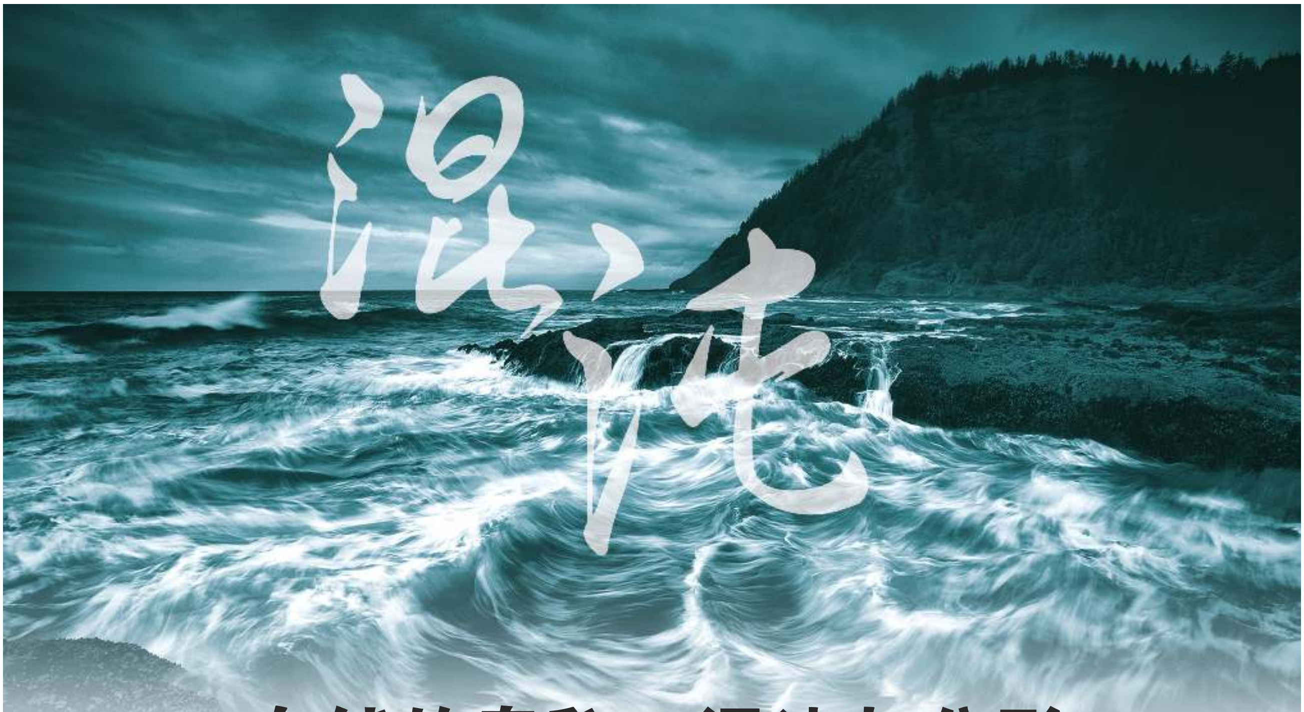


自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。” —— 伽利略

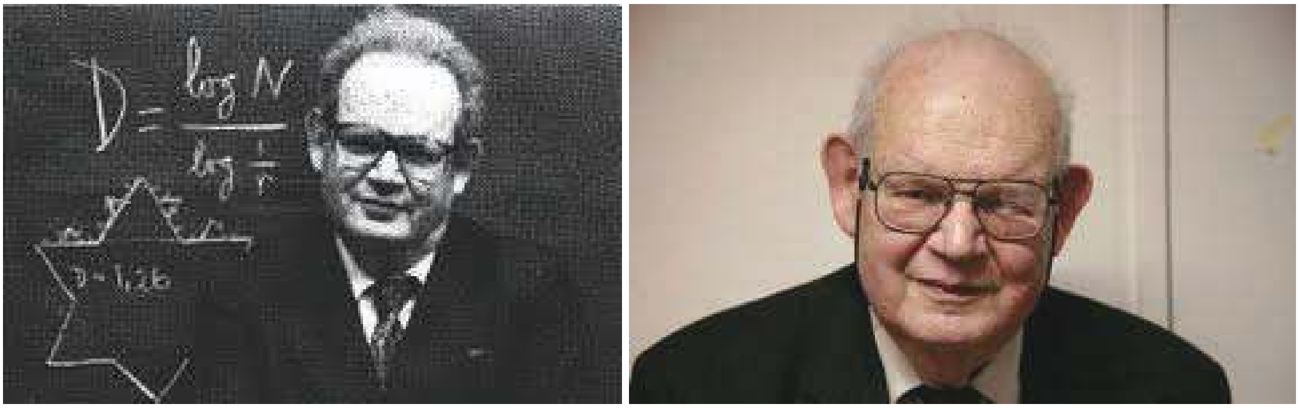
（九）“英国的海洋线有长？”

1970 年，曼德波罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）的一篇文章大概会让自以为懂得几何、代数又好的读者觉得好笑。文章的题目是疑问式的：“英国的海洋线有多长？”

英国的海洋线有多长？富有个性的一位英国前辈、湍流研究的首创者理查德逊（Lewis F. Richardson, 1881-1953），曾对曲折的国境线好奇。他比较了比利时、荷兰、西班牙和葡萄牙的百科全书，发现这些国家对共同边界长度的记载相差 20%。曼德波罗

理查德逊（Lewis F. Richardson, 1881-1953）

英国海岸线



曼德波罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）

在他的文章中得出结论：任何海岸线在某种意义上是无限长的。这真是与普通常识相悖。如果无限长，那为什么马拉松运动员能从海岸线一端跑到另一端？

我们知道怎样测量一条直线段的长。要测量一条海岸线的长，拿一只两脚规，把它张成某个单位的长度，比如一米。然后沿着海岸线一步一步地数数，最后的米数只是真实长度的一个近似，因为两脚规忽略了两脚之间的迂回曲折。如果把两脚规并拢一些，比如张成一尺长，再量一次，就会数到稍稍大一些的长度，这是因为原来每步一米量了一步的距离，现在每步一尺地量出来不止三步。再把两脚规的步长缩短到一寸，重新数步子，就会算出更大的长度。如果一只不厌其烦的小蚂蚁自告奋勇地担当两脚规的角色，翻过海岸线上的每一粒粗沙子，它会向我们报告一个还要大的长度。看上去，两脚规张得越窄，量得的长度就越大，但是常识告诉我们，它们会趋向于一个最终值，即海岸线的实际长度。

银行定期存款问题也有类似的说法。设想你有一笔财富 100000 元人民币存一年定期，年利息为 100%。如果到年底取回存款时才计算利息，你拿回家 200000 元，其中 100000 元是利息。如果聪明的你要求银行一个季度算一次利息，每季利滚利，到时你拿到的钱比 200000 元多一点点。如果银行更大方，答应一个月算一次利息，则你得到的更多。一天算一次利息，一年后连本带利还要多。如果银行“连续”地计算你的利息，连续地利滚利，不要以为你能获得无穷大的年终收益，但你一年之后能拿回最大可能的人民币数额 271828 元，即你的本金 100000 元乘上“自然对数”的底 e 这个常数。

如果海岸线是“足够规则”的，譬如是椭圆形的，那么上述“两脚规”测量的过程确实收敛到一个有限数。这就是从大学微积分里学到的怎样计算光滑曲线的长。但是，曼德波罗发现，当把“两脚规”的步距越调越小时，因为大海湾显露出越来越小的子海湾，犬牙交错、弯弯曲曲、参差不齐，所得的海岸线长度也就无限地上升。

曼德波罗是个“杂学家”，与常规意义下的科学家不同，他是一个兴趣广泛的数学家。当多年后荣誉等身的他演讲前主持人介绍他“……在哈佛教过经济学，在耶鲁教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学……”的时候，他不无骄傲地对听众们说：

“当我听到过去从事过的一连串职业时，就经常怀疑自己是否存在。这些集合的交集肯定是空的。”

曼德波罗出生于波兰首都华沙一个立陶宛犹太人的家庭，十二岁时他随父母定居法国巴黎，原因之一是他的数学家叔叔佐列姆•曼德波罗（Szolem Mandelbrojt, 1899-1983）在那里教书。老曼德波罗和其他几个志同道合、才华横溢的年轻数学家，如后来坐上冯•诺依曼在普林斯顿的椅子的韦伊（Andre Weil, 1906-1998），三十年代在因第一次世界大战而数学家断代的祖国建立了“布尔巴基”(Nicolas Bourbaki) 这个影响了世界几十年的数学团体。它后来的积极参加者包括斯梅尔的“反越战盟友”、荣获 1950 年菲尔兹奖的施瓦茨（Laurent Schwartz, 1915-2002）。这个组织杜撰的人名出现在他们集体写成的多卷本浩瀚巨著的作者签名处，其实曾是十九世纪具有希腊血统的一位面孔严肃的法国将军的真名。布尔巴基的成员对待数学也是“面孔严肃”的。他们和团体建立之初依然健在的英国理论数学巨匠哈代有着共鸣，但对已逝的本国同胞庞加莱比较反叛。他们从公理开始，以推理为准，要演绎出一切严格的定理。他们坚信，数学就是数学，不是物理，应当纯粹，无关应用。在他们眼里，几何直观永远是不可靠的，甚至是愚弄逻辑思维的罪魁祸首。

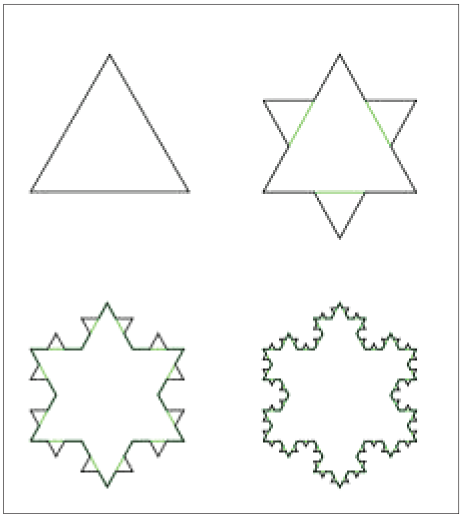
但是，老曼德波罗可能影响了一部分世界，却未能够影响他侄子的数学世界观。曼德波罗对布尔巴基的价

值观是不能容忍的。二战后，他考取了庞加莱的母校巴黎高工和更为有名的巴黎高师。他开始时慕名上高师，但几天后便逃离了这个布尔巴基分子集中的法国最高学府，转入高工。十年过后，由于他无法在弥漫着布尔巴基形式主义空气的法国感到快乐，便离开了祖国，离开了祖国的学术界，去了美国IBM的沃森（Thomas J. Watson, 1874-1956）研究中心。但当他宣誓加入美国籍时，依然保留他的祖国籍。他后来获得了IBM的"院士"（Fellow）荣誉称号，并任耶鲁大学的讲座教授。

曼德波罗具有与生俱来的强大"几何直觉力"，终生热爱几何图形，并喜欢用几何的语言来解释或描绘吸引他眼球的任何自然现象。这与他的同胞——"十八世纪最伟大最谦虚的数学家"拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813）截然相反，后者在他似乎最需要图形的杰作《分析力学》前言中颇为得意地特别强调："这本书找不到图"。移居到美国东部后，曼德波罗从属于经济学的关于棉花价格变化无序之间发现有序规律的"尺度无关性"，到属于工程科的为消除电话线噪音提出的描述信息传输误差分布的新策略，为自己日后创立新几何提供了具体的模型、铺下了前进的道路。

没有哪个同事理解曼德波罗研究实际复杂问题时改变尺度、化繁为简发现规律的新颖做法，但他正在做的"几何分析"思想的老祖宗却是那个下半辈子由于思想超前而被逼疯的康托尔。不连续性、随机噪声，错综复杂的海岸线，都被欧几里得的几何学拒绝于千里之外，都被牛顿的微积分扼杀在摇篮之中。直线与平面、三角形与圆、椭球与锥体，是多么美丽的几何图形，托勒密（Ptolemy, 约100-178）用以构造宇宙学说、毕加索（Pablo Picaso, 1881-1973）用以画出传世之作。欧几里得的几何占据了我们的大

科克（Helge von Koch, 1870-1924）



科克曲线（前四次迭代）

脑已有两千年之久，阻碍了我们"非常规的思维"。康托尔革命性的"三分集"构造，是近代科学四百年历史上第一次对经典几何的反动。

曼德波罗传播他的新几何思想：云彩不是球面、山峰不是圆锥。不规则的自然世界具有像康托尔三分集那样的结构和特征。2010年底的冬天对北京的居民来说是一个"无雪的冬天"。当入冬后过了一百多天，第一场雪姗姗来迟时，多少人欢欣雀跃。但是，他们是否仔细瞧瞧托在手掌心中的雪花？

1996年的某天下午，在美国密西西比州Hattiesburg市橡树园小学读书的一位名叫丁易之的小女孩放学一回到家，就迫不及待地告诉她在大学数学系教书的爸爸：

"Dad，今天我们'提高班'的老师讲了chaos！"

接着，她拿出一支笔和一张纸，先画了一个大的等边三角形。然后她把三角形的每一条边分成三等份，以中间的那部分为底边又画了一个形状一样但边长小三分之二的三角形。结果是一个有十二条边的六角形。在每一条边上，她做同样的事，以中间的三分之一段为底边画上更小的等边三角形。她一直画到越来越小的三角形看不清楚为止。

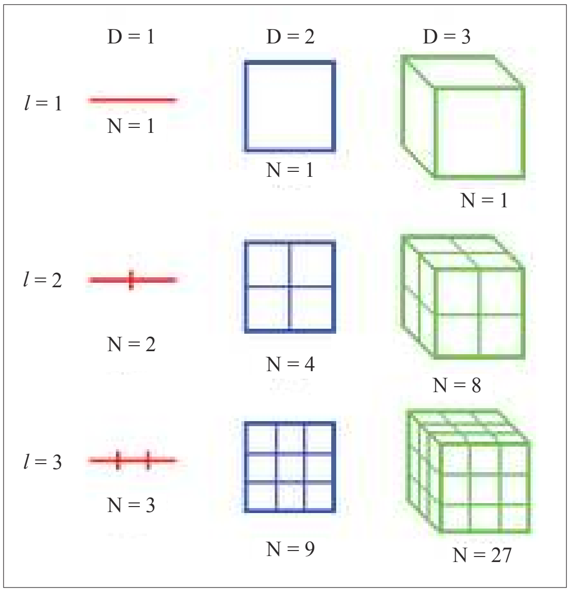
看到这些，丁易之的爸爸颇为惊奇。在美国，这么小的孩子就能知道一些当代科学的初等概念，而在中国，他们整天被关在教室里做习题。于是，他笑眯眯地喊着他女儿的小名说：

"丁丁，你可以告诉你的老师，你爸爸的导师和他的导师就是定义什么是chaos的两个人。等你长大点我可以告诉你关于chaos更多的故事。"

2005年，丁易之为台湾的"庆祝李天岩六十生日国际研讨会"翻译了她爸爸写的"李天岩学术传记"，从中知道了更多关于混沌的历史。

设想我们能把丁易之画三角形的过程一步步做到无穷，就看到围在外面的由折线边构成的边界变得越来越细微，就像构造康托尔三分集的过程中变得越来越稀疏一样。它最后的形状就像北京人手中融化前的雪花。瑞典数学家科克（Helge von Koch, 1870-1924）早在1904年就描述了这个"雪花"的边界线，现在它就被称为"科克曲线"，又经常被形象地叫做"科克雪花"。

科克曲线和康托尔的三分集一样具有自相似性。如果我们割下科克



线段、正方形和立方体的维数

雪花的一边，再把它的三分之一部分放大三倍，就得到和原先割下的那片一模一样的图形。科克曲线自相似性的放大因子也是3。

科克曲线围了一个有限的区域，事实上这个区域包含在原先的等边三角形的外接圆之内，因而它的面积是个有限数。外接圆的周长也是有限的，因为它是圆直径的 π 倍。但是科克曲线的长也是有限的吗？

我们来算算看。假设三角形的三个边长都为1。那么它的周长等于3。在每一步后，各个顶角的两边各长出一个边长缩短了三倍的三角形，因而这一步后的周长等于上一步后的周长乘上4/3。这样，第一步后的周长为3(4/3), 第二步后为$3(4/3)^2$，第三步后为$3(4/3)^3$。由此类推，第 n 步后的周长为$3(4/3)^n$ 。这个数随 n 的变大也变得越来越大，没有上限。因此我们得到一个令人难以置信的结论：连续、永不自我相交、连通、并位于一个有限区域内的科克曲线的长度是无穷大，和两边无限延长的一条直线一样长！

科克曲线这个有穷区域的无穷长边界线在上世纪初让见到它的数学家睡不好觉，它太和直觉不容、它太和常规相悖，在当时的数学主流世界被视为一个怪物，因而成了一个被遗弃的无人领养的“私生子”，直到曼德波罗把它捡起，让它复活。他把科克曲线看成是“粗糙而生动的海岸线模型”，把它看成现实世界的图像，用以解释丰富多彩的自然现象。

虽然现在最时髦的理论物理学家在他们的“超弦理论”中断言我们周围的宇宙至少有十维，我们只感知生活在三维空间之中。也许是四维之中，如果时间另加一维的话。我们行走的地球表面却是二维的球面，我们的小轿车开过的高速公路只是一维的线，花粉过敏者的鼻子最不想吸入的微小颗粒大概算是零维的点。但是维数的概念也和观察者的尺度有关。春天里老让人打喷嚏、令人困扰的花粉在我们的眼里是个零维的点，但在吸附在它身上的细菌看起来（如果细菌有眼睛的话）却是一个三维的庞然大物。

欧几里得两千多年前就精确地告诉我们什么是点、什么是线、什么是面，它们的维数分别是0、1、2。二维面内的一维曲线不用周围，面积为零，只有长度，而三维空间中的二维曲面不占空间，体积为零，只有面积，这些“常识”已在我们的头脑中根深蒂固。直来直去、表里如一者往往被人说成“一维个性”，能说会道、左右逢迎者可被称为“二维巧匠”，翻手为云、覆手为雨者大概非“三维大师”莫属。

对西方文明影响最大的古希腊哲学家亚里士多德（Aristotle, 公元前384- 前322）也说得清清楚楚：“直线在一个方向上有大小，平面在两个方向上有大小，而立体在三个方向上有大小；除此以外，就没有其他大小了，因为这个已是全部了……不同种之间的大小是不能转化的，如从长度到面积，从面积到体积都不能转化。”

“整数维”已经在我们的头脑里挥之不去。如果有人说，这个东西是半维的或一点五维的，我们会认为他要么是个诗人，要么是个疯子。须知，美国上世纪最伟大的诗人大都在疯人院里写出他们最伟大的诗篇。

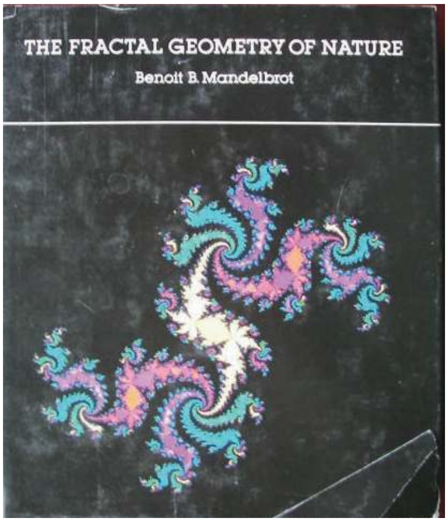
但是，当曼德波罗宣称科克曲线的维数是1.2618时，他不是疯子，他是IBM心智健康的科学家。他也不是诗人，但是他喜欢引用爱尔兰多面手作家斯威夫特（Jonathan Swift, 1667-1745）的语句：

于是博物学家看到小跳蚤，
又有小跳蚤在上面跳，
它们又挨小蚤咬，
这样下去没个了。

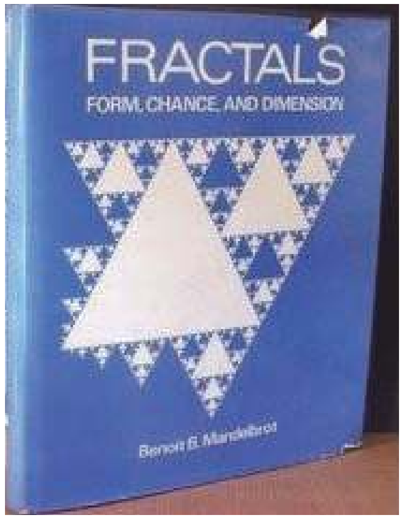
我们用比直觉多一点的“数学”方式来检验维数的概念。一条长度为1的线段可以被分为 n^1 个小段，每段长 $1/n$。一个边长为1的正方形可以被分为 n^2 个小片正方形，每片面积为 $1/n^2$。类似地，一个边长为1的立方体可以被分成 n^3 个小块立方体，每块体积为 $1/n^3$。这三个数 n^1、n^2、n^3 中的“指数”1，2，3就分别是线段、正方形和立方体的维数。

在以上的“化整为零”的剖分之中值得注意的是：无论是小线段、小方形、小立方，放大 n 倍后就和原先的图形一模一样。它们也有和康托尔集合或科克曲线一样的自相似性，这个 n 也是所谓的“放大因子”。采用放大因子，加上“对数”这个工具，曼德波罗告诉我们：

线段维数为1，因为小线段个数的对数除以放大因子的对数等于1；正方形维数为2，因为小方形个数的



曼德波罗著《自然的分形几何》



曼德波罗著《分形：形态、机遇和维数》

对数除以放大因子的对数等于 2；立方体维数为 3，因为小立方个数的对数除以放大因子的对数等于 3。

曼德波罗用同样的想法来计算科克曲线的维数。希望我们还记得在其构造的第一步，原先的三角形的每条边生成四个小边，其放大因子为三 . 这么一来，他就算出科克曲线的维数等于 4 的对数除以 3 的对数，约为 1.2618。

这个分数就被曼德波罗视为英国海岸线的“维数”，它比一大点，比二小点。因而，怪模怪样的海岸线比笔直的高速公路“宽些”，但比平整的飞机场“窄点”。类似地，可以算出康托尔三分集的维数等于 2 的对数除以 3 的对数，差不多是 0.6309。粗糙不平的乡间马路的维数可以是 2.25。

革命的时机成熟了。1975 年某天的一个下午，曼德波罗要为他刚完成的开天辟地的大书命名。一个新学科总要有一个名字，像刚出世的新生儿。他“老来得子”的儿子刚从学校放学回来，于是他借了儿子的拉丁语词典翻了翻，如同当上爷爷的中国老学究为求孙子一“佳名”而沉入康熙字典。拉丁文是英文的祖先。没有什么比最接近英文单词 fraction（分数）的什么东西更能反映这个学科的特色，于是，他把这个单词的最后三个字母“ion”巧妙地改成“al”，从而造了“fractal”（分形）这个数学名词，它既是名词又是形容词，既属于英语，又属于法语，代表了他生活过的两个国家。曼德波罗造字的历史功绩，大概只有中国唐朝的女皇帝武则天（624-705）才敢相比。

1977 年，曼德波罗的第一部著作《分形：形态、机遇和维数》（Fractals: Form, Chance and Dimension）出版了，它宣告了新几何“分形学”的诞生。1982 年，他对这本书增订修正，以《自然的分形几何》（The Fractal Geometry of Nature）新名问世。这引发了科学界甚至一般民众对“自然界的分形美观”狂热的注意，就像美术爱好者趋之若鹜地涌向毕加索的画展那样。

（十）自由王国的几何

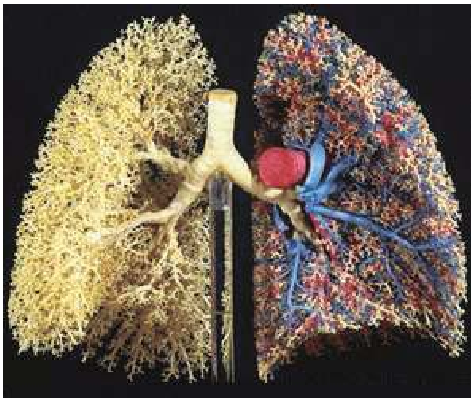
曼德波罗的著作让人们再次以欣赏的眼光审视大自然的杰作。在分形几何统一思想的旗帜下开始聚集不同学科的科学家，他们在各自的领域里看到了特异怪癖之处，经典的思维无法解释。

我们周围花花绿绿的世界并不总是规则有序的，一直在统治着我们中学教科书的欧几里得几何对此却束手无策。放眼看去，缥缈不定的彩云、雷霆万钧的闪电、纷纷霏霏的落雪；绵延不断的群山、蜿蜒曲折的海岸、崎岖不平的马路；跌拓多姿的人生、变幻莫测的心理、叱咤风云的官场，怎能用简单平滑的整数维数来描绘？

1978 年，美国哥伦比亚大学地球物理学家肖尔茨（Christopher H. Scholz, 1942-）一买到曼德波罗的书，就觉得它在自己的工作中大有用武之地。在他看来，既然地球表面和海洋相交的海岸线有分形结构，地面顶部的内表面所形成的“分裂层”也会具有相似性。这些断层控制着地层中流体的运动和地震的活动，深入了解它们十分重要。他最终成了在这个领域里头成功应用分形技术的少数几个名人之一。

造物主把我们身体的组织结构设计得几乎是天衣无缝，除了极少数的不甚重要之物，比如阑尾。血液走遍全身，动、静脉血管、毛细管到处密布，既形成连续的分布，又大玩分形结构的把戏，这样它们既有巨大的表面积，又能挤进小于人体 5% 的体积，活像科克曲线那样。难怪曼德波罗大开英国文豪莎士比亚（William


《威尼斯商人》中贪婪的夏洛克和聪明的鲍西娅



人肺的分形结构

分形面孔

Shakespeare, 1564-1616）的经典喜剧《威尼斯商人》的玩笑：那个贪婪而阴险的犹太放债人夏洛克不光做不到不流血地割下一磅人肉，就连割下一毫克都办不到！

我们的心肺循环系统呢？跟随曼德波罗前进的生理学家们很快发现，是分形描述，而不是早先的标准描述与支气管的分支的数据吻合。心脏跳动的频率图服从分形规律，传输电脉冲的纤维网络也是。充满肺泡的肺容纳巨大的表面积，成了人体中最典型的分形组织，它的维数是 2.17。泌尿系统是分形，肝脏里的胆管也是，好像我们内部身体完完全全按照分形的蓝图被全能的"上帝"制造出来的。甚至我们外部身体的头发也可被装饰成分形的式样，在美国纽约市的大街上走一圈有时能观赏到如此引人注目的头型。

曼德波罗把自然界像无穷树杈一样的分形结构的复杂之处反而解释成是"在欧几里得几何意义下存在的现象"。在分形几何的意义下，这些复杂性简单得好像是最自然不过的透明体。他指着阳光之下的树说，像我们自己身体里的心肺循环系统一样，树叶需要分形表面的枝叶优化自己的光合作用。"创世者"总是要按照"最优化"的原则来行事。笛卡尔的同代法国人、也许是有史以来最大"业余数学家"的费马（Pierre Fermat, 1601-1665）近四百年前就知道光是按"最短时间原理"走路的。

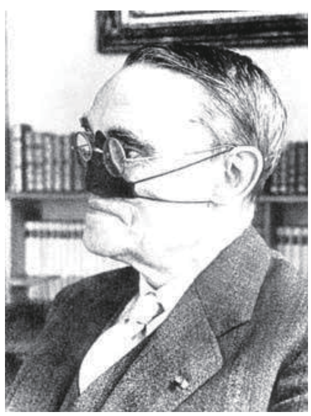
这就把人们的视线投向植物园里多姿多彩的树叶。天啊，仔细一看，表面起伏不平的它们真的具有诗意浓浓的分形体态。看来，在性态的发生过程中，分形尺度不仅是常见的，而且是普遍的。

2005 年的夏季，位于美国东南部的南密西西比大学科学与数学教育中心的研究生们在主任和任课教授的带领下驱车西行，像好莱坞电影中的"西部牛仔"那样踏上了西南部科学教育探险之旅。历时两周的探索和求知，硕果累累的他们回校之后举办了科学汇报会，其中来自中国的数学教育博士生叶宁军的"分形之旅"报告最受欢迎。她在仙人掌到处可见、乌拉姆呆过多年的新墨西哥州的广阔沙漠地带细心考察了这些大自然的分形杰作，并与"分形几何学"中那些著名的分形图形进行了有趣的比较和分析。

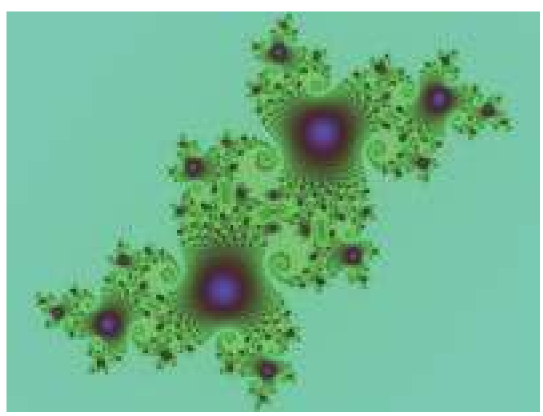
在曼德波罗的分形图形到处张贴之后，人们突然间发现"混沌"与"分形"在更多的数学场合出现，这两个新术语之间有着千丝万缕的相互联系。

中学生已经知道什么是像 $2 + 3\,i$ 这样的复数，这是几百年前为了求解二次方程 $x^2 + 1 = 0$ 不得不创造出来的"虚无缥缈"之数。这"由实（在）数到虚（幻）数"的一跳，解决了许多大问题，例如，在复数的范围里，每个代数方程都有根。复数的加减乘除运算法则与实数几乎一样简单，只要记住一个死规定：虚数单位 i 的平方等于 -1。

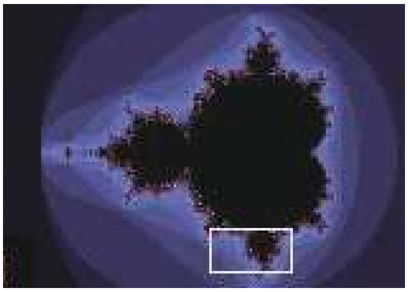
巴恩斯利（Michael F. Barnsley）这位牛津大学数学系 1968 年本科毕业的英国人、1972 年美国威斯康星大学的理论化学博士，在 1979 年的一个会议上见到费根鲍姆之后，就认为倍周期分叉和普适性的思想都是好东西。他思忖着，这些在实数范围内玩的游戏可能在复数世界里更好玩。这也许是个好想法，他说干就干。他把费根鲍姆在实数轴上玩过的二次函数搬到复数点的平面上，不过他把它的外形稍微改了一下：$z^2 + c$，其中，z 是复自变量，c 是一个可取不同数值的复参



朱利亚（Gaston M. Julia, 1893-1978）



朱利亚集



曼德波罗集

数。当他用计算机不断迭代时，一些妙不可言的形状开始浮现，令他激动得赶快在他位于美国亚特兰大城的佐治亚理工学院的办公室写就了一篇论文，寄给了《数学物理通讯》的编辑。

这名编辑恰好就是茹厄勒。他告诉作者，五十年前他的两名法国老乡法图（Pierre J. L. Fatou, 1878-1929）和朱利亚（Gaston M. Julia, 1893-1978）就发明并研究了它，尽管靠的是没有计算机的艰苦劳动。巴恩斯利回忆当时：

“茹厄勒把它像一个烫手的山芋那样扔回给我，并说：‘巴恩斯利，你说的是朱利亚集。’”

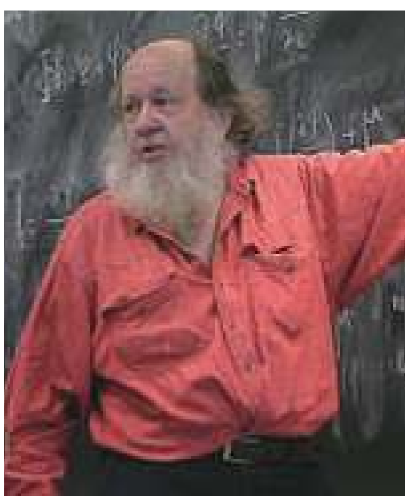
朱利亚集是二次多项式 $z^2 + c$ 的迭代点保持有界的所有那些初始点组成的集合的边界。不同的参数值 c 对应于不同的朱利亚集。它们呈现出各种各样的分形形状，“有的是变肥的浮云，另一些是瘦削的棘丛，还有的像火灭后在空中飘动的火星。”数学为自己的领土提供了无数的分形例子。

虽然拒绝了巴恩斯利的投稿，茹厄勒还是给了他一个好的建议：“你和曼德波罗联系一下吧。”

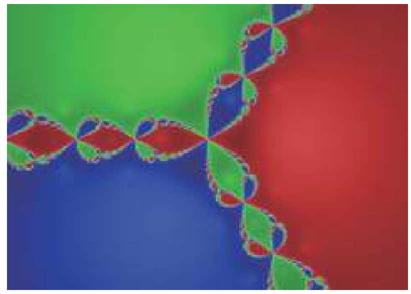
巴恩斯利很快发现，曼德波罗已经走得比朱利亚更远了。曼德波罗大概20来岁时看到过朱利亚和法图在第一次世界大战时期写的文章和当中画的图形。1979年，他想看看他这两位前辈数学家搞过的二次多项式 $z^2 + c$ 当参数变化后迭代有哪些变化。他每次都只从0这个原点开始迭代，威力强大的计算机大大帮助了他，使他能在屏幕上看到这些迭代点序列最终是否“远走高飞”，或总是在一个有限区域内徘徊。他把具有这两个互相排斥的迭代性质的参数值在视觉上区分开来。由他定义的这第二种参数之集合，即迭代点永远有界的所有那些参数值 c 的全体，现在当之无愧地以他的姓命名。

这个1980年定义的上下对称的“曼德波罗集”，它的轮廓看上去像海马的尾巴再附上形状一如整个集合的微粒岛屿群。它既是迄今为止最复杂、最有趣的分形之一，也是最难研究的几何对象之一，连它的创造者都感到头疼。比如，这个集合是否像科克雪花一样是“连通”的，即整个大陆是否与伸得远远的半岛相连？他不能断定，因为计算机不能代替严格的数学证明。相差十岁的法国巴黎高师数学教授多阿第（Adrien Douady, 1935-2006）和他过去的博士生、美国康奈尔大学数学教授哈伯德（John H. Hubbard, 1945-）用到复变函数论和动力系统的双重知识证明：是的，它是连通的。曼德波罗集的每一个漂浮的细微颗粒的确是挂在一根细细的线上，这细线又把它连接到集合的其他“魔鬼的聚合物”部分上。

在同一时期内的某个学期，哈伯



多阿第（Adrien Douady, 1935-2006）



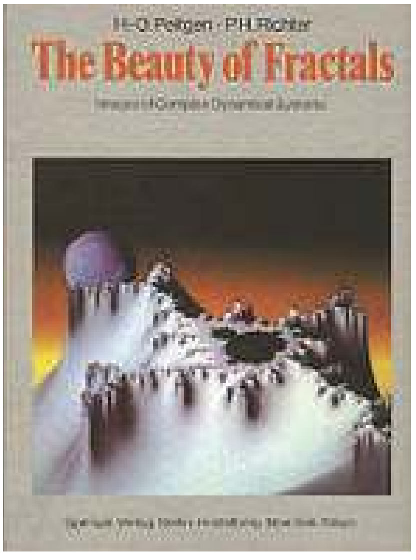
求解1的三个立方根的牛顿法的分形

德在法国教大一的微积分。他没有想到自己的一部分事业竟和计算数学中古老的牛顿法联系在一起。牛顿在他老年的时期用到了这个方法，现在这个办法的所有现代形式都冠以他的大名，尽管苏联的数学家和经济学家、1975年诺贝尔经济奖获得者康托诺维奇（Leonid Kantorovich, 1912-1986）对它的收敛性理论作出了系统而主要的贡献。

经典牛顿法求解一个未知数的实数方程的思想很简单。方程的解是函数的曲线和 x- 轴的交点坐标。取解点的一个近似点，在曲线上对应的那点作一条切线，它和 x- 轴的交点比第一个猜测更靠近解。重复这个过程就得到近似解的一个序列，可望能收敛到解。如果第一个猜测取得足够好，意思是和未知的解足够接近，那么这个迭代过程是收敛的，而且，收敛的速度很快。

但是如果初始猜测不好，迭代不收敛了，那怎么办？教了多次微积分课本里介绍的牛顿法，有点厌倦标准教法的哈伯德想换换花样。他把目光转向在复数平面上用牛顿法解最简单的三次方程 $z^3 - 1 = 0$，即算出1的三个立方根，分别是实数1和两个复数根 $(-1 + i\sqrt{3})/2$ 和 $(-1 - i\sqrt{3})/2$。这三个解在复平面上形成一个等边三角形。给出一个初始点，他让学生们看看牛顿法将引到三个解中的哪一个。

这实际上成了一个标准的具有三个“吸引子”的动力系统问题。哈伯德让计算机决定哪些点走到第一个



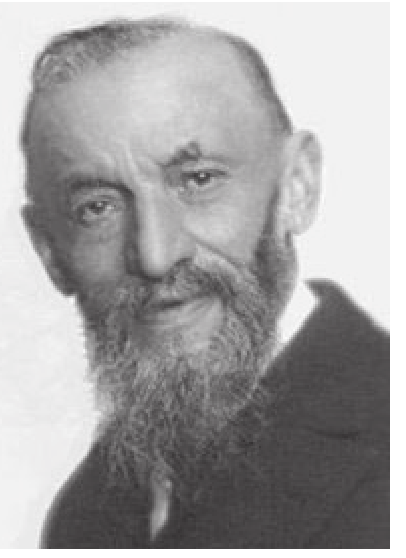
《分形之美》

解，哪些点趋向第二个解，哪些点导致第三个解。这些到达不同目的地的初始点分别用三个不同的颜色区别开来。在粗糙的选点下，牛顿法的动力学果然如他所猜把平面分成三个扇形，但随着选点的越来越精细，他和学生们发现这三个区域的分界线越来越不清楚，三种颜色互相缠绕，只要两种颜色靠近一些，第三种颜色便乘虚而入，挤进来夹在中间，这又引起一连串新的自相似的涌入，似乎没有哪个点可以分开任两种颜色。就这样，美国数学教授哈伯德和修他课的法国学生们“意外”地发现了已经使用了几百年的牛顿法所“制造”的分形图。

色彩迷人的分形的美学价值很快引起更多人的欣赏。那些斑驳陆离的牛顿法图形，那些波涛汹涌的海洋卷起的层层巨浪般的朱利亚分形图案，那些曲曲弯弯的平衡状态“吸引域”分形边界，增加了普通大众的艺术享受。成百上千来自四面八方的信件像“科克雪花”似地飘进哈伯德的办公室，索求曼德波罗集等等的图片。一时间，他忙得只好请系里的研究生帮上一手。巴恩斯利不光写了一本关于怎样用他发明的“迭代函数系统”的有效技术画出分形的好书，并且干脆办起了他本人商业性的“迭代公司”。他把自己的技术说成是“混沌游戏”，它可以随心所欲地“成批”生产各种各样形状的分形图，像卷心菜、霉菌、甚至泥土，包括他童年起就喜欢的蕨类植物叶子。

两个德国人也粉墨登场了。数学家帕特根（Heinz-Otto Peitgen, 1945-）和物理学家里希特（Peter Richter）合作了转向分形的事业。他们编著了一本精美的厚书《分形之美》，1986 年由德国最好的学术出版社斯普林格出版，书中漂亮的彩色分形图也成了推销书的卖点之处。他们用计算机生成的分形艺术之作在全球巡回展览。既懂物理又通生化的里希特又订购了一只可以调剂身心的“混沌双摆”，放在自家的窗台上，随时观察它不可预测的互摆运动。

曼德波罗几何革命的狂风暴雨也催醒了在故纸堆里沉睡了已大约一

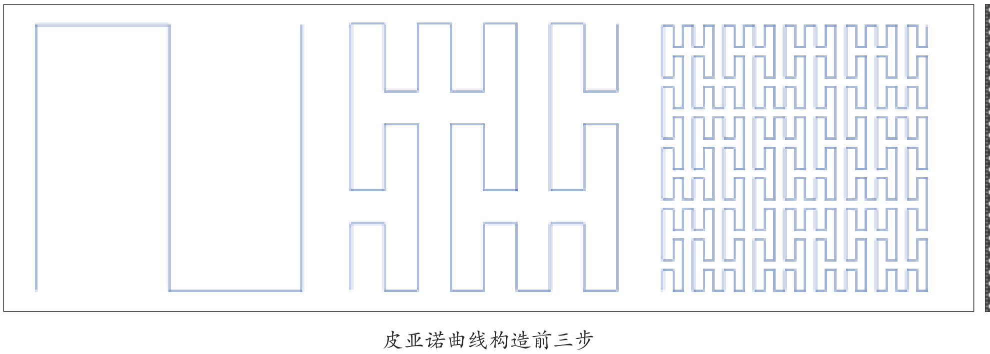


皮亚诺（Giuseppe Peano, 1858-1932）

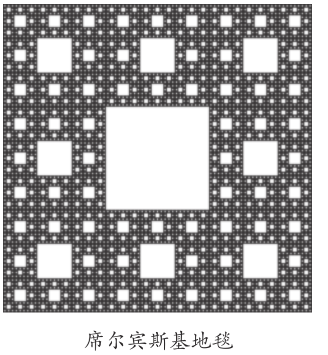
个甲子、和科克曲线差不多一样老的另外一些怪异图形，它们当中有所谓的“皮亚诺（Giuseppe Peano, 1858-1932）曲线”和“席尔宾斯基（Waclaw Sierpinski, 1882-1969）地毯”。意大利产的“一维”皮亚诺曲线居然能够跑遍一个二维正方形的所有点，令人纳闷。但是，这些都是一百年前当数学遭遇到“集合论危机”时少数几个像法国印象派画家那样“怪诞”的数学家生下的怪胎。

曼德波罗没有将分形的思想全部归己所有。在他《自然的分形几何》书中某一节的“历史梗概”中，他写道：

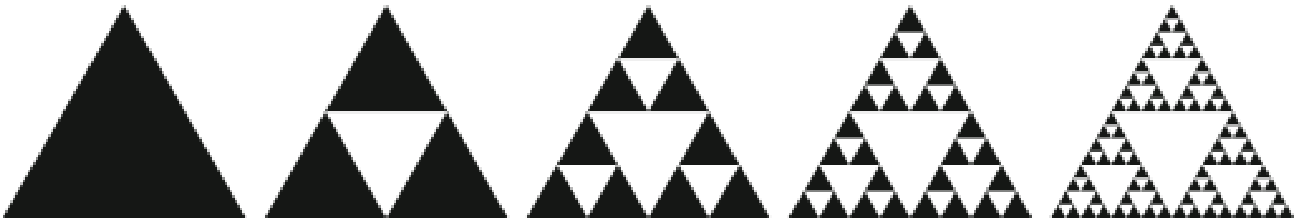
“分形的几个基本思想可以追溯到古希腊的亚里士多德和十七世纪的



皮亚诺曲线构造前三步



席尔宾斯基地毯



席尔宾斯基垫圈的构造前四步

莱布尼茨的时代，分形的思想可以说是源远流长。”

在百家争鸣的古希腊，毕达哥拉斯把万物归于整数，引来了无理数的责难；芝诺（Zeno, 约前490-前430）的四个“运动悖论”，让连续与离散相撞。亚里士多德对“世界的连续性”深信不疑，以至于让莱布尼茨发明微积分后还要想定义“分数阶的导数”以保证“阶数的连续性”。但是到了十九世纪的中叶，由于对数学分析语言严格化的要求，微积分的坚实基础由捷克的波尔查诺（Bernhard Bolzano, 1781-1848）、德国的魏尔斯特拉斯，以及法国的柯西（Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857）等几位“几乎处处严格”的数学家们铺垫，甚至连“函数”这个最原始、最重要的概念也有了现代化的定义，而不是原先的那种只是“连续曲线”的代名词。在这时候，各种各样“病态”的函数纷纷出笼。当过多年中学数学教师的魏尔斯特拉斯于1872年构造了一个处处连续但又处处没有导数的函数，这就打破了人们普遍认为的“曲线应有切线”这一传统观念。到了“离经叛道”的康托尔时代，人们可以定义奇形怪状的点集，可以构造一笔“画”不出图像的函数。名字很长但寿命不长、只比魏尔斯特拉斯大了十岁的同胞数学家狄利克雷（Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805-1859）就定义了这样的一个函数，它在所有有理数上的函数值都为1，而在所有无理数上的函数值都为0。

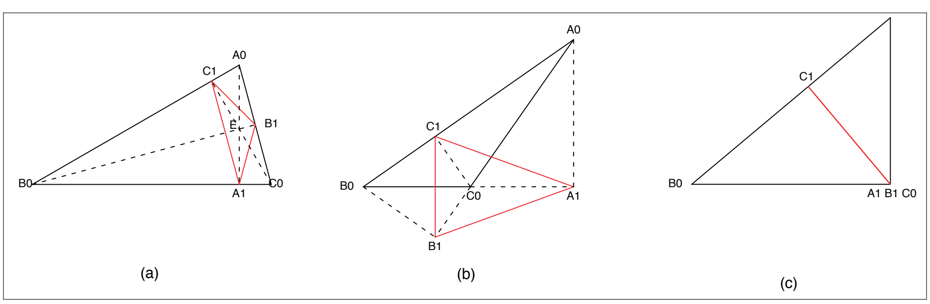
席尔宾斯基（Waclaw Sierpinski, 1882-1969）

一百年前辉煌的波兰数学学派领头人、乌拉姆青年时期的另一个老师席尔宾斯基构造了如上的“席尔宾斯基垫圈”，现已成为“分形几何”这门学科中众多图形中的一个“代表之作”。

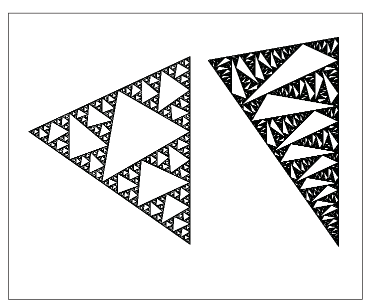
取一个等边三角形。去掉连接它的每条边中点所形成的那个小等边三角形，但保留其三条边。对剩下的三个同样大小的等边三角形重复做同样的事情，一直做到无穷。所有剩下的那些点组成一个处处稀疏的图形，像海绵一样处处有洞，但包含有不可数的点。像科克曲线一样，这个席尔宾斯基三角形也是自相似的，其放大因子为2。

席尔宾斯基的等边三角形分形在新世纪之初被美国南阿拉巴马大学的数学教授、具有微分几何背景的张新民推广成任意的锐角三角形分形，但他要用到欧几里得几何学里的“垂足”概念。

任意画上一个三角形，从它的每个顶点作其对边的垂线，和对边的交点称为垂足。三个垂足组成的新三角形叫做原先三角形的“垂足三角形”。如果原先的三角形是锐角三角形，那么它的垂足三角形在其之内。若原先的三角形是钝角三角形，则垂足三角

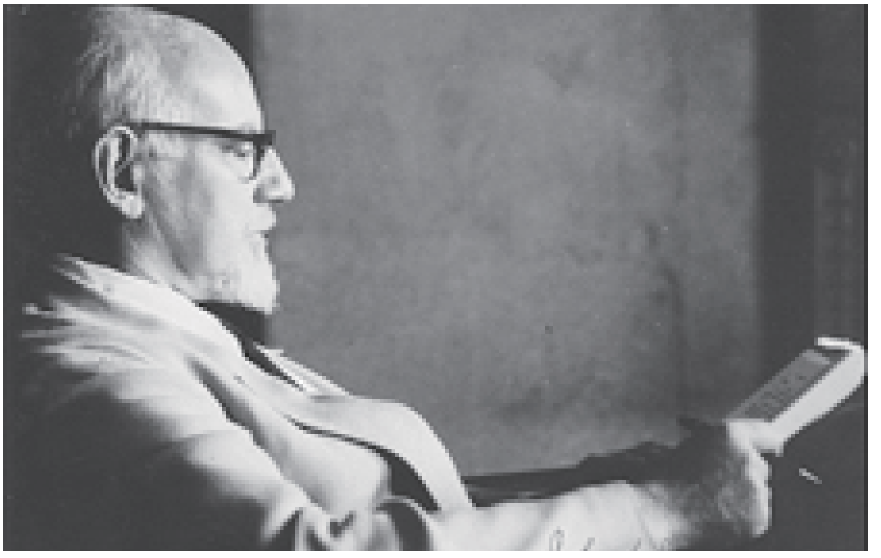


垂足三角形



席尔宾斯基垂足三角形

茅以升（1896-1989）



辛格（John L. Synge, 1897-1995）

形有一部分在它的外面。直角三角形的垂足三角形退化成连接斜边上的垂足和其对应顶点的一条线段。

垂足三角形迭代出现在庞加莱的同时代人、英国剑桥大学教授郝博生 (Ernest W. Hobson, 1856-1933) 1891 年写的《三角学教程》书中。从一个三角形出发依次作出一个又一个的垂足三角形，形成一个无穷序列，类似于依次迭代一个数值函数。这样的三角形形状的变化有意思吗？是有序的还是无序的？

电影《美丽心灵》的主角、五十年代的国际数学明星、被精神病折磨了三十年最终 1994 年因他十几页关于博弈论的博士论文开创性工作而荣获诺贝尔经济奖的美国俊杰纳什（John F. Nash Jr., 1928-），上世纪四十年代曾就读于卡内基工学院，当时的数学系主任是一位名叫辛格（John L. Synge, 1897-1995）的爱尔兰人。值得一提的是，该校颁发的第一个工学博士（1919）为中国人茅以升（1896-1989）。高寿的辛格数学生命也很高寿，他活到 90 岁时对垂足三角形迭代突发兴趣，居然和一位合作者于 1989 年在《美国数学月刊》上刊登了一篇论文。该文告诉读者：迭代垂足三角形可以有任意周期！

比如，初始三角形为等边三角形的垂足三角形也是等边三角形。这等于是说：等边三角形是“垂足三角形迭代”的一个不动点。如果初始三角形的三个角的角度为 43°，44°，93°，迭代七次后的垂足三角形也有同样的形状，就是说，有一个周期为七的点。再来看看角度分别为 50°，75°，55° 的初始三角形，它迭代四次后成为一个周期为三的点。这就让我们一下子想起李 - 约克的“周期三意味着混沌”这句名言。

辛格的迭代引起了出生在匈牙利的美国纽约大学柯朗数学研究所的大牌人物之一拉克斯（Peter D. Lax, 1926-）的极大兴趣。他第二年马上也在《美国数学月刊》上发表了一篇论文，用初等的大学生能看懂的方式论证了垂足三角形迭代的混沌性和概率性质。

锐角三角形的垂足三角形有一个后来吸引了张新民注意的性质，学过中学几何的人都可以证明它：挖掉垂足三角形之后剩下的三个小三角形都和原先的那个三角形有一样的形状。这个“自相似性”让他想起了席尔宾斯基三角形，并一下子给这个“欧洲产儿”找到无穷多个“北美弟兄”：

任意画上一个锐角三角形，作出它的“垂足三角形”。将这个垂足三角形去掉，原先的三角形剩下的部分由三个小一点的三角形组成，对它们的每一个画出对应的垂足三角形，并去掉它们，这样就剩下九个彼此相似的三角形。继续做同样的事，直到无穷，所有留下的点的全体构成一个分形。张新民比较谦虚地把它称为第一个三角形所对应的“席尔宾斯基垂足三角形”，而没有附上他自己作为发明者的名字，尽管至少别人可以有理由这么做。不同的锐角三角形给出不同花样的“席尔宾斯基图案”，如果一个角很小，这个分形看上去颇像中国新疆维吾尔族姑娘的长辫子。

早先的席尔宾斯基三角形只是新的一大类席尔宾斯基垂足三角形中的一个成员：席尔宾斯基三角形就是等边三角形所对应的席尔宾斯基垂足三角形。这个“众星拱月”的“王子”的维数等于 3 的对数除以 2 的对数，大约为 1.585。他的那些亲戚呢？王子的维数是否在所有的家族中最小？这些都是对“动力几何”这门学科感

兴趣的张新民迫切想知道的事。他在同事的帮助下用计算机做了一些试验，发现他的猜测好像是对的。比如说，如果三角形的三个角的角度为 60°，45°，75°，维数大约是 1.634；三个角若是 65°，35°，80°，则大约为 1.688 维；如为 75°，25°，80°，约 1.875 维。可惜，维数函数的解析表达式无法写出，故不能直接算出分形维数的值。

不久，大嗓门、会教书的张新民被在相距 120 公里以外的邻州的南密西西比大学数学系当教授的丁玖邀请去做一个数学讲座。他向后者提出了这个“维数猜想”。像师傅李天岩一样，在南京大学何旭初（1921-1990）教授门下拿到“最优化理论”硕士学位的丁玖只用了初等微积分的“隐函数求导术”以及“最优点充分条件”就很快地证明，“王子”的维数比他的“近亲”都小，但对“远亲”尚不得知。但这只解决了一个“局部极小”的问题。

2007 年秋，丁玖在复旦大学数学系作的一个关于“从有序到混沌”的报告中提到了张新民的“整体极小”猜想。一位名叫李昭的研究生听了他的演讲后，思考了这个问题，并提出了一个巧妙地应用“凸函数”性质的解决思路。翌年之春他们完成了合写的论文，从投稿到被曼德波罗在耶鲁的同事和合作者任主编的《分形》（Fractals）期刊接受，只用了不到一个月的时间。

作为这一连串故事的结束，张新民关于席尔宾斯基垂足三角形“维数函数”的另一猜想却被李昭复旦数学系的学长、中国科学院计算数学与科学/工程计算研究所的唐贻发在和丁玖 2010 年发表在同一期刊的文章所否定，用到的数学工具还是初等微积分。然而他们似乎隐隐约约地感到对于这类分形的维数函数，还有一些谜团存在，这是否导致另一分形结构还不得而知。

（十一）尾声

混沌与分形一百年来的演化史，是一部“引无数英雄竞折腰”的数学史和科学史。从庞加莱到斯梅尔，从乌拉姆到李天岩，不光以他们的科学建树留名青史，更以他们多彩多姿的人生轨迹影响大众。

庞加莱强大的几何直觉和科学洞察力让他毫不犹豫地留给后人大量的定理、更多的思想。尽管有些还没有被严格地证明，但他几乎都是对的。作为伟大的数学家，作为现代纯粹数学几大学科的创立者，他生前却是被提名最多次的诺贝尔物理奖候选人，提名者包括科学史上和牛顿地位一样高的爱因斯坦（Albert Einstein, 1879-1955）。他对牛顿、拉普拉斯等“机械决定论”自然观的无情批判，他在《机遇》一书中所集中阐述的“偶然性”与“必然性”之含义和联系，为混沌学和分形几何学的发展铺下了哲学基础。戴森会毫不犹豫地把他划为一只“科学的大鸟”。

冯•诺依曼和乌拉姆这两位科学和人生的亲密战友，惺惺相惜、彼此欣赏、相互理解。他们分别是匈牙利民族和波兰民族对美利坚合众国巨大智力贡献的代表。只要读一读麦克雷（Norman Macrae, 1923-）撰写的冯•诺依曼传记，只要看一眼当事人之一戈德斯坦（Herman Heine Goldstine, 1913-2004）所回顾的美国现代电子计算机发展史，就可以想象，如果寿短的冯•诺依曼多活十年，只要他在洛伦茨的办公室里看到天气预报奇怪的计算结果，彼此交谈一个小时，混沌学的发展立刻会有一个“大跃进”。

乌拉姆终生都对“Pattern”（模式）着迷，这大概源自家中他幼儿时代天天见到的地毯图案。作为非线性分析的主要“始作俑者”，从洛斯阿拉莫斯的岁月开始直到离开人世，他都在思索“模式”这个“主题词”。读一遍他收录在后人为他编纂的文集《科学、计算机及故友》内的一文，“图形变化的模式”（Patterns of Growth of Figures），就可对他的非线性迭代思想“略见一斑”。他留在《数学问题集》中的方法和思路，成就了几代数学家的事业，包括李天岩三十岁前另两大数学贡献之一的一维函数“乌拉姆猜想”之解决（第二个则是属于计算数学领域的“现代同伦延拓算法”），以及中科院计算数学所的周爱辉与合作者丁玖于 1996 年解决的关于多维函数的乌拉姆猜想。他的“乌拉姆方法”是三十五年前由于李天岩的工作而开始的“计算遍历理论”这一学科的开山鼻祖。

洛伦茨这位一直保持绅士风度、彬彬有礼的和蔼老人 2008 年 4 月去世，距离他的 91 岁生日仅差一个多月。他留给世人的“洛伦茨吸引子”成为了混沌学领域中最有名的奇异吸引子。没有哪个图形比这条无限缠绕不止的活像猫头鹰面部的双螺旋线更包含混沌的全部内涵、更富有想象力、更具有深远意义。在谈论混沌的成千上万篇技术论文的丛林中，很难找到一篇比被人夸奖为“那是一篇妙文”的“确定性的非周期流”被引用得更多。

从洛伦茨的照片就不难推断这是一位从里到外一贯如此的谦谦君子，一生中都保持着低调作风、充满涵养的儒雅学者。按照名记者格莱克锐眼的观察，生前的他“面孔像饱经风霜的美国老农，然而眼睛又是出奇地有神，使他看起来好像总是在笑。他很少谈论自己或自己的工作，只是在倾听别人讲话。”这寥寥几笔，让我们似乎看到中国画家罗中立（1948-）三十年前感动国民的那幅著名油画《父亲》主人公满脸分形般密布的皱纹，又好像面对既有看尽“人性弱点”的讽刺小说《围城》、又有笑傲“文史群雄”的煌煌巨著《管锥编》的“文化昆仑”钱钟书脸上那着实迷人的孩

罗中立油画《父亲》

钱钟书（1910-1998）

鲍恩（Rufus Bowen, 1947-1978）

子般的灿烂笑容。

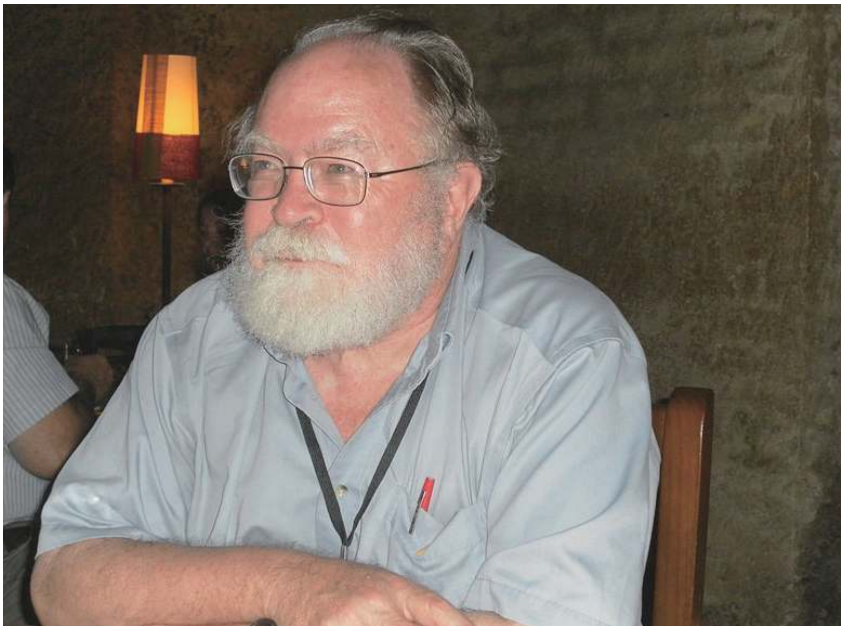
斯梅尔七十年代进入了经济学领域，他关于“一般均衡理论”的数学“帮助”了本校的一位经济学教授德布勒（Gerard Debreu, 1921-2004）1983年荣获了诺贝尔奖。八十年代他开始研究算法，提出了大范围牛顿法。后来他领导一批人探索计算的基础理论。他不光自己是个杰出的数学家，也培养了一批卓越的学生，如他手下最早的博士科佩尔（Nancy J. Kopell, 1942-）和舒布（Michael Shub, 1943-）以及31岁病逝的天才鲍恩（Rufus Bowen, 1947-1978）。

斯梅尔对任何感兴趣的事都有一往无前的精神。六十年代中期他开始了世界各地珍贵矿石的收藏，并逐渐成为一位世界级收藏家。他不畏劳苦地寻找矿石之宝，就像他寻找数学的瑰宝一样入神，使得他在数学和矿石世界同样达到高峰。由于他学得一手高超的摄影技术，无法进入他家收藏室一睹为快者可在万维网上欣赏他的部分优美矿石。他的冒险不止于数学、政治和矿石。年轻时的他曾和同伴另辟新路攀登过一座近一万四千英尺高的俊峰。五十七岁时他担任一艘四十三英尺长的双桅帆船船长，率领两位同事冒险远航三千海里之外的太平洋马克萨斯群岛之一的希瓦瓦岛。

2002年北京国际数学家大会召开前的几个月，让包括中国大陆在内的部分数学家担心斯梅尔是否“老来弥坚”地重演一幕三十六年前的莫斯科“记者招待会”。毕竟，西方人，数学家包括在内，常常断言并试图“证明”中国“缺乏人权”。可是，又是一次“杞人忧天”。今天的斯梅尔，六十四岁从他连续任教三十年的加州大学伯克利校区退休后应丘成桐邀请接受了香港城市大学“杰出大学教授”的聘书，看到了中国的巨大进步，目睹了香港的回归祖国。他已加入在中国的大地上培养人才的教授行列。2010年4月，第二次应聘香港同一所大学的斯梅尔在本校的陈关荣陪同下访问了中国科学院数学与系统科学研究院、清华大学和北京大学，并做了三场学术演讲，报告他最新的研究结果，掀起北京的数学家和学生们的一阵激动。现在，年逾八十的他还在香港继续不知疲倦地工作着，还经常和年轻人一起去爬山。

斯梅尔的矿石收藏之一

享有盛名的梅好像是头衔最多的“混沌学家”。除了当过十五年普林斯顿大学动物学“1877级班”讲座教授外，他连续十一年担任同一大学的“研究董事会”主席。他1979年被选为崇高的英国皇家学会会士。1988年离开美国后他一直任教英国，被聘



约克（James A. Yorke, 1941- ）

史铁生 (1951-2010)

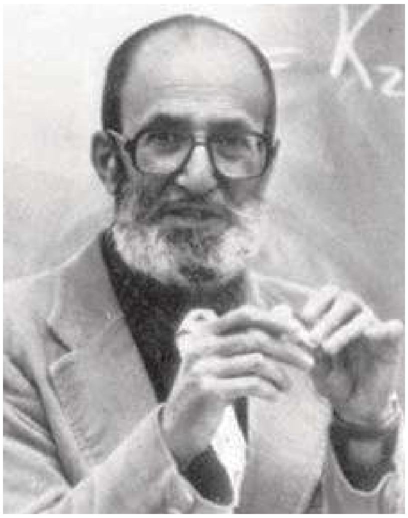
为牛津大学和伦敦帝国学院的双校教授。1995年至2000年他身为英国政府首席科学顾问，然后又干了五年的皇家学会会长。我们不必再列举他几乎“不可数”个其他的职位、奖项、名誉称号了，只加一项：最后，他被女王封爵。

戴着“杰出大学教授”桂冠的约克和他的“左膀右臂”合作者已让美国马里兰大学成为混沌研究的圣地之一，2003年他和曼德波罗共享属于“自然界复杂行为”范畴的“东京奖”。约克的名字好像已成混沌学的代名词，而他几十年如一日的“马克思式”的大胡子也成了他本人的不变“模式”。上世纪末的某个短暂的时间段，他的胡子飞了，露出了面部的庐山真面目，让他的粉丝几乎不认识他了，于是在一片“抗议”声中，他恢复了本来面目。

拥有密西根州立大学“大学杰出教授”头衔的李天岩曾经让他八十年代中期在中国大陆招收的五、六个都是国内名牌大学数学系七七级本科生的博士研究生害怕，因他经常在他们每学期“讨论班”的第一天“训话”：“我不希望你们今后在‘麦当劳’端盘子”（意指要好好做学问）。但是久而久之，大家发现他脸“冷”心“热”。他对学生有一句名言：如果你们碰到任何困难，只要想想我的身体，就没有困难了。的确，1974年拿到博士后六个星期，他的血压竟高达220/160毫柱，原因是肾脏开始坏了。洗肾持续五年半，每周要三次，每次要花五个小时，结果无济于事。1981年他手足情深的同胞妹妹给他的一个肾脏移植，让他活到今天。可以说，全身动过十多次大手术的李天岩是美国的“史铁生”，而双腿瘫痪、洗肾几十年、作品震撼人心的小说散文家史铁生（1951-2010）是中国的“李天岩”。他们俩都是“天岩铁生”的，是生活的挑战者、事业的攀登者、不屈不饶精神的实践者。

费根鲍姆后来发展的用于地图制作的分形方法以及实用软件，让新地图集里海岸和群山更有真实感、更具吸引力，尽管他曾遭受那个“分形之父”的“恶意中伤”。他的“普适性”也让他成为普天下名校争相聘用的科学明星。1986年他接受了美国洛克菲勒大学的“丰田”讲座教授位置，并固定在那里再也不动，因出名前的他动得太频繁了，四年之中在几乎覆盖美国大地的一个直角三角形从一个顶点疲倦不堪地跳到另一个。当年每天“二十五”个小时艰苦的智力劳作让非他莫属的名誉和奖项纷至沓来，包括1983年的麦克阿瑟（John D. MacArthur, 1897-1978）天才奖和1986年的沃尔夫物理奖，让他满盘收获“辛勤汗水浇灌的幸福之树”结下的甜蜜果实。

曼德波罗大概是最受争议的新型科学家之一，在他出名前是如此，出名后也是如此，尽管他几十年来光环满身，包括1985年美国科学院五年一颁的巴纳德奖。有人对他常和古人“争功夺利”不满，有人说他从未证明定理，更有人说他不是数学家。四十年代当过冯·诺依曼的助手、写过几本数学名著的著名匈牙利裔犹太人美国数学家哈尔莫斯（Paul R. Halmos, 1916-2007），甚至直言不讳



哈尔莫斯（Paul R. Halmos, 1916-2007）

地认为：虽然分形很漂亮，但它不是数学。曼德波罗的后半生大概过得不甚爽快，因为他要抵挡来自四面八方的“明枪暗箭”。刚刚作古的他，其一生功过，还未最后“盖棺论定”，自有后人评说。

看来，还是李天岩和约克的那个经过严格证明的定理“经得起时间的考验”，因而得到有资格的鉴定家戴森的宠爱。无论如何，混沌与分形，好像是科学领域里的一把利剑的双刃，寒光闪闪、所向披靡。它们改变了我们对自然世界的看法，提供了观察物体形态的新方式。混沌是在时间方向上的分形，分形是在空间形式中的混沌。它们把我们从绝对、静止的决定论思维桎梏中彻底解放出来，让我们以整体的眼光观测细微之处，从确定性系统中找到内在随机性，在不规则的“无序”之中理出“有序”规律，“于无声处听惊雷”。它们促使我们再次深深地回味几乎一百年前爱因斯坦在苦苦思索和质疑新生的量子力学时所表达的那句已经载入科学史册的深深疑问：“上帝是在掷骰子吗？”

混沌和分形不光已成为数学领域两大相辅相成的研究分支，更以遍地开花的应用在几乎所有科学技术界的地盘中大显身手。遥望大地，全世界各国对这两门学问的理论研究和应用探索，方兴未艾。作为最新的例子，无线通讯、药物设计这两个与我们的日常生活最有关系的行业已把“混沌”当作一位富有的老太爷来服侍。但是放眼未来，我们不愿预测“混沌学与分形几何学”的走向，因为按照“混沌”的观点，未来是不可预测的！

致谢：作者感谢美国密西根州立大学数学系李天岩教授和香港城市大学电子工程系陈关荣教授在写作过程中提供的帮助。

参考文献

1. “关于‘Li-Yorke 混沌’的故事”，李天岩，《数学传播》十二卷三期，13-16，1988。
2. 《混沌——开创新科学》，詹姆斯·格莱克著，张淑誉译，上海译文出版社，1990。
3. A First Course in Chaotic Dynamical Systems, Robert L. Devaney, Addison-Wesley, 1992。
4. 《分形的哲学漫步》，林夏水等著，首都师范大学出版社，1999。
5. 《勇闯人生的数学大师斯提芬·斯梅尔》，Steve Batterson 著，邝重平译，世界科技出版公司，2002。
6. 《数学大师——从芝诺到庞加莱》，E. T. 贝尔著，徐源译，上海科技教育出版社，2004。
7. 《天才的拓荒者——冯·诺依曼传》，诺曼·麦克雷著，范秀华、朱朝晖译，上海科技教育出版社，2008。
8. “Birds and Frogs”，Freeman Dyson, Notices of the American Mathematical Society, Vol. 56, No. 2, 212-223, 2009。

2011 年 3 月 8 日初稿

2011 年 5 月 20 日修改完毕

作者简介：丁玖，南京大学数学系七七级计算数学本科生、八一级硕士研究生。1990 年获美国密西根州立大学应用数学博士学位，导师李天岩教授。现为美国南密西西比大学数学系教授。