个小问题之前作者说：“看了这个证明后，你一定会觉得自己笨死了。”能感到自己之前笨，当然是因为智慧增长了!

一种是心灵震撼的感觉。小时候读到棋盘格上放大米的数学故事，就感到震撼，原来 2^{64}-1 是这样大的数！在细细阅读本书第 5 部分时，读者可能一次一次地被数学思维的深远宏伟所震撼。一个看似简单的数字染色问题，推理中运用的数字远远超过佛经里的“恒河沙数”，以至于数字仅仅是数字而无实际意义！接下去，数学家考虑的“所有的命题”和“所有的算法”就不再是有穷个对象。而对于无穷多的对象，数学家依然从容地处理之，该是什么就是什么。自然数已经是无穷多了，有没有更大的无穷？开始总会想到有理数更多。但错了，数学的推理很快证明，密密麻麻的有理数不过和自然数一样多。有理数都是整系数一次方程的根，也许加上整系数 2 次方程的根，整系数 3 次方程的根等等，也就是所谓代数数就会比自然数多了吧？这里有大量的无理数呢！结果又错了。代数数看似声势浩大，仍不过和自然数一样多。这时会想所有的无穷都一样多吧，这次又错了。简单而巧妙的数学推理得到很多人至今不肯接受的结论：实数比自然数多！这是伟大的德国数学家康托的代表性成果。

说这个结论很多人至今不肯接受是有事实根据的。科学出版社去年出了一本书名为《统一无穷理论》，该书作者主张无穷只有一个。作者不赞成实数比自然数多，希望建立新的关于无穷的理论，他的努力受到一些研究数理哲学的学者的支持，可惜目前还不能自圆其说。我不知道有哪位数学家支持“统一无穷理论”，但反对“实数比自然数多”的数学家历史上是有过的。康托的老师克罗内克激烈地反对康托的理论，以致康托得了终身不愈的精神病。另一位大数学家布劳威尔发展了构造性数学，这种数学中不承认无穷集合，只承认可构造的数学对象。只承认构造性的证明而不承认排中律，也就不承认反证法。而康托证明“实数比自然数多”用的就是反证法。尽管绝大多数的数学家不肯放弃无穷集合概念，也不肯放弃排中律，但布劳威尔的构造性数学也被承认是一个数学分支，并在计算机科学中发挥重要作用。

平心而论，在现实世界确实没有无穷。既没有无穷大也没有无穷小。无穷大和无穷小都是人们智慧的创造物。有了无穷的概念，数学家能够更方便地解决或描述仅仅涉及有穷的问题。数学能够思考无穷，而且能够得出一系列令人信服的结论，这是人类精神的胜利。但是，对无穷的思考、描述和推理，归根结底只能通过语言和文字符号来进行。也就是说，我们关于无穷的思考，归根结底是有穷个符号排列组合所表达出来的规律。这样看，构造数学即使不承认无穷，也仍然能够研究有关无穷的文字符号，也就能够研究有关无穷的理论。因为有关无穷的理论表达为文字符号之后，也就成为有穷的可构造的对象了。

话说远了，回到本书。本书一大特色，是力图把道理说明白。作者总是用自己的语言来阐述数学结论产生的来龙去脉，在关键之处还不忘给出饱含激情的特别提醒。数学的美与数学的严谨是分不开的。数学的真趣在于思考。不少数学科普，甚至国外有些大家的作品，说到较为复杂深刻的数学成果，常常不肯花力气讲清楚其中的道理，可能认为讲了读者也不会看，是费力不讨好。本书讲了不少相当深刻的数学工作，其推理过程有时曲折迂回，作者总是不畏艰难，一板一眼地力图说清楚,认真实践着古人“诲人不倦”的遗训。这个特点使本书能够成为不少读者案头床边的常备读物，有空看看，常能有新的思考，有更深的理解和收获。

信笔写来，已经有好几页了。即使读者有兴趣看序言，也该去看书中更有趣的内容并启动思考了吧。就此打住。祝愿作者精益求精，根据读者反映和自己的思考发展不断丰富改进本书；更希望早日有新作问世。

中国科学院院士
张景中
2012 年 4 月 29 日