

雪花里的数学

蒋迅



雪花研究史



图 1 漂亮的雪花（来源：SnowCrystals.com）

当我们看到这些漂亮的雪花时，我们一定对大自然的奇妙力量而感到神奇。有人说，每一片雪花都是不同的。真是这样吗？美国《国家地理》有一篇文章说“这很可能是真的”¹。但《生命科学》上刊登了一篇文章指出“雪花是可能重复的”²。有人甚至宣布发现了两个完全一样的雪花³。其实这并不难理解。专家们估计，每年有 10^{24} 个雪片飘落下来，从统计学的角度说，当然很可能有相同的雪花。不过笔者对这样的“数学”问题并不感兴趣。如果我们试图穷举雪花的图形的话，我们就走进了一个死胡同，因为我们

是不可能收集所有的雪花图形的，这样做只能让我们更加迷茫。我们更感兴趣的是，人们能否用数学作为工具彻底解决雪花形成的奥秘：它们有多少种？它们是在什么条件下形成的？它们能否在计算机上模拟？

让我们首先来了解一下人类对雪花认知的历史。人类对雪花的研究已经有上千年了。松鼠会有一篇桔子作为新年礼物奉献给读者的走笔优美的“雪花史”⁴。维基百科也有一篇“雪花研究史”，记录追溯到西汉经学家韩婴。

雪花也是数学家感兴趣的课题。1611 年，天文学家和数学家开普勒就

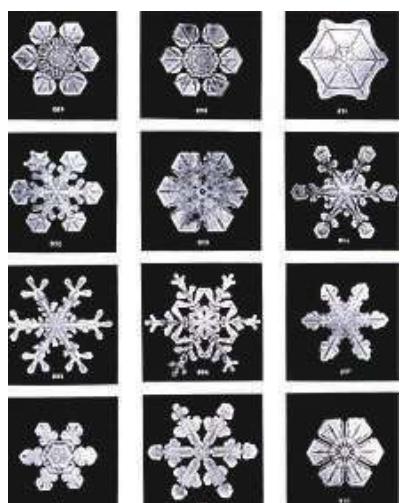


图 2 班特雷雪花（来源：wikipedia.org）

预言，六角结构将反映出位于其下的结晶结构⁵。二十六年后（1637年），数学家和哲学家笛卡尔第一次详述了雪花的外形⁶。几乎是同时，英国博物学家、发明家罗伯特·胡克（Robert Hooke）在他1665年出版的《显微图谱》中描述了雪花的结晶⁷。此后对雪花的研究就在很长一段时间内处于停滞的状态。

在研究雪花的历史里，有一位不能不提的是美国农民维尔森·班特雷（Wilson Bentley）。他在少年时代就对雪花开始感兴趣。他的母亲送给他一个显微镜，他就在显微镜下观察雪花并随手画下来。但是雪花融化得太快了。正好市场上有了大幅相机，班特雷倾其所有买下了昂贵的相机。在经过

了一番挫折后，他终于在1885年1月15日拍下了第一张雪花照片。值得一提的是，他拍摄雪花的技术事实上一直延续至今。他一生一共拍摄了五千多张雪花照片，这些照片对于科学家和数学家影响巨大。通过自己的亲身观察他得出结论：没有两个雪花是相同的（不知道这是不是第一次书面的记录）。2010年，他拍下的最早的雪花照片在纽约拍卖，每张4800美元。不过他在世时却少有人问津。尽管有一些机构购买了他的作品，但远远不够他在拍摄雪花中的投入。所以他一直过着贫困的日子。1931年12月23日是一个暴风雪的日子，身患肺炎的他却坚持步行出去拍摄雪花，不幸的是他体力不支终于倒在了荒野中。班特雷

远非一位数学家，但他是一位在雪花史中不能不特写的人物。

对雪花的研究迈出一大步的是日本物理学家中谷宇吉郎（Ukichiro Nakaya）。他在1930年代第一次把雪花分了类，并首次在实验室实现了人工结晶。在此基础上，他制作了一个雪花形态图表。用他的这个图表可以预测在任何给定温度和饱和水平条件下的雪花的主要类型⁸。通过班特雷、中谷宇吉郎等人的努力，人们把雪花大体分为80种类型，其中一种叫作“其它”，意味着这项工作还应继续下去。这个分类被称为“Magono-Lee类”⁹。

关于班特雷和中谷宇吉郎，还是去读桔子的精彩“雪花史”吧，现在让我们继续讨论雪花里的数学。

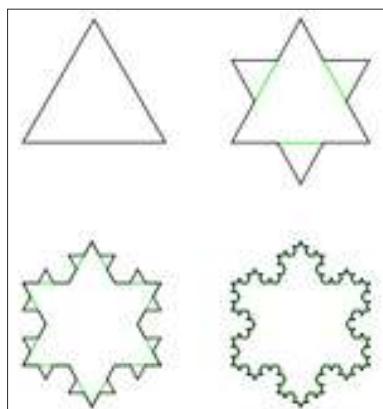


图3 科赫雪花（来源：[wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)）

计算机辅助

在二十世纪开始时，对雪花的研究向几何方法上发展。1904年，海里格·冯·科赫（Helge von Koch）发表了一篇论文“关于一个可由基本几何方法构造出的无切线的连续曲线”¹⁰，描述了科赫曲线的构造方法。这是最早被描述出来的分形曲线之一，这就是著名的“科赫雪花”。虽然“科赫雪花”不是真正意义上的雪花模型，但是科赫的方法——在多面体上无限地

改进——与班特雷使用的图解方法异曲同工。目前，人们所知道的是，雪花的基本构造是基于天然冰之分子的六边形。但人们对水汽到底是如何如此自我精心设计成美丽的雪花仍然知之甚少。

1986年，美国混沌理论方面的物理学家诺曼·帕克（Norman Packard）提出了一个极其简单的格状自动机模型¹¹。帕克是对结晶过程

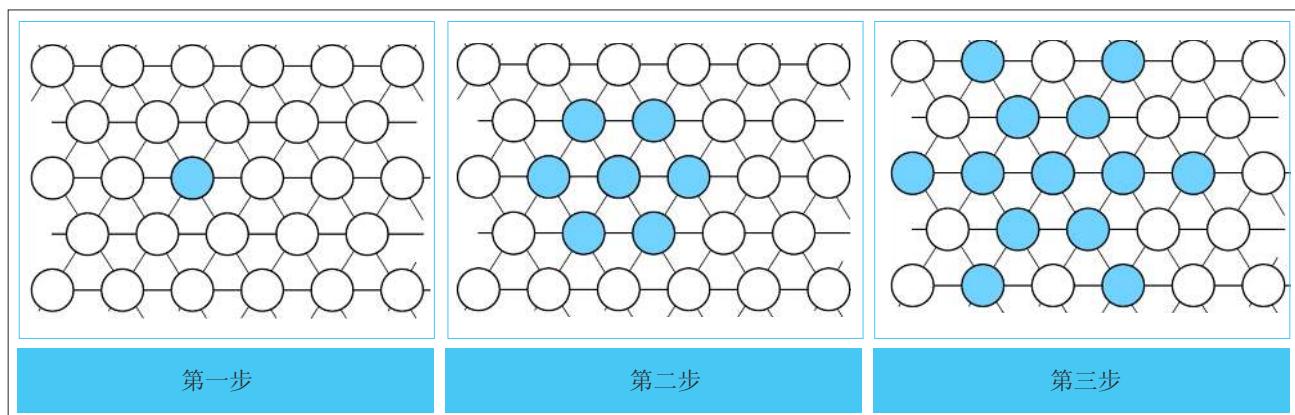


图4 帕克雪花 Hex 1

提出他的模型的，当然对雪花也适用。格状自动机也叫细胞自动机，最早是由冯·诺依曼在1950年代为模拟生物细胞的自我复制而提出的。而帕克则注意到了结晶的自我复制机制。这一步为人们在计算机实现数字雪花打开了大门。

帕克还注意到雪花的自我复制是在尖头上，所以他做了一条假设：如果一个节点只有一个邻居是结晶的，那么这个节点就结晶，如果有两个是结晶了的，那么这个节点就不结晶；当然已经结晶了的节点保持结晶。这个过程无限重复。图4显示了在重复两次之后的效果。这只是其中一种假设。还有其它的假设，就导致不同形状的雪花图形。比如，可以假定当有1个，3个或5个邻居是结晶时，这个

节点就被结晶。为后面叙述方便，我们把第一种结晶法则称为“Hex 1”，把第二个称为“Hex 135”。这样的选择法则在{3, 4, 5, 6}这四个邻居数量上可以不同，一共有16种法则。图4是我们说的第一种选择法则Hex 1过程的第一、二、三步。史蒂芬·沃尔夫勒姆（Stephen Wolfram）研究了这种选择法则，他在观察了30步之后，得出结论¹²：

人们预计在一片特殊雪花生成的过程中会在树状和面状两种状况里交替，新的分支不断生成但又互相碰撞。如果我们观察真正的雪花，一切迹象表明，这正是所发生的事情。事实上，一般地说，上面的简单的格状自动机似乎显然成功地复制了雪花生成的所有明显的特征。

上面的讨论中，我们默认了一个事实：在一个迭代过程中，雪花一直保持着同一个法则扩散。但显然在自然界中的雪花不一定是按照一个固定的法则扩散的。很有可能，第一步遵循“Hex 1”，第二步就变成了“Hex 135”，第三步又成了“Hex 1345”。这样的格状自动机模型也有人考虑过。

从这个例子，我们看到了计算机模拟开始扮演重要的角色。帕克的这一步是成功的，因为帕克生成的雪花即使让一个小学生去看，他也会说出那是一个雪花（Steven Levy语¹³）。还有一点更重要，正如沃尔夫勒姆说的：通过计算机模拟可能是预测某些复杂系统如何发展的唯一途径。……生成“帕克雪花”模式的唯一可行的方法是由计算机模拟。



物理学的帮助

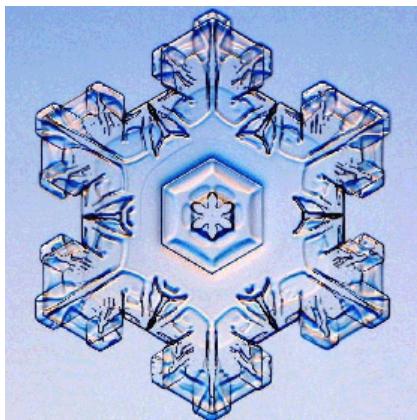


图5 比较帕克雪花和真实雪花（格拉夫纳提供）

但是帕克方法还是有局限性的，人们对雪花的物理属性的认识还必须深入。让我们再回到物理学家在这方面的努力来。有时候对自然界的认识就是这样通过数学家和物理学家的相互促进完成的。在加州理工学院有一位天体物理学教授肯尼思·利伯布莱切特（也译为利波瑞特，Kenneth Libbrecht）。他1984年毕

业于普林斯顿大学，获得博士学位，现任加州理工学院物理系主任。利伯布莱切特是学天文学的，但他近年来对雪花做了大量研究。这多么像400年前的开普勒啊。一开始利伯布莱切特完全是出于好奇，但很快他就把好奇与自己受到的数学、物理学方面的严格训练结合到一起，成为了一名研究雪花微观世界的自觉

的科学家¹⁴⁻¹⁹。

虽然雪花千变万化，但科学家感兴趣的是：有多少种不同类型的雪花。在这一点上利伯布莱切特和中谷宇吉郎不谋而合。利伯布莱切特把雪花的分类从中谷宇吉郎等人的80种简化到35种。现在比较标准的平面结晶分类是19种——13个Magono-Lee类，6个利伯布莱切特类，都是六边形的形状。对雪花分类的意义在于，虽然人们不可能用计算机复制所有的雪花，但是可以试图复制全部的雪花类型。

对雪花分类的意义还在于，人们可以针对雪花的每一类给出一个比较合理的物理解释。下面这些图片是利伯布莱切特利用特制的雪花显微照相机拍摄的，展示的是在安大略北部地区、阿拉斯加州、佛蒙特州、密歇根州上半岛以及加州内华达山脉地区飘落的雪花。下面是对他几种雪花给出的描述解释²⁰。

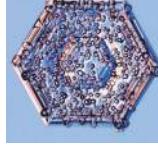
		
六棱柱状雪花：这是雪晶最基本的形式。类似这样的雪晶个头通常很小，极少能够用肉眼进行观察。六棱柱状雪晶是绝大多数雪花开始时的样子，之后才是从6个角长出“枝权”，形成更为精细的结构。	普通棱柱状雪花：这与上一种类型比较相似，所不同的是，它的表面装饰着各种各样的凹痕和褶皱。	星盘状雪花：这种薄薄的盘状雪晶拥有6个宽大的“枝干”，形成与星星类似的形状。它的表面经常装饰着极为精细的对称性花纹。盘状雪花在气温接近零下2摄氏度或者接近零下15摄氏度时形成，是一种比较常见的雪花类型。
		
扇盘状雪花：这也是一种星盘状雪晶，所不同的是，在邻近的棱柱表面之间长有与众不同的指向边角的脊。	树枝星状雪花：这种外形的雪晶个头很大，直径通常可达到2到4毫米，可以很容易用肉眼观察。	树枝星状雪花：这种树枝星状雪晶的枝干生有大量边枝，看起来很像蕨类植物。它们是所有雪晶中个头最大的，经常是带着直径达5毫米或者更大的身躯降落地面。它们是单一的冰晶——水分子首尾相连而成。
		
空心柱状雪花：这是一个六角形柱体，两端拥有锥状中空结构。空心柱状雪晶个头很小，需要使用放大镜才能看到空心。	针状雪花：这是一种身材“苗条”的柱体，在大约零下5摄氏度时形成。当温度发生变化时，雪晶形状便会从薄而扁平的盘状变成细长的针状。	冠柱状雪花：这种雪晶首先长成短而粗的柱状，而后被吹进云层的一个区域并在那里变成盘状。最后，两个薄薄的盘状晶体在一个冰柱的两端生长，形成图片所示的冠柱状。
		
罕见的12条枝权雪花：这种雪花实际是由两片雪花组合而成的，其中一片相对另一片进行了30度旋转。	三角晶状雪花：在温度接近零下2摄氏度时，雪盘“生长”成被截去尖角的三角形，此时，图片中的雪晶就形成了。	霜晶状雪花：云是由无数小水滴构成的，有时候，这些小水滴与雪晶发生碰撞并最终粘在一起。这种冻结的水滴被称之为霜。

表1（来源：新浪科技²⁰）