



历史上间或出现神童，神童常常出现在数学、音乐、棋艺等方面。卡尔·弗雷德里希·高斯（C. F. Gauss, 1777-1855），一位数学神童，是各式各样的天才里最出色的一个。就像狮子号称万兽之王，高斯在数学家之林中称王，他有一个美号——数学王子。高斯不仅被公认为是 19 世纪最伟大的数学家，并且与阿基米德、牛顿并称为历史上三个最伟大的数学家。现在阿基米德和牛顿的名字早已进入了中学的教科书，他们的工作或多或少成为大众的常识，而高斯和他的数学仍遥不可及，甚至于在大学的基础课程中也很少出现。但高斯的肖像画却赫然印在 10 马克——流通最广泛的德国纸币<sup>[1]</sup>上，直到 2002 年马克被欧元取代。



德国马克上的高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）

## 一、与自然数的“情谊”

1777 年 4 月 30 日，高斯出生在汉诺威公国（今下萨克森州）的不伦瑞克市郊外（现属市区）。其时德意志民族远未统一，除了汉诺威，尚有奥地利、普鲁士、巴伐利亚等邦国。在高斯的祖先里，没有一个人可以说明为什么会产生高斯这样伟大的天才。他的父亲是个普通的劳动者，做过石匠、纤夫、花农，母亲是他父亲的第二个妻子，做过女仆，没受过什么教育。她甚至忘了高斯的生日，只记得是星期三，耶稣升天节前 8 天，高斯后来自己把它算出。但母亲聪明善良，有幽默感，并且个性很强。她以 97 岁高寿仙逝，高斯是她的独养儿子。

据说高斯 2 岁时就发现父亲账簿上的一处错误。9 岁那年，他在公立小学念书，一次老师为了让学生们有事干，让他们把从 1 到 100 这些整数加起来，高斯几乎立刻就把写好结果的石板面朝下放在自己的课桌上。当所有的石板都被翻过时，这位老师惊讶地发现只有高斯得出了正确的答案：5050，但是没有演算过程。事实上，高斯已经在脑子里对这个算术级数求了和，他注意到了  $1 + 100 = 101$ ,  $2 + 99 = 101$ ,  $3 + 98 = 101$ , 等 50 对数，从而答案是  $50 \times 101$  或 5050。高斯在晚年常幽默地宣称，在他会说话之前就会计算，还说他问了大人字母如何发音，就自己学着读起书来。

高斯的早熟引起了不伦瑞克公爵费迪南的注意，这



短街上的高斯故居（作者摄于哥廷根）

位公爵的名字也叫卡尔，是个热心肠且始终如一的赞助人。高斯 14 岁进卡洛琳学院（现不伦瑞克技术大学），18 岁入哥廷根大学。当时的哥廷根大学仍默默无闻，事实上，它创办不到 60 年。由于高斯的到来，才使得这所日后享誉世界的大学变得重要起来。起初，高斯在做个语言学家抑或数学家之间犹豫不决，他决心献身数学是 1796 年 3 月 30 日的事了。当他差一个月满 19 岁时，他对正多边形的欧几里德作图理论（只用圆规和没有刻度的直尺）做出了惊人的贡献，发现了它与费尔马素数之间的秘密关系。特别地，他给出了作正十七边形的方法，这是一个有着二千多年历史的数学悬案。

那一年可谓是高斯奇迹年，就在他发现正十七边形作图理论 9 天以后，即 4 月 8 日，他发展了同余理论，首次证明了二次互反律，这样就彻底解决了二次同余方程的可解性判断问题。5 月 31 日，高斯提出了后人称为素数定理的猜想，也即不超过  $x$  的素数个数为  $x/\log x$ ，这个猜想直到 100 年后才被证明；又过了 50 年，两个用初等方法证明它的人中的一个因此获得了菲尔兹奖。7 月 10 日，高斯证明了费尔马提出的三角形数猜想。10 月 1 日，他发表了有限域里一个多项式方程解数问题的研究，

导致一个半世纪后德国数学家外尔提出了他的著名猜想。

高斯初出茅庐，就已经炉火纯青了，而且以后的 50 年间他一直保持这样的水准。不过，高斯取得博士学位是在同属下萨克森州的黑尔姆斯泰特大学，那里不仅离他的故乡更近，还有一位当时德国最好的数学家普法夫。值得一提的是，这所创办于 1576 年的古老大学在 1810 年并入了哥廷根大学，可是普法夫却去了哈雷大学。高斯所处的时代，正是德国浪漫主义盛行的时代。高斯受时尚的影响，在其私函和讲述中，充满了美丽的词藻。高斯说过：“数学是科学的皇后，而数论是数学的女王。”那个时代的人们也开始称高斯为“数学王子”。事实上，综观高斯整个一生的工作，似乎也带有浪漫主义的色彩。

数论是最古老的数学分支之一，主要研究自然数的性质和相互关系。从古希腊的毕达哥拉斯时代起人们就沉湎于发现数的神秘关系，优美、简洁、智慧是这门科学的特点。俄国画家瓦西里·康定斯基甚至认为：“数是各类艺术最终的抽象表现。”就像其他数学神童一样，高斯首先迷恋上的也是自然数。高斯在 1808 年谈到：“任何一个花过一点功夫研习数论的人，必然会感受到一种特别的激情与狂热。”被称为现代数学最后一个“百事通”的希尔伯特是 19 世纪后期重新崛起的哥廷根数学学派的领军人物，其传记作者在谈到大师放下代数不变量理论转向数论研究时指出：

数学中没有一个领域能够像数论那样，以它的美——一种不可抗拒的力量，吸引着数学家中的精华。

另一方面，我也注意到一些不曾研究过数论的伟大数学家，如帕斯卡尔、笛卡尔、牛顿和莱布尼兹，他们都把后半生的精力奉献给了哲学或宗教，惟独费尔马、欧拉、拉格朗日、勒让德、高斯、狄里克雷这几位对数论有着杰出贡献的数学家，却终其一生都不需要任何哲学和宗教。或许，这是因为他们心中已经有了最纯粹、最本质的艺术——数论。值得一提的是，对一些优美的数学定理或公式，高斯经常一而再、再而三地给出新的证明。例如被他称为“皇冠上的宝石”的二次互反律，高斯一共给出了 6 种证明方法。即便在今天，这个定律仍与中国剩余定理一样，出现在每一本基础数论教程中。

这里我想引用印度数学天才拉曼纽扬的故事说明数论学者与自然数的“情谊”，这位来自印度最南端泰米尔纳德邦的办事员具有快速且深刻地看出数的复杂关系的惊人才华。著名的英国数论学家 G·H·哈代在 1913 年“发现”了他，并于次年邀他来剑桥大学。哈代有一次去探望病中的拉曼纽扬时告诉他，自己刚才乘坐的出租汽车车号是 1729。拉曼纽扬立即回答：“这是一个很有意思

的数，1729 是可以用两种方式表示成两个自然数立方和的最小的数。”（既等于 1 的三次方加上 12 的三次方，又等于 9 的三次方加上 10 的三次方。）哈代又问，那么对于四次方来说，这个最小数是多少呢？拉曼纽扬想了想，回答说：“这个数很大，答案是 635318657。”（既等于 59 的四次方加上 158 的四次方，又等于 133 的四次方加上 134 的四次方。）

## 二、现代数论的新纪元

1801 年，年仅 24 岁的高斯出版了《算术研究》，从而开创了现代数论研究的新纪元。书中出现了有关正多边形的作图，方便的同余记号、二次型理论、类数问题以及优美的二次互反律的首次证明，他还把复数引入数论，即后人所称的高斯整数环。除了第 7 章（最后一章）给出代数基本定理的首次严格证明（他的博士论文结果）以外，其余各章讲的都是数论。在这部著作出版以前，数论只有若干零散的定理和猜想，高斯把前人的结果和自己的原创性工作结合起来，使其成为有机的整体和一门严格的数学分支。

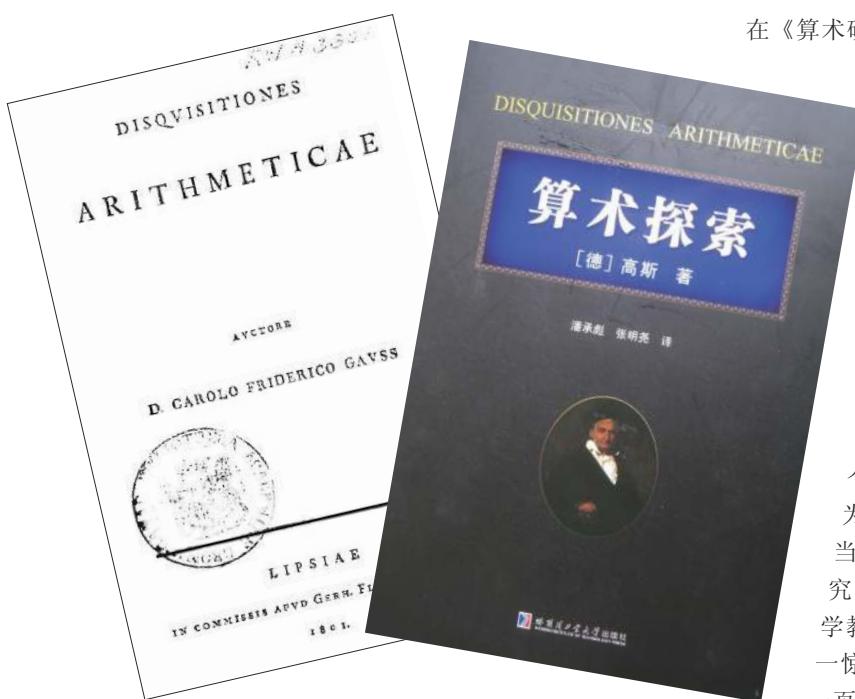
值得一提的是，这部伟大的著作在他 21 岁时即已完稿，高斯曾把他寄到法国科学院，却遭到拒绝，但他自己

将它出版了（费迪南公爵支付了印刷费）。与高斯的前期论文一样，它是用拉丁文写成的，这是当时科学界的界语，然而由于受 19 世纪初盛行的国家主义的影响，高斯后来改用德文写作。在那个世纪的末端，集合论的创始人康托尔这样评价：

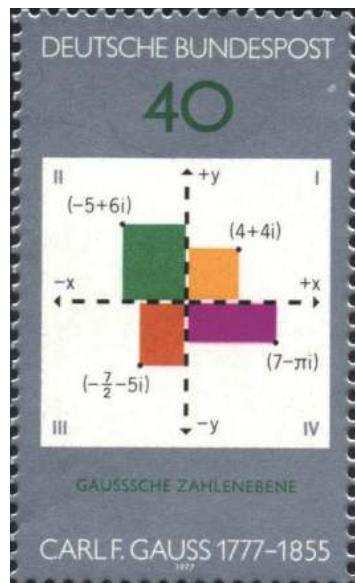
《算术研究》是数论的宪章。高斯总是迟迟不肯发表他的著作，这给科学带来的好处是，他付印的著作在今天仍然像第一次出版时一样正确和重要，他的出版物就是法典。比人类其它法典更高明，因为不论何时何地从未发觉出其中有任何一处毛病，这就可以理解高斯暮年谈到他青年时代第一部巨著时说的话：“《算术研究》是历史的财富。”他当时的得意心情是颇有道理的。

在《算术研究》出版的第二年，高斯就当选为圣彼得堡科学院外籍院士，同时俄罗斯方面也向他提供了教授职位，但被他婉言谢绝了，那座城市是 18 世纪大数学家欧拉钟爱的第二故乡。直到四年以后，为了不使德意志失去这位最伟大的天才，包括洪堡在内的多位学者和政要联名推荐，高斯被破格聘任为哥廷根大学数学教授兼天文台台长，全家一起搬入新落成的天文台，他担任这个职位直到去世。

关于《算术研究》，流传着这样一个故事。1849 年 7 月 16 日，哥廷根大学为高斯获得博士学位 50 周年举行庆祝会。当进行到某一程序，高斯准备用《算术研究》的一张原稿点烟，当时在场的柏林大学教授狄里克雷像见到犯了渎圣罪一样吃了一惊，他立刻冒失地上前从高斯手中抢下这一页纸，并一生珍藏它；他的遗著编辑者在他死后从其文稿中间找到了这张原稿。



左图：《算术研究》首版扉页；右图：中文版封面，潘承彪、张明尧译



邮票上的高斯整数



匈牙利邮票上的鲍耶 (János Bolyai, 1775-1856)

狄里克雷比高斯小 27 岁，他上大学那会儿，整个德意志民族只有高斯一个有名望的数学家，却不怎么喜欢教学。狄里克雷只好远赴巴黎留学，师从法国数学家傅里叶和泊松，但他始终携带着高斯的《算术研究》，可以说是第一个真正读懂这本书的人。留学巴黎期间，狄里克雷证明了费尔马大定理在指数为 5 和 14 时成立。这个结果当年曾轰动一时，因为 3 和 4 的情形分别是由欧拉和费尔马本人解决的。狄利克雷后来娶了同胞作曲家门德尔松的妹妹为妻，在高斯去世以后，他被哥廷根聘请继任了高斯的职位。

与艺术家一样，高斯希望他留下的都是十全十美的艺术珍品，任何丝毫的改变都将破坏其内部的均衡。他常说：“当一幢建筑物完成时，应该把脚手架拆除干净。”高斯对于严密性的要求也非常苛刻，使得一个定理从直觉的形式到完整的证明，中间有一段漫长的过程。此外，高斯十分讲究逻辑结构，他希望在每一个领域中，都能树立起一致而普遍的理论，从而将不同的定理联系起来。鉴于上述原因，高斯很不乐意公开发表他的东西。他的著名警句是：宁肯少些，但要成熟。为此，高斯付出了高昂的代价，包括把非欧几何学和最小二乘法的发明权与罗巴切夫斯基、鲍耶和勒让德共同分享，就如同费尔马把解析几何和微积分的发明权让给了笛卡尔和牛顿、莱布尼兹。

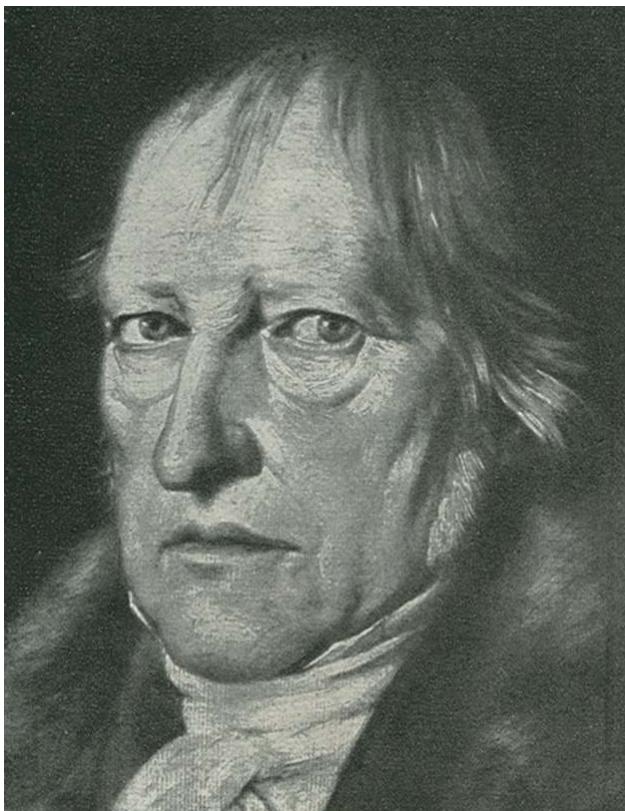
说到鲍耶，他是匈牙利历史上最伟大的数学家，其

父亲老鲍耶也攻数学，是高斯在哥廷根念书时最要好的朋友。1797 年，他曾陪同高斯徒步到不伦瑞克探望高斯双亲。等到高斯走出房间，他的母亲迫不及待地询问老鲍耶，自己儿子的前途如何。当听到回答“他是全欧洲最伟大的数学家时”，老人家已经老泪纵横，那年高斯才 20 岁。老鲍耶毕业后回到匈牙利娶妻生子，但在随后的半个世纪里仍与高斯保持书信往来。当他把儿子发明非欧几何学的消息和结果告诉老同学，并没有得到足够的鼓励和任何帮助。小鲍耶后来郁郁寡欢，默默无闻地度过一生，晚年专心于文学创作。

从做出有关正多边形发现的那天起，高斯便开始了著名的数学日记，他以密码式的文字记载下许多伟大的数学发现，共持续了 18 年。有意思的是，高斯的这本日记直到 1898 年才被找到，它包括 146 条很短的注记，其中有数值计算结果，也有简单的数学定理。例如，关于正多边形作图问题，高斯在日记中含蓄地写到：

圆的分割定律，如何以几何方法将圆十七等分。

值得一提的是，这项结果在两个月后出版的《新知文献》杂志上就发表出来了，而当时的汉诺威科学并不发达。



哲学家黑格尔 (George W. F. Hegel, 1770-1831)