

最美的数学就如文学

——普及经典《数学是什么》的故事与推介

欧阳顺湘

最新英文版

书名：What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods (Second Edition)；
 作者：Richard Courant (理查德·柯朗)，Herbert Robbins (赫伯特·罗宾斯)；
 增订者：Ian Stewart (伊恩·斯图尔特)；
 出版社：Oxford University Press, New York (牛津大学出版社，纽约)；
 出版年：1996；
 其它：592页，平装；
 英文影印版：人民邮电出版社，2009。

部分中文译本

- 汪浩 / 朱煜民 (译)：《数学是什么》，湖南教育出版社，1985，547页；
- 左平 / 张怡慈 (译)：《数学是什么》，科学出版社，1985，671页；增订版：《什么是数学：对思想和方法的基本研究》(西方数学文化理念译丛)，复旦大学出版社，2005，584页。



图1 左平、张怡慈译本(增订版)

1 写在前面

“两千年以来，谙熟一定的数学知识是每一个文明人应有的基本智力。”

这是 70 余年前著名数学家柯朗与他当时只是年轻的拓扑学博士、后来成为著名统计学家的罗宾斯合著的数学普及经典名著 *What is Mathematics?* (以下统一以《数学是什么》作为译名) 第一版所写序言的第一句话。在我年少第一次读到这句话时，心中有些震动：数学有如此魅力？难道每一个受过教育的人都该如每个中国人应被唐诗浸淫过一样被数学熏陶过？

我所感知的或与我后文将提及的阅读体验有关——那时我主要接触的大多是非科学类书籍。自然也多少与我们的传统有关。我国传统重视的是经史子集之类的人文学科。“数”只是六艺之末，算学学官为从九品。《颜氏家训》说“(算术)可以兼明，不可以专业”。而西方文明素以古希腊文明为源，后者对数学教育异常重视。今日中国，数学因为应用而变得必不可少且日益重要，但要使数学教育深入人心，作为人文教育的一部分，尚需时日。而柯朗接着所写的——“但今天，数学教育的这种传统地位已经岌岌可危。不幸的是，数学工作者对此要负一定的责任”——或在今日仍有意义。

对青年朋友来说，怎样获得有效的数学素养？对教育工作者来说，怎样进行有效的数学教育？让我们来了

解这一经典，读读这一名著，认识数学是什么，借鉴下柯朗开出的药方吧。

2 经典常青

1941 年，《数学是什么》甫一出版，当即好评如潮，成为畅销书。《纽约时报》写道：“无论是专家抑或其他任何对科学思考感兴趣的人都应该拥有这本书。”很多名人如著名数学家外尔(Hermann Weyl, 1885-1955)、莫尔斯(Marston Morse, 1892-1977)等都对其给予很高的评价。甚至爱因斯坦也称此书为“对整个数学领域中基本概念及方法的清晰、透彻的阐述”。

70 余年足以将真正的经典沉淀。至今该书英文版即已数次再版——1943、1945、1947 分别为第二、三、四版，1996 年又由著名数学科普作家斯图尔特增订(该增订版称为第二版应是相对于 1978 年首次平装版而言)；英文版也多次重印——至 1967 年该书英文版就已经重印了 13 次。译本也很多，有中、德、俄、西、越、日等语种的译本；而中译本就有五种。

在大陆，常见的中文译本是前列左平/张饴慈、汪浩/朱煜民的两个译本。实际上，早在 1951 年，该书的第一个中文译本《近代数学概观》就已出版。这个译本由上海中华书局分四册出版，译者分别为：齐植棠(第一册)、余介石/杨锡宽(第二册)、杨宗磐(第三册)、张春木/孙炳章(第四册)。汪/朱和左/张译本的译者序中都提及这样一个“文言”译本，虽然简单地连具体书名亦未指出。

台湾也有两个译本——一是由吴英格等人翻译，徐氏文教基金会于 1977 年出版的《数学是什么》¹；二为容士毅翻译，左岸文化出版社于 2010、2011 年先后出版的《数学是什么(上、下)》。

一本数学著作，不但被译为多国文字，还存在这么多的中译本，是一个传奇。对于能有机会翻译此书，译者该是深感快意的。杨宗磐在其所作

“译者跋”中即说：“能将这继承 Klein, Hilbert 之严格不忘直观的伟大学风的名著之一部，移于我国，是译者最感荣幸的。”

新版《数学是什么》的英文影印版和中文增订版(左/张译本)在国内的网络书店的销售排名中都名列前茅，这也足以说明该书的生命力。在亚马逊网站上，该书被评为四星半。读者还可以在中外不少相关网络上见到许多读者对此书的推介。

罗塔²曾希望有人教他的十大教训之一是：数学家更有可能因其诠释性的文字被世人记住，而非其原创性研究。他还举例说，“希尔伯特空间”这一概念，是斯通(Marshall Stone, 1903-1989)和冯·诺依曼根据希尔伯特的一本阐述积分方程的书而引入的，而海林格(Ernst Hellinger, 1883-1950)等做出过重要贡献的一些数学家则被遗忘了。显然，柯朗与罗宾斯这一本书是罗塔所提教训的另一个令人信服的实例。

3 大家柯朗

笔者最早接触此书时并不知道这是一本名著，对柯朗、罗宾斯也没有什么了解。我们先简要介绍下该书的作者，以帮助读者更好地了解这本书。

理查德·柯朗(Richard Courant, 1888-1972，也见译为库朗、库兰特)出生于德国，是 20 世纪杰出的数学家，在数学物理、变分法等方面有很深刻的研究。柯朗很小时即随父母来到布雷斯劳(Breslau，即现波兰城市弗罗茨瓦夫[Wrocław])生活。或许值得一提的后文将提及的托普利茨就出生在布雷斯劳，仅比柯朗年长 7 岁。他们曾一起学习。后来托普利茨去哥廷根学习，也鼓动了柯朗前往。

柯朗在哥廷根曾任希尔伯特的学生兼助手，他和克莱因、希尔伯特关系深厚，是哥廷根传统的重要继承人。1910 年他获得博士学位时年仅 23 岁。1933 年，因纳粹逼迫而离任哥廷根大

¹ 在线超星数字图书馆可阅读 http://book.chaoxing.com/ebook/read_10515719.html。

² 吉安-卡洛·罗塔(Gian-Carlo Rota, 1932-1999)，杰出的组合数学家。其说法见 Gian-Carlo Rota 著，Fabrizio Palombi 编辑的 *Indiscrete Thoughts* (Modern Birkhauser Classics)，Birkhauser Boston, 1996。亦见 Blank 的书评：Brian E. Blank, *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, book review, Notices of the American Mathematical Society 48, 11 (December 2001), pp. 1325-1329。

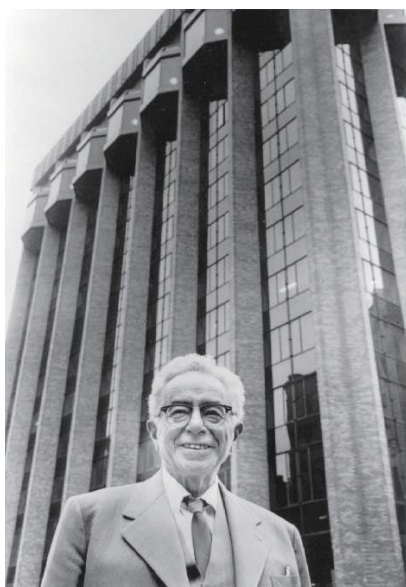


图2 柯朗 (Richard Courant, 1888-1972) 与柯朗数学科学研究所

学数学所所长职位的柯朗逃离德国，先到剑桥大学后于1934年以访问教授的身份来到纽约大学。1935年，他受邀在纽约大学建立数学系。二战前数不清的数学家被迫逃离德国，其中很多在柯朗的帮助下在美国获得职位。

《数学是什么》的撰写被柯朗当作对美国提供职位的回报，实也源于柯朗对数学传播的兴趣。在纽约，他曾积极向公众演讲普及数学知识、演示肥皂膜实验，提高人们对数学的兴趣。他的学生则帮他整理讲稿。

除了《数学是什么》，柯朗还有不少脍炙人口的经典，如《数学物理方法》³、《微分与积分计算》⁴以及《微积分和数学分析引论》⁵。这些书籍都有中译。

但相比数学创造，柯朗杰出的领导才能更为人称道。在纽约大学，柯朗白手起家，率领他的研究群体，从无到有最终建立了著名的应用数学研究所——19世纪60年代该所更名为柯朗数学科学研究所，至今仍是最好的应用数学研究中心之一。该所的建立在一定程度上象征了希尔伯特在哥廷根创建的殿堂在纽约的重建，哥

廷根学派的传统在美国的延续，以及世界数学中心从德国到美国的转移。

柯朗也培养了不少人才。据数学家谱系网⁶的不完全统计（中国学生未记录），柯朗至少培养了博士生35人，并有“后代”学生4千多人。值得我们回忆的是柯朗在哥廷根的两位中国学生——魏时珍和朱公谨⁷，他们同为1935年在上海交通大学成立的中国数学会的发起人和第一届理事会成员。在本文附录中我将简介这两位中国学生，既是为了使读者了解柯朗以及哥廷根的数学影响，同时也是有感于这两位的文化魅力。此外，朱公谨翻译的柯朗的微积分教材，不但水平很高，而且可以看出其中一些内容在《数学是什么》中有所反映，是值得介绍的。

关于柯朗更多的介绍，有兴趣的读者可以阅读美国女作家康斯坦丝·瑞德 (Constance Reid) 所作的柯朗传⁸。

4 罗宾斯记

赫伯特·罗宾斯 (Herbert Robbins, 1915-2001) 出生于美国。他最早在数学界出名即是源于他和柯朗合作的这本《数学是什么》。他在中学时对数学并不特别感兴趣，独钟于文学，常在放学后去公共图书馆读书，“读完了那里的每一本书”⁹。1931年罗宾斯入读哈佛大学，后跟随著名拓扑学家惠特尼 (Hassler Whitney, 1907-1989) 进行拓扑学研究并于1938年获得博士学位。此后莫尔斯邀请他去普林斯顿大学做他的助理，为期一年。但罗宾斯亟需一个永久职位以给母亲和妹妹经济资助。不久恰好柯朗到普林斯顿寻求合适的助手。莫尔斯推荐了罗宾斯。于是1939年罗宾斯到了纽约大学。

罗宾斯后来以统计学家的身份而闻名。他最后任新泽西州拉特格斯 (Rutgers) 大学的数理统计教授。著名统计学家奈曼 (Jerzy Neyman) 在他的两篇论述上世纪下半叶统计学进展的综述中所列突破主要都是由罗宾



图3 罗宾斯 (Herbert Robbins, 1915-2001)

斯获得。学过概率论课程的朋友或许知道所谓的随机变量序列的完全收敛 (complete convergence)¹⁰，此即是罗

³ *Methods of Mathematical Physics*, 与希尔伯特合作，德文原著 *Methoden der mathematischen Physik*。

⁴ *Differential and Integral Calculus*, 德文原著 *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*。

⁵ *Introduction to Calculus and Analysis*, 与约翰 (Fritz John) 合著。

⁶ 参比勒费尔德大学的镜像: <http://genealogy.math.uni-bielefeld.de/genealogy>。

⁷ 后来还有受这两位影响而赴哥廷根随柯朗做博士论文的蒋硕民，后因柯朗的离开而随他人继续学习。

⁸ Constance Reid, *Courant, Springer*, 1996。中译可参考胡复等翻译，东方出版中心于1999出版的《库朗：一位数学家的双城记》。

⁹ Donald Albers and Gerald Alexanderson (eds.), *Mathematical People: Profiles and Interviews* (《数学人物》), Birkhäuser, 1985。

¹⁰ 概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量序列 $(X_n)_{n \geq 1}$ 完全收敛到随机变量 X 指对任意的 $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty$ 。该收敛蕴含 $(X_n)_{n \geq 1}$ 几乎处处收敛。但若 $(X_n)_{n \geq 1}$ 独立，则反之亦对。

宾斯和我国杰出的统计学家许宝騄在他们合作的一篇短文中提出来的。

罗宾斯曾说他没能在拓扑学领域立足与花费太多时间撰写《数学是什么》有关——直到1941年他才得以将自己的论文付梓。他转向统计学，却也和柯朗的一次有意或无意的栽培有关。罗宾斯在纽约大学任教期间，柯朗邀请他早年在哥廷根的学生、著名的概率论学家威廉·费勒（William Feller, 1907-1970）来讲授概率论与统计学，但在课程都安排好并公布了之后，费勒却不能来讲课。于是柯朗要此前对概率论和统计学一无所知的罗宾斯来讲授这门课程。

罗宾斯开始真正的统计学研究是受战争的启发。1942年，罗宾斯加入了海军预备役。期间他听到两位高级海军军官讨论炸弹落点的效率问题。后来他写了“随机集合的测度”的论文。罗宾斯的经历足够传奇，当他领到退役补贴，置买土地，准备解甲归田时，接到电话邀请去教测度论、建立新的数理统计系。那时，概率统计作为学科并不被看好。罗宾斯曾被告诫：概率论与统计学家最要紧的任务是证明概率论与统计学是数学的一部分。这也说明罗宾斯筚路蓝缕、开拓新领域的功劳。

与罗宾斯有关的另一件趣事是美国数学会自1938年正式开始组织的普特南（Putnam）年度数学竞赛。该赛

事源于几年前西点军校和哈佛大学之间一武一文的比赛。1931年，西点和哈佛举行足球比赛，上半场哈佛队落后，中场休息期间，当时的哈佛校长劳伦斯（A. Lawrence）不服气，对西点的首长说：“你们的小伙子虽然或能赢得足球比赛，但我敢打赌我们一定能在数学比赛中击败你们。”西点同意了。1933年，在劳伦斯的亲戚普特南（William Lowell Putnam）的支持下，两方举行了数学比赛，每方10名队员。结果哈佛落败了。参加这次数学竞赛的哈佛队员中就有罗宾斯，而教练即是在罗宾斯博士毕业后提供职位的莫尔斯。

5 斯图尔特

斯图尔特（Ian Stewart）现为华威大学（Warwick University）的数学教授。他在将数学向公众推广方面很知名，撰写了许多普及读物，其中不少已被翻译为中文，如《上帝掷骰子吗——混沌之数学》¹¹、《二维国内外数字漫游奇历记》¹²、《第二重奥秘：生命王国的新数学》¹³、《自然之数》¹⁴等书。他还是《科学美国人》杂志的专栏作者。1995年他还因科普成就而获迈克尔·法拉第奖（Michael Faraday Medal）。

6 严肃读本

数学普及读物大致有三类：

- 一是涉及数学历史、哲学、方法论等方面的著作，如哈代的《一个数学家的辩白》、阿达马的《数学领域的发明心理学》¹⁵，以及许多数学家传略；
- 二是趣味数学类书籍，这类书通过通俗易懂且使人感兴趣的问题与方法来传播一些数学思想和知识。著名的有如马丁·加德纳（Martin Gardner）所编写的很多书。我们今天也能见到有的数学家在积极通俗地传播数学，希望

读者用同看电视、阅读卡通书籍那样只看不想的轻松方式对数学有一定的认识；

- 三是较“严肃”的数学读物。这类书比一般读者觉得枯燥的数学教材更多阐述性的叙述，更多引导，可读性更强，但又可从中学到一些“真的数学”。阅读这类书，对读者的要求也较高；读起来虽然不总是很轻松，但所获却是翻阅许多娱乐数学类读物所不及的——这也恰是经典的共性。

《数学是什么》即是第三类较严肃的数学普及读物。剑桥大学数学系有一个给新生推荐参考书的小册子，《数学是什么》也在第三类书中；斯图尔特最早也是因此小册子而得悉该书。

柯朗在其书的第一版序言（参汪/朱译本）中解释《数学是什么》是作为普及性读物而撰写的，假定的读者为受过教育的外行，仅需良好的高中文化水平。然而读者应当具备成熟的智力且愿意独立思考，因为柯朗的目的是使他们真正接触到数学的实质内容，柯朗认为为此不可能“不劳而获”，“若仅持娱乐消遣的态度而不下工夫吃苦研究，亦将一无所得”。

柯朗还批评虽然传记、历史著作以及有趣的通俗读物能够普遍地引起读者对数学的潜在兴趣，但学问不能单凭间接的方法获得。他还比喻：“如果一个人从未集中思想倾听过音乐乐章，而单靠最出色的报刊杂志来获得音乐教育，那就无异于缘木求鱼。”无独有偶，日本概率论大家伊藤清甚至更进一步比喻，说数学之美不同于音乐和建筑之美（如莫扎特的音乐和科隆大教堂），后者可以使门外汉通过感官直接获取，然而数学之美只有通过对于数学公式的理解来取得。

按照后面介绍的罗宾斯的比喻，阅读《数学是什么》的读者不应知难而退，可以将自己比作在参加17、18

¹¹ *Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, 潘涛译, 上海远东出版社, 1995。

¹² *Flatterland*, 暴永宁、胡晓梅译, 湖南科学技术出版社, 2008。

¹³ *Life's Other Secret: The New Mathematics of the Living World*, 周仲良等译, 上海科学技术出版社, 2002。

¹⁴ *Nature's Numbers*, 潘涛译, 上海科学技术出版社, 1996。

¹⁵ Jacques Solomon Hadamard (1865-1963), *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, New York: Dover Publications, 1954。

世纪法国文化沙龙¹⁶，渴求知识和智力训练的文明人。柯朗的这本书以及他著的数学教材（如后文将介绍的微积分教程）的一个特点就是，柯朗在智力上将读者与自己同等看待，不回避难点，叙述方式宛如只是一位长辈只因先生而早知般地向读者介绍数学。

重视对数学的真正理解、独立思考的能力的提高也恰是柯朗批评数学教学投机取巧找终南捷径的判据。柯朗在《数学是什么》的序言中写道：“数学的教学，逐渐流于习题的空洞演练，虽然这或可有助于发展形式演算的能力，但却无益于对数学的真正理解，不利于提高独立思考的能力。”

7《论数与形》

因为我们的目的主要是介绍书，我们且枝蔓开来，介绍另外一本“第三类”数学普及经典《论数与形》，恰好它也可用来烘托《数学是什么》。

在数学类书籍出版方面很有影响的德国斯普林格出版社（Springer）¹⁷在对《数学是什么》推荐语中说它是与拉德梅彻-托普利茨和胡维兹（Hurwitz）的名著组成的三部曲中的第三乐章¹⁸。拉德梅彻与托普利茨的经典著作是指德国著名数学家汉斯·拉德梅彻（Hans Rademacher, 1892-1969）与奥托·托普利茨（Otto Toeplitz, 1881-1940）的《论数与形》¹⁹。这也是一本既适合高中生阅读，对专业数学家也有益的普及图书。实际上笔者第一次知道该书，是因某综述文章对此书有关等周问题初等阐述的引用。该书共22节（第20节分a, b两文），用初等的语言，分节介绍具体的经典数学问题，如组合问题、华林问题等。其介绍清晰，且着重问题的逻辑，例如，介绍几何平均和算数平均之间的关系时，还花了较多笔墨用例子介绍这两个平均的概念和优劣。

两位著名数学家曾谈及他们少年时阅读此书的经验。



图4《论数与形》一书的封面（德文版）

阿贝尔奖获得者拉克斯（Peter Lax, 1926-）在台湾数学杂志《数学传播》对他的专访中说²⁰：“12岁时，我开始对数学感兴趣。……我们所读的第一本书是拉德梅彻-托普利茨的书。……书内的章节都很短，只有5、6页，对刚开始学习数学的学生是很合适的。即使今日，我仍会推荐这一本书给对数学有兴趣的年轻人。”

沃尔夫奖、邵逸夫奖获得者阿诺德（Vladimir Arnold, 1937-2010）在接受俄罗斯著名的数学、物理方面的科普杂志“Kvant”的采访（1990年发表）时，说他的第一本启蒙数学书也是拉德梅彻-托普利茨的书。他还回忆起他一天只读几页地咀嚼该书²¹。

《论数与形》和《数学是什么》两书都是由名家撰写，风格也接近，在严肃地讲数学问题，而且很多经典问题两本书都有讨论，例如极小极大、等周问题、四色定理、毕达哥拉斯定理和费马大定理、多面体和欧拉公式等。事实上，《数学是什么》书末所列一般参考书目中即有《论数与形》一书。只是《数学是什么》较系统，而且有微积分等较高等的内容。

可见有的数学家是因为阅读《论数与形》而与数学结缘。可以想象，也有不少数学家因为《数学是什么》而喜欢数学。

1997年阿诺德在巴黎演讲《论数学教育》²²，在批评法国的数学教育时也同时提到这两本书：

“我对此异常震惊：所有那些写得最好而且最重要的阐述数学方法的书在这里却几无学生知晓（在

¹⁶ 沙龙是法语 salon 的音译。原意为客厅。在十七、十八世纪成为上层社会举行集会，讨论文艺、政治、科学的代名词。法国梅森（Mersenne, 1588-1648）神甫曾在巴黎每周举办一次数学沙龙，其客人有费马、笛卡尔和帕斯卡父子。1647年年轻的帕斯卡就是在这里认识笛卡尔的。

¹⁷ 斯普林格出版社进入数学物理出版领域恰是源于柯朗的建议；特别是斯普林格的“黄宝书”系列（Grundlehren）也主要因为柯朗的贡献。

¹⁸ 原文为：“Dritte Staffel der ‘Golden Oldies’ zusammen mit den beiden modernen Klassikern von Rademacher/Toeplitz und Hurwitz”。笔者不清楚 Hurwitz 的哪本书比较适合初学者。

¹⁹ 1930年第一版，德文书名为 *Von Zahlen und Figuren: Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik*，意为《论数与形：写给数学爱好者的数学思想举例》，其英文译本名为 *The Enjoyment of Mathematics: Selections from Mathematics for the Amateur*，中文译本有左平根据英文转译的《数学欣赏》，北京出版社，1981。

²⁰ 《数学传播》，2002年第26卷第4期，总第104期，参 <http://w3.math.sinica.edu.tw/media>。

²¹ 参下书的前言：*Mathematical Omnibus: Thirty Lectures on Classic Mathematics*，Dmitry Fuchs 和 Serge Tabachnikov 著，美国数学会出版，2007。该书基于作者在“Kvant”上发表的系列文章，类似于《论数与形》，介绍各种数学问题，似无中译。

²² *On teaching mathematics*，1997年3月7日在巴黎 Palais de Découverte 的演讲的扩充版，以俄文发表于 *Uspekhi Mat. Nauk* 53 (1998), no. 1 (319), 229-234; 英译发表于 *Russian Math. Surveys* 53 (1998), no. 1, 229-236。可免费下载。HTML版本可参 <http://pauli.uni-muenster.de/~munsteg/arnold.html>。中译将刊登于《数学文化》。