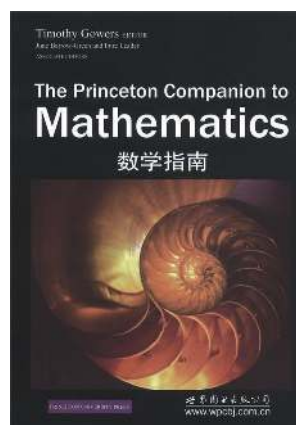




给年轻数学家的忠告

Atiyah, Bollobás, Connes, McDuff, Sarnak / 著 陈跃 / 译



《普林斯顿数学指南》主编蒂莫西·高尔斯教授

编者按：这篇文章 *Advice to a young mathematician* 出自剑桥大学数学教授、菲尔兹奖得主蒂莫西·高尔斯（Timothy Gowers）主编的《普林斯顿数学指南》，这是一部独具特色的高水平著作，介绍了很多 20 世纪的数学，且都出自数学大家之笔。该书 1000-1010 页有五位顶级数学家对年轻数学人的忠告，对欲进数学研究大门的学子们非常有意义。我们特邀上海师范大学数学系陈跃副教授翻译这一部分，希望对广大数学爱好者有帮助。

年轻的数学家们所需要学习的最重要的东西当然是数学。然而，学习从其他数学家那里得来的经验也是非常有价值的。这篇文章的五位作者被要求按照他们自己研究数学的经验，对新手给出忠告，就好像他们正在开始自己的学术生涯时所愿意收到的忠告一样。由此写出的经验不仅如我们所期待的那样很有意思，而且更使我们感到惊奇的是它们很少有重复。以下就是这五位数学家写的宝贵经验，虽然它们是针对年轻的数学家们而说的，但是肯定会被所有年纪的数学家们所欣赏和阅读。

1 迈克尔·阿蒂亚的忠告

迈克尔·阿蒂亚爵士 (Sir Michael Atiyah, 1929-), 英国数学家, 主要研究领域为几何学, 被誉为当代最伟大的数学家之一。1966 年获菲尔兹奖; 2004 年获阿贝尔奖。曾任英国皇家学会会长。



声明

以下仅仅是我个人的看法，主要依据我自己的经验，反映了我的个性、我所研究的数学类型，以及我的工作风格。实际上，数学家们的经验、个性、工作类型和风格可以说是千差万别，你应当遵从你自己的天生爱好。你可以从别人那里学到东西，但应该用你自己的方式来解释你所学到的东西。原创性来自于打破常规，在某种程度上，还来自于过去的实践。

动机

一个数学家做研究，就像一个充满创造力的艺术家一样，必须对所研究的对象极其感兴趣，全神贯注。如果没有强烈的内在动机，你就不可能成功。即使你只是一名数学爱好者，你从解决困难问题中得到的满足感也是巨大的。

研究的头一两年是最为困难的。有那么多东西要学习，甚至有一些小问题你都无法解决，

这样你就会非常怀疑自己证明新定理的能力。在我从事研究的第二年，我顺利度过了这一艰难的时期。塞尔 (Jean-Pierre Serre) 也许是我们这一代数学家中最杰出的一位，就是他也曾经跟我讲过，他在一段时间里认真地想过是否要放弃数学。

只有凡夫俗子才最相信自己的能力。你越是出色，你为自己定的标准就越高——你可以预见那些不在你目前力所能及范围内的更远目标。

许多有可能成为数学家的人也具有从事其他行业的能力与兴趣，他们可能都会面临着非常艰难的选择：是准备成为一名数学家还是做其他的什么职业。据说伟大的高斯就曾在数学和语言学之间来回摇摆，帕斯卡早年为了研究神学曾经放弃数学，而笛卡尔和莱布尼茨同样也是著名的哲学家。一些数学家后来成了物理学家（例如戴森 (Freeman Dyson)），而另一些人正好相反（例如钱德拉 (Harish Chandra)、博特 (Raoul Bott)），他们从物理学家变成了数学家。你不能将数学看成一个封闭的系统，数学与其他学科之间的相互作用不论对个人还是对社会来说都是健康的。

心理方面

由于在数学中需要精神高度集中，由此产生的心理压力是相当大的，即使是在研究比较顺利的时候也是如此。这个问题是大是小主要看你的性格，不过可以采取的措施来降低紧张的情绪。与同学的交流——听讲座、参加讨论班和会议等——都有利于开拓视野和获得很重要的群体支持。过分的孤独与深思可能是比较危险的，有时候表面上看来是散漫的闲谈其实并不是在浪费时间。

一开始的时候，与同学或者导师进行合作研究有许多好处，并且与别人的长时段合作会使人感到特别有信心，无论是在数学方面还是在个人交往方面。当然，个人独自安静的思考总是需要的，不过同朋友们的思想交流与讨论会更有助于这种思考，所以也是不可缺少的。

解决问题还是创建理论

数学家们有时可以被分为“问题解决者”或者“理论创建者”。虽然确实有比较极端的例子显示了这种差别（例如埃尔德什 (Paul Erdős) 与格罗滕迪克 (Alexandre Grothendieck) 就是一对），但是绝大多数的数学家都处于他们中间的某个位置，他们同时在解决问题和发展某个理论。实际上，如果一个理论没有导致具体的有趣问题的解决，那么就不值得去建立它。反过来，对于任何真正意义上的深刻问题，在解决它们的过程中总能刺激相关理论的发展（费马大定理就是一个经典的例子）。

这对一个初学者来说有什么启示？虽然人们不得不去读那些书本和论文，以吸收通常的概念与理论方法，但是实际上初学者必须学会去关注一个或更多个具体的问题。这些问题可以让人深思，可以磨砺人们的勇气。一个经过人们仔细研究和理解透彻的特定问题也是检验一个理论是否有效的非常有价值的试金石。

根据研究过程的不同，最后形成的博士论文可能会抛开绝大多数理论的外衣而聚焦于一些本质上的具体问题，也可能是建立一个较为宽广的理论框架使得具体问题纳入其中。

好奇心的作用

驱使人们进行研究的原始动力就是好奇心。一个特定的结论什么时候成立？那是一个最好的证明抑或还有更自然、更简洁的证明？使得结论成立的最一般的情形是什么？

如果你在阅读论文或在听讲座时，总是问自己这样的问题，那么或早或迟答案会隐约浮现——包括一些可能的探索路径。每当这种情形出现时，我就会抽出时间努力追踪这种想法，看它会引到哪里，或者是否经得起仔细琢磨。尽管通常来说十有八九会进入死胡同，但偶尔一次会发现金子。困难在于我们不知道什么时候该停止，有些起初看起来是有效的想法实际上根本没用。这时就应该果断脱身，回到主要的道路上来。人们常常会犹豫作出这样的决定，事

实上我就是经常回到先前已经丢弃了的想法上来，尝试用另外一种方法来解决问题。

令人想象不到的是，好的想法也会产生于一个不好的讲座或讨论班。在听报告的时候，我经常发现，结果很漂亮，但是证明却很复杂和烦琐。此时我就不会再跟着黑板上的证明，而是在接下来的时间里去构思一个更简洁的证明。虽然这通常来说不太成功，但至少我更好地度过了我的时间，因为我已经用我自己的方式努力地想过这个问题。这远胜过被动地跟随别人的思考。

例子

如果你像我一样，喜欢宏大的和强有力的理论（我虽然受格罗滕迪克的影响，但我不是他的信徒），那么你就必须学会将这些理论运用到简单的例子上，以检验理论的一般性结论。多年以来，我已经构造了一大批这样的例子，它们来自各个分支领域。通过这些例子，我们可以进行具体的计算，有时还能得到详尽的公式，从而帮助我们更好地理解一般性的理论。它们可以让你脚踏实地。非常有意思的是，虽然格罗滕迪克排斥例子，但是很幸运地是他和塞尔有着非常紧密的合作关系，而后者能够弥补他在例子方面的不足。当然在例子与理论之间也没有一条明确的分界线。我喜欢的许多例子都是来自于我早年在经典射影几何中所受到的训练：三次扭曲线、二次曲面或者三维空间中直线的克莱因（Klein）表示等。再没有比这些例子更具体和更经典了，它们不仅都可以同时用代数的方式和几何的方式来进行研究，而且它们每一个都是一大类例子中开头的一个（例子一多慢慢就变成了理论），它们中的每一个都很好地解释了以下这些理论：有理曲线的理论、齐性空间的理论或者格拉斯曼流形（Grassmannians）的理论。

例子的另一个作用是它们可以指向不同的研究方向。一个例子可以用几种不同的方式加以推广，或用来说明几种不同的原理。例如一条经典的二次曲线不仅是一条有理曲线，同时又是一个二次超曲面（quadric），或者是一个格拉斯曼流形等。

当然最重要的是，一个好例子就是一件美丽珍宝。它光彩照人，令人信服。它让人洞察和理解。它是（我们对数学理论）信仰的基石。

证明

我们所受到的教育告诉我们，“证明”是数学中最重要的事情，用公理和命题小心编织起来的欧几里得几何体系提供了自文艺复兴以来现代思想的基本框架。相比于其他自然科学家们做实验的检验方法，数学家们为他们绝对准确无误的定理而感到自豪，更不要说在其他领域里那些模模糊糊的思维方式了。

但是自从哥德尔（Kurt Gödel）（发现不完全性定理）以来，数学的绝对真理地位确实发生了动摇，此外繁复冗长的计算机证明的出现也使数学家们的态度变得更谦卑一些。但是不管怎样，证明还是保持着它在数学中的主要作用，如果在你的论文中，你的证明有一个比较严重的漏洞，那么将直接导致退稿。

然而，如果将数学中的全部研究工作仅仅等同于不断作出各种证明的过程，那么你就错了。实际上人们可以说，数学研究中真正带有创造性的那部分工作在写证明的阶段之前就已经完成了。对于后面这个“证明阶段”，我们可以打一个比方：就好比你是在写剧本，必须要从事先的构想出发，发展情节，写出对话，包括给出舞台指导等。最后形成的剧本就可以看成是“证明”：它是事先构想的具体实现。

在数学中，一般是先有思想和概念，然后再提出问题。接下来就开始对问题解答的探寻，人们寻找某种方法或者策略。一旦你自己相信这是一个恰当的问题，并且你又有对此问题合适的工具，那么你接着就会开始努力思索证明的具体技术细节。

但不久你会意识到（也许是通过反例发现）问题提出的方式不对。有时候，在初始的想法与最终的结论之间有较大的反差。你没有注意到一些隐含的假设，或忽略了某个技术细节，或者

你考虑的情形太一般。然后你不得不回过头来，重新修改提出你的问题。如果有人说数学家们总是控制他们提出的问题，以便他们得到答案，这是不公平的夸大其词，但也不是完全没有道理。能够提出一些既有趣又可以被解决的问题，是数学中一种高超的艺术，数学本身其实就是一种艺术。

证明实际上是创造性想象和不断反思推理之间长期相互作用的最最终结果。如果没有证明，数学的研究是不完整的，反之，如果没有想象，则研究无从谈起。在这里人们可以看到和其他领域中创造性艺术家（例如作家、画家、作曲家或建筑师）工作的一个相似情形。先有一个幻象，然后发展成一个思路，再不断试验展开，最后便是漫长的艺术品总装完成的技术性过程。技术与幻象之间必须保持接触，各自按照自己的方式不断地修正另外一方。

策略

在上一节中，我讨论了对于证明的看法，以及它在整个创造性过程中的作用。现在让我们转向一个对于年轻的数学家们来说最实际的问题。人们应采取什么策略？你怎样做，才能够找到一个证明？

这个问题如果泛泛而谈的话，没有多大意义。就像我在前面说过的那样，每一个好问题都有它的起源：它来自于某个背景，它有自己的根。为了使问题能够得到进展，你必须透彻地理解这些根源。这就是为什么发现你自己的问题、提出你自己的想法总是比你从导师那里得到问题要好的缘故。如果你知道一个问题是从哪里来的，为什么要问这个问题，那么你就已经成功了一半。实际上，问一个正确的问题常常和解决这个问题一样困难。找到正确的问题背景是首要的一步。

因此，简要地说，你需要对这个问题的历史有一个很好的了解。你应当知道解决类似的问题是采用什么方法，以及这些方法的局限性又在哪里。

当你被一个问题完全吸引时，应该立即全力以赴地思考这个问题。为了得到解答，除了全力投入外别无他法。你应当考察特殊的情形，以便确定主要困难出现在什么地方。你对问题的背景和先前的解决方法了解得越多，你能够尝试的技巧与方法也就越多。另一方面，有时候对问题与方法的无知也是一件好事情。曾有报道说李特尔伍德 (J. E. Littlewood) 让他的每一个研究生都分别做一个将黎曼猜想装扮起来的问题，直到他们在六个月之后，才知道了真相。他的理由是学生们不会有自信去直接攻克这么有名的难题，但是如果他们不知道他们的对手是大名鼎鼎的黎曼的话，也许他们会获得进展！尽管这种策略不大可能产生一个黎曼猜想的证明，却能够产生一批生气勃勃、敢于攻坚克难的学生。

我自己的方法是尽量避免直接攻击，努力寻找间接的途径。这是因为，将你的问题与各个不同领域中的思想与方法联系起来，可能会带来令人意想不到的结果。如果这个策略成功的话，它将会导致一个非常漂亮的简单证明，同时也“解释”了为什么事情能够成立的原因。实际上我相信：努力地去寻找这样一种解释和理解，是我们真正应该达到的目标。证明可以看成是这个过程的一部分，有时也是这个过程的结果。

拓展你的视野也是你寻找新方法任务中的一部分。与人交谈会提升你的数学素养水平，并且有时会给你带来新思想和新方法。你很有可能由此而获得关于你自己研究的一个有价值的想法，甚至是一个新的方向。

如果你需要学习一个新的课题，除了学习文献之外，最好是能找到这方面的一个比较友善的专家，“从他的嘴里”获取教益——口头的讲解更简洁明快。

在向前看并经常注意新发展的同时，你也不应该忘记过去。在过去的年代中，有许多非常有价值的数学成果被尘封和遗忘了，它们只有被重新发现的时候才显露出光芒。这些结果不容易被发现，部分原因是因为数学的术语和风格改变了，但是它们确实确实是金矿。如果你遇到这样的金矿，你应该要感到非常幸运，你必须报答那些开拓者。

独立或合作

在开始你的研究之前，你与你导师之间的关系是至关重要的，因此要小心地选择你的导师，包括他所研究的方向、人品以及以往的研究工作等都要考虑。当然很少有导师在这三个方面都令人满意。接下来，如果事情在头一两年进行得并不顺利，或者你的兴趣发生了明显转移，则应该毫不犹豫地调换你的导师，甚至是你的大学。这不会冒犯你的导师，或许也是他的解脱！

有的时候，你可能是比较大的研究小组中的一个成员，并且与其他成员也有交流的机会，所以实际上你有不止一个的导师。这可以提供其他的思想来源，以及另外不同的工作方式，这些都是有帮助的。在这样一些大的群体中，你也可以从你的同学那里学到许多，这就是为什么选择一个包含有大的研究生院的数学系是一个好主意的缘故。

当你一旦完成了你的博士论文后，你的研究就进入了一个新的阶段。尽管你可以继续与你的导师进行合作，并待在原来的研究群体中，但是为了你以后进一步的发展，比较健康的做法是用一年或更多的时间去另外的一个地方。这可以让你接受新思想的影响，并获得更多的机会。现在是这样一个时代：你可以有机会在大千数学世界中为自己找到一个位置。一般来讲，在一个相当长的时间里，继续太紧密地停留在你博士论文的课题上不是一个好的主意。你必须要“另立门派”，以显示你的独立性。这不必在研究的方向上作剧烈的改变，只是应该要有确确实实新颖的地方，而不是你博士论文的简单的常规延续。

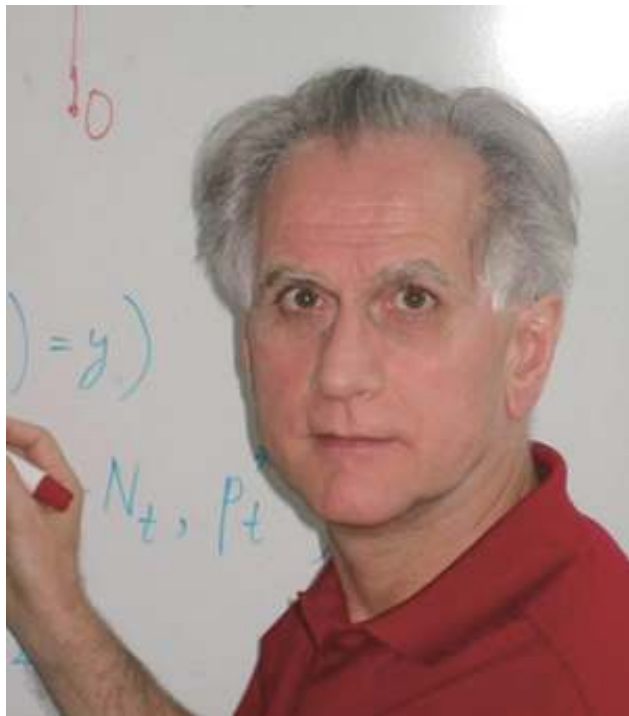
风格

在你写论文的时候，你的导师通常会指导你如何安排文章的结构和呈现的方式。然而在你的数学研究中也非常需要你自己的个人风格。虽然对于各种类型的数学来说，这方面的要求有所不同，但还是有许多方面的要求适用于所有的数学分支学科。以下便是对怎样写出一篇好论文的几点提示。

- (1) 在你开始写作之前，先通盘考虑好整个论文的逻辑结构。
- (2) 将很长的复杂证明分成比较短的中间步骤（如引理、命题等），这会帮助读者阅读。
- (3) 写通顺简明的英语（或者你选择的语言）。请记住数学也是文学的一种表现形式。
- (4) 尽可能地简明扼要，同时又要叙述清楚。要保持这样的平衡是很困难的。
- (5) 尽量将论文写成和你所喜欢阅读的论文一样，并模仿它们的风格。
- (6) 当你已经完成了你论文的主要部分后，回过头来认真地写一篇引言，在其中要清楚地解释论文的结构和主要结果，以及一般的来源背景。要避免不必要的含糊深奥，要面向一般的数学读者，而不只是少数的专家。
- (7) 试着将你的论文初稿让一个同事阅读，并留意任何的建议或评论。如果你最亲近的朋友与合作者都无法理解你的论文，那么你就已经失败了，你需要加倍地努力。
- (8) 如果不是非常急着出版，那么将你的论文丢在一边几个星期，做其他的事情。然后再以一种新鲜的视角重新来阅读你的论文，会有一种全然不同的感觉，你将知道怎样去修改它。
- (9) 如果你相信重写论文会更加清楚、更容易阅读，那么你就不要吝啬将论文重新写一遍，也许站在一个全新的角度看得更清楚。写得好的论文将成为“经典”，被将来的数学家们广泛阅读。

2 比勒·鲍隆巴斯的忠告

比勒·鲍隆巴斯 (Béla Bollobás, 1943-), 匈牙利籍的英国数学家, 英国皇家学会院士, 在泛函分析、组合数学、图论方面做出过杰出贡献。



“在这个世界上, 那些丑陋的数学不可能长久流传。”哈代 (G. H. Hardy) 曾经这样写过, 同样我相信在这个世界上, 那些阴郁的缺乏激情的数学家也是没有什么地位的。仅仅当你真正热衷于数学时, 你才有可能做好它, 即使当你从事另外一种工作, 在忙了一整天之后你也会挤出时间来研究数学。就像诗歌和音乐一样, 数学不是机械的劳作, 而是美好的假日。

品味 (或鉴赏力) 高于一切。对于我们这门学科来说, 对什么是好的数学似乎有比较一致的看法, 这简直是一个奇迹。你应当在重要的分支领域里工作, 这种领域在相当长的时间里不大可能枯竭, 你应该做那些既美丽又重要的问题: 在一个好的领域里, 这样的问题非常多, 而不是仅有那么几个著名的难题。确实来说, 如果把目标定得太高, 将导致在长时间里出不了成果: 虽然在你研究生涯的某个阶段里可以忍受, 但是对于新手来说最好要避免这样。

在你的数学活动中要努力保持一种**平衡**: 对于真正的数学家来说, 研究是放在首要地位的, 但是在研究之外, 还要进行大量的阅读, 以及搞好教学。要充满乐趣地做好各个层面上的数学工作, 即使它 (几乎) 跟你的研究没有任何关系。教学不应该成为负担, 而应该是灵感的来源之一。

研究 绝不应该变成一种零星的杂务 (不像写作那样): 你应该选择你很难不去想它的问题。这就是为什么你专注于吸引自己的问题比你去解决别人交给你的问题要更好的缘故。在你研究生涯的早期, 当你还是一个研究生的时候, 你应该听取你的有经验的导师的意见, 让他来帮助你判断你自己喜欢的问题是否合适, 这比做他给你的问题要好, 因为后者可能不符合你的品味。毕竟, 你的导师对某个问题是否值得你去研究, 应该会有一个比较好的想法, 哪怕是他对你的实力与品味可能还不了解。在你以后的研究生涯中, 当你不再依赖你的导师时, 与一些比较谈得来的同事的交流也常常会受到启发。

我会建议你们: 在任何时候, 你所做的数学问题应该包含以下两种类型:

- (1) “梦想”类的问题: 一个你非常想要解决、但基本上你不可能**期望**解决的大问题。
- (2) 非常值得的问题: 如果花费足够的时间和努力、并且足够幸运的话, 你觉得你很有可能解决的一些问题。

此外, 还有两种你应该考虑的问题, 虽然它们不如前面的那两种问题重要。

- (1) 不时地解决这样一类问题, 它们在你的能力之下, 你完全有自信会很快地解决它们, 使得花在你上面的时间, 不会妨碍你去解决更合适你的问题。
- (2) 在更低的层次上, 去做那些已经不是真正值得去研究的问题 (虽然它们在几年前曾经是这样的问题)

题),总是一件非常愉快的事情,由于这些问题太好了,所以值得花时间:解决他们将给你带来快乐,并锻炼和提升你的创造能力。

要耐心,要坚持。当你考虑一个问题时,也许你能够采取的最有用的措施是,在所有的时间里都把这个问题的放在心上:牛顿就是用这样的方法,其他的许多先人也都是这样。要付出你的时间,尤其是在攻克主要问题的时候,要保证自己在一个大问题上,花费相当数量的时间,但不应期望过多,做完之后,不妨总结一下,然后决定接下来该做什么。在让你的研究不放过一个机会的同时,也应注意不要在一种方法上陷得太深,否则就可能遗漏其他的解决方法。就像埃尔德什曾经说过的那样,要使头脑敏捷,要让你的大脑保持开放的状态。

不要怕犯错误。一个错误对于一名象棋手来说,可能是致命的,但对一个数学家来说,它相当于常规的程序。你应该感到恐惧的是面对一张空白稿纸的时候,此时你对问题的思考还不多。等过了一段时间,你的废纸篓里将装满你尝试失败的稿纸,此时也许你还在勤奋地工作。要尽量避免平庸的尝试,而永远是兴致勃勃地投入工作。特别是,研究一个问题的最简单情形,通常来说不会浪费时间,而且可能是非常有效的方法。

当你在一个问题上花费了相当多的时间之后,很容易低估你所取得的进展,并且还同样会低估你将它们全部回忆起来的能力。最好将它们写下来,哪怕是一小部分的结果:你的笔记会节约你以后的大量时间,会给你带来更多的机会。

如果你足够幸运,并且取得了突破的话,你很自然地会对整个项目感到有些厌倦,并且还想靠此荣誉止步不前。要抵制这种想法,并努力寻找是否还有其他的突破在等待着你。

作为一个年轻的数学家,你的主要优势是你有充足的时间做研究。对此你可能没有意识到,但是以后很可能不大会再有像你开始研究生涯时那样充足的时间了。每个人都感觉到没有足够的时间来研究数学,并且随着时间的推移,这种感觉会越来越强烈,时间肯定会越来越少。

现在转向**阅读**。在谈到所阅读过的数量时,年轻人通常都处于不利的地位,因此作为弥补,应尽可能地多阅读,既包括你的一般领域,也包括作为一个整体的其他数学。在你的研究领域,要确信你读的许多论文是由最好的人写的。虽然这些文章常常写得不太仔细,但是它们所包含的高质量的想法会对你的辛苦阅读给出丰厚的回报。不论你读什么,都要保持一种积极参与和质疑的态度:不断设法理解作者的意图,不断努力思考是否还有更好的处理方法。如果作者走的是你已经知道的思路,那么你应该感到高兴,如果他走的是另一条不同的道路,那你就应该进一步思考其中的缘由。对于各种定理与证明,反复问你自己这样的问题,即使它们看起来非常简单:这些问题将极大地帮助你更好地理解数学。

另一方面,对于一个你正在打算做的未解决问题,通常来说**不必**熟读与此相关的所有东西:但在你很深入地思考过之后,可以(而且应该)去读那些其他人写的不成功的文章。

要保持你对新奇事物的感知与惊讶的能力,要能够欣赏你所读过的数学研究成果和思想,不要对这些杰出的思想和成果感觉到没有什么了不起。事后你当然知道事情一定是这样的,这是很容易的:毕竟你已经刚读完了证明。聪明的人会舍得花大量的时间来汲取新思想。对他们来说,只知道一些定理和看懂它们的证明是远远不够的:他们要把定理及其证明融化在他们的血液里。

在你的数学职业生涯进展过程中,永远让你的心智保持对新思想和新方向的开放状态:数学的疆域总是在变化,如果你不想落在后面,那你就必须也要跟着变化。永远要磨砺你的工具,并且不断学习掌握新的工具。

最重要的是,**喜欢数学和热爱数学**。喜欢你自己的研究,到处寻找和阅读相关的新结果,将你对数学的热爱传递给别人,即使你的创造仅仅是一些美丽的小问题,只要是你思考过的,或者是从你的同事那里听说的,都会带来乐趣。

如果我要总结以上这些我们应该遵循的忠告,以便在科学和艺术中获得成功,那么最好是回忆维特鲁威(Marcus Vitruvius Pollio)在两千年前曾经写下的一句话:

从来不学习的天才,以及没有天才的学习者,都不能成为一个完美的艺术家。

3 阿兰·孔涅的忠告

阿兰·孔涅 (Alain Connes, 1947-), 法国数学家, 在非交换几何学方面的工作对理论和数学物理有重要影响。他是 1982 年菲尔兹奖获得者。



数学是现代科学的支柱, 它是许多新概念与新工具的相当有效的源泉, 借助于这些新概念和新工具, 我们才得以理解置身其中的“现实世界”。这些新概念本身就是人类思维这个蒸馏器经历长期“蒸馏”过程的结果。

我被要求写一些对于年轻数学家的忠告。首先我感到每一位数学家都是一个特殊的案例, 总体来讲数学家们都倾向于成为(喜欢独立的)“费米子”, 即他们尽量避免在太大众化的领域里做研究, 而物理学家们的表现则更像(群居的)“玻色子”, 他们组合成很大的团队, 并经常“过分夸大”他们取得

的结果——这种态度是会被数学家们鄙夷的。

人们一般总是首先将数学划分成一些相互独立的分支学科, 例如几何学、代数学、分析学以及数论等等, 其中, 几何学主要是试图理解“空间”的概念, 代数学主要研究字母符号的操作艺术, 而分析学则主要关注涉及“无穷”与“连续”的对象等等。

但是, 这种看法与数学这门学科的一个最重要的本性相违背, 即把上述那些分支学科中的任何一个在不剥离自身本质的前提下从其余的分支中独立出来是根本不可能的。实际上, 整个数学就像一个完整生命体, 只有在结为一体的情况下才能生存, 如果它被分割成若干不相连的部分, 那么它就会消亡。

数学家们的研究生涯可以被描述成是在“数学的现实世界”王国里的一次探险旅行, 他们用自己的知识架构逐步揭开它的神秘面纱。

这个过程往往开始于对现存书本上关于数学王国的教条描述的不满与反叛。想要成为数学家的年轻人开始意识到, 他们自己关于数学世界的看法已经抓住了数学的某些特征, 而这又与已有的教条不相符合。在大多数的情况下, 这种初期的反叛来源于无知, 但却不无益处, 因为它可以帮助人们从对权威的敬畏中解放出来, 使得他们可以依靠他们的直觉, 并且用实际的证明来支撑他们的直觉。一旦一个数学家以一种原始且“个人化”的方式真正开始进入数学世界的某个小领域, 并且其研究无论初看起来是多么怪异¹, 那么这个探险旅行实际上就已经开始了。当然, 很重要的是不要去打破“阿莉阿尼线团”²: 在始终保持用一种新鲜的眼光看待旅途中遇到的各种问题的同时, 还能够一次次感到迷路的时候回到出发点。

同样重要的是, 一直保持对各种数学的兴趣。否则, 我们就会冒着一种风险, 将自己完全局限于一个已经被高度技术化了的非常狭小的领域里, 从而限制了我们对于巨大的变幻莫测的数学

世界洞察力的发挥。

在这方面最基本的要点是：尽管有许多数学家毕其一生在探索数学世界中各不相同的领域，而且看问题的角度是那样的不同，可是他们都同意他们其实是在研究同一对象的各个不同部分。不管我们各自旅行的出发点在哪里，总有一天，当我们走了足够长的距离后，会发现大家都不约而同地走到了数学王国的同一座著名城堡：例如椭圆函数、模形式或者 zeta 函数等。“条条道路通罗马”，数学世界也是相互连通的。当然这并不是说数学的所有各个部分都是相似的，在这里很值得引用格罗滕迪克（在《收获与播种》一书中）对分析学与代数几何学所作的比较，前者是他最初涉足的研究领域，而对后者的研究则耗尽了之后数学生涯的全部心血：

我仍然记得这种强烈的印象（当然完全是主观的），就好像我自己从贫瘠的荒野转瞬间突然来到了“神所授予的”富饶土地，它们无边无际，你可以尽情地其中探究，施展自己的身手与才华。

大多数的数学家们都很务实地将自己看成是这个“数学世界”的探索者，他们并不是很关心它是否真的存在，他们只是用自己的直觉以及大量的理性思维来揭示这个数学世界的结构。这种直觉离所谓的“理想化的愿望”并不太远（就像法国诗人保罗·瓦莱利（Paul Valéry）所强调的那样），而大量的理性思维则需要高度集中的思考时间。

每一代数学家都构建了反映他们自己对这个数学王国理解的智力图景。他们建造了越来越敏锐的智力工具，这样就能够来开发先前未被发现的各种研究领域。

真正有趣的事情是：在数学王国的各个不同的领域之间找到了意想不到的联系桥梁，这种联系在前辈数学家们的智力图景中还是显得非常模糊和遥远的。而当这种情形产生时，就像突然之间一阵清风吹散了笼罩在我们美丽大地上的迷雾。在我自己的工作中，这种类型的巨大惊喜常来自于与物理学密切相关的数学研究。数学概念很自然地来源于物理学，这已经成为了一个基本共识，就像阿达玛（Jacques Hadamard）所曾经指出的那样。对他来说，他们所展示的

不仅仅是短暂的能让数学家们陶醉的新奇小技巧，而是那种从事物本身涌现出来的真正富饶多产的新颖。

下面我将用一些比较“实用”的忠告来结束这篇短文。只是要注意每一位数学家都是一个“特殊的案例”，不用太在意这些忠告。

散步

当你正在与一个非常复杂的问题搏斗时（常常涉及计算），一个非常明智的练习是出去走一段距离很长的路（不带纸和笔），一边走一边在脑子里做计算，不用担心这初看起来是否“太复杂了，不可能这样做”。即使不成功，也能够训练超人的记忆力并不断完善自己的方法。

躺下

数学家们一般很难向他们的同事解释，他们研究工作最辛苦紧张的时刻竟然是他们在黑暗中躺在沙发上的时候。很不幸的是，随着 e-mail 和电脑屏幕侵入所有的数学研究机构和场所，将自己完全孤立起来、从而集中心思的弥足珍贵的机会就变得十分稀少了。

再勇敢些

在通向新的数学发现的过程中，一般有好几个阶段。尽管处在后面的只需要我们理性与专心的（证明与计算）核查阶段的工作量大得惊人，但相比较而言，位于前面的更加富有创造性的（探索与构思）阶段则完全不同。在某种程度上，这个探索阶段还需要一种你對自己无知的保护意识，因为总是有千万个理由叫我们不要盯在那些其他许多数学家们都没有解决的问题上。

挫折

在数学家们的研究生涯中，包括很早的时期，他们会不断收到来自竞争者们的论文预印本，这时他们会因为落后而感到倍受打击。在这里我所能给出的建议是，应当努力将这种挫败感转化为鼓励你更加勤奋工作的前进的动力。然而这做起来并不容易。

怀有妒忌的认可

我的一个同事曾经说：“我们（数学家）的工作，说到底就是为了得到几个朋友的怀有妒忌的认可。”确实，由于我们的研究工作本质上讲还是相当冷僻孤立的，所以不幸地是我们总是以各种方式极度渴求这种认同感，可是坦率讲我们不应该期望过高。实际上，真正的判断来自于自己。没有人能比自己更明白自己所做的工作究竟是什么，过分地在乎别人的看法是在浪费时间：因为迄今为止还没有一个定理是通过选举的方式获得证明的。就像费曼（Richard Feynman）曾经说过的那样，“你为什么要在乎别人怎么想？”

（本节脚注）

- 1 我自己最初的出发点是研究多项式根的分布问题。幸运地是我在很小年纪就被邀请参加在西雅图举行的一次会议，在那里我受到引导，后来我所有的在因子理论方面的工作都起源于此。
- 2 阿莉阿尼是古希腊传说中的克里特国王弥诺斯的长女。国王养了一头怪物，每年要吃七对童男童女。雅典王子忒修斯决心到岛上的迷宫里除掉怪物。在进迷宫前，他偶遇阿莉阿尼公主，公主爱上了他，交给他一个线团，让他将一端放在迷宫外，一端拿在手中，以免迷路。忒修斯杀死怪物后顺线走出迷宫。

4 杜萨·麦克杜夫的忠告

杜萨·麦克杜夫（Dusa McDuff, 1945-），英国数学家，英国皇家学会院士，在辛几何方面做出了杰出贡献。图右是其丈夫菲尔兹奖和沃尔夫奖得主美国数学家约翰·米尔诺（John Milnor, 1931-）。



我是以一种与我的同龄人很不相同的方式开始我的成年生活的。我总是被教导说要有一份独立的职业，我的家庭与学校也非常鼓励我成为一名数学家。与通常学校不同，我所上的女子学校有一位非常杰出的数学教师，他让我领略了欧几里得几何与微积分的美好。相比之下，我对教科学的老师就没有好感，并且由于大学里的科学教师也不是太好，以至于我从来就没有学到任何真正的物理学。

就是在这种很有限的条件下，我变得非常想成为一名专门进行研究的数学家。在某些方面我非常自信的同时，在另外一些方面我又感到十分的欠缺。我所面临的一个基本问题是，有时会莫名地感受到这样一种说法的影响：女性在学术职业上属于二等公民，因此是可以被忽略的。我从来没有女性的朋友，从来没有真正地评估过我自己的智力状况，可能还是和其他女性一样属于比较琐碎和实际的那种，并且不像男人那样真正具有创造力。社会上对于这种情况有许多的说法：妇女们待在家里烧火做饭，而男人们则外出闯世界，妇女可能会冥想，但不会成为诗人，妇女不具有成为一名数学家所需要的真正的灵魂等等。对此还有许多其他的说法。最近在我的一些女性朋友中流传着一封有趣的信件，它列出了各种不同科学领域中一些常见的互相矛盾的偏见，所得出的结论是，女性被认为不论做什么最有价值的事情，都是做不好的。

我不久又遇到的另一个明显问题是，我在只学了非常少的数学的情况下，就要着手完成我的博士论文。我的题目是有关冯·诺依曼 (von Neumann) 代数，这是一个狭小的题目，与其他我真正了解的事情没有任何联系。在那个领域里我看不到前进的方向，并且我几乎对其他领域也一无所知。当我在研究生的最后一年到达莫斯科时，盖尔范德 (Israel Gelfand) 给了我一篇论文，是关于流形上向量场的李代数的上同调的，我不知道什么是上同调，什么是流形，什么是向量场，以及什么是李代数。

尽管这种无知部分地是由于一种过分专门化的教育体系所造成的，但这也是我与更广泛数学世界缺少联系的结果。我曾经用基本上将自己的女性角色与数学家的角色分离开来担当的方式，解决了将两者调和起来的问题。我从莫斯科回来后，我的这种数学上的孤独感愈发强烈。在我从泛函分析转向拓朴学的过程中，几乎没有任何指导，并且因为害怕暴露自己的无知而极少提问。此外，当我做博士后时有了孩子，因此整天忙于应付各种琐碎事务。在这一阶段，由于对研究数学的过程还缺乏理解，我主要是靠阅读来进行学习，没有意识到学会提出问题的基本作用，哪怕是提出自己的也许是比较幼稚的想法。我对自己今后的职业规划也同样没有想法。天上不会掉馅饼：你必须去申请研究职位和工作，并且不断地寻找有兴趣的会议。如果能得到一位良师益友的帮助，那就更好了，他能够对你如何克服所有这些困难给出更好的建议。

对我来说，可能最重要的是学会怎样去提出比较好的数学问题。作为一个学生，你的任务就是：不仅要学习足够多的东西，以便能回答别人提出的问题，而且还要学习怎样去构造一个问题，以便能走向有趣的研究方向。在研究新的东西时，我经常习惯于从中间出发，运用一些别人已经发展起来的复杂理论。不过经常从最简单的问题和例子出发也能够获得进展，这是因为它们能使你更容易地理解基本问题，从而可能发现一条新的途径。例如在辛几何中，我总是很喜欢运用格罗莫夫 (Mikhail Gromov) 的非挤压 (nonsqueezing) 定理，它对如何以辛方式控制一个球体给出了限制条件。这个非常基本的几何结果在某种程度上与我产生了共鸣，并由此形成了开始探索的一个牢固的基础。

最近以来，人们越来越感觉到数学是一种依靠群体努力进行建设的学科：即使是最杰出的思想，如果它脱离了与数学整体的联系，也会失去意义。通常来说，一旦你理解了这种与整体的联系，再进行自我独立的研究工作就会变得非常重要和富有成果了。当然，在学习的同时，与别人的联系互动也是必不可少的。

有许多方法可以成功地建立起这样的交流渠道，例如改变建筑物的结构、会议和会场的安排、数学系里教学研究计划的调整以及改进相对来讲不那么正式的讨论班与讲座的气氛等。有时候在讨论班上，一个新手数学家不是昏昏欲睡和看上去比较厌烦，而是积极地提问，使问

题得到澄清,并且使参加讨论的每一个人都获益,此时我们会惊喜地发现讨论班上的气氛改变了。人们(不管是年轻的还是年长的)通常都因为害怕暴露自己的无知、缺乏想象力和其他固有的缺点而导致沉默。但是在像数学这样看上去既困难又美丽的学科中,其实每一个人都需要从别人那里学到一些东西。现在有许多很好的小型会议和研究班,它们是这样组织的:既容易让人们学习讨论某些已有的理论的细节,又能够对新的方向和新的问题展开讨论和进一步的研究。

怎样将女性角色与数学家角色调和统一起来的问题依然困扰着我,虽然数学是一门本质上不适合女性的学科的观点已经不那么普遍流行了。我不认为我们女性应该尽可能多地出现在数学世界中,只要有足够数量的女数学家,并且不再作为例外而被忽视就可以了。我发现主要由女数学家参加的会议并不理想;满屋子全部都是女性,她们正在谈论着数学,这种气氛比较怪异。同样,人们也越来越能够理解,真正的问题是在于任何一个年轻人将怎样既能够过好一个令人满意的个人生活,同时又成为一个有创造力的数学家。只要人们开始以一种严肃的方式认真地对待这个问题,并且努力地工作,我们将真正地拥有一个长远的数学人生。

5 彼得·萨纳克的忠告

彼得·萨纳克(Peter Sarnak, 1953-), 美国数学家, 英国皇家学会院士, 美国科学院院士, 专长数论, 是最顶级数学期刊 *Annals of Mathematics* 的前任主编。



多年来我已经指导了不少博士研究生,这也许使我有资格以一个有经验导师的身份来写一些忠告。每当我遇到一个出色的学生(我非常幸运我能够有这样的一些学生),我所能给出的指导仅仅是告诉他,比如可以在某个区域内挖出黄金,或者给出一些含糊不清的建议。一旦他们行动起来,发挥其智慧与才能,结果他们没有发现黄金,但却找到了钻石(当然事后我忍不住会说“我告诉过你会这样”)。在这种情况下,和大多数的情形一样,一个讨论班导师的作用就更像一个教练:

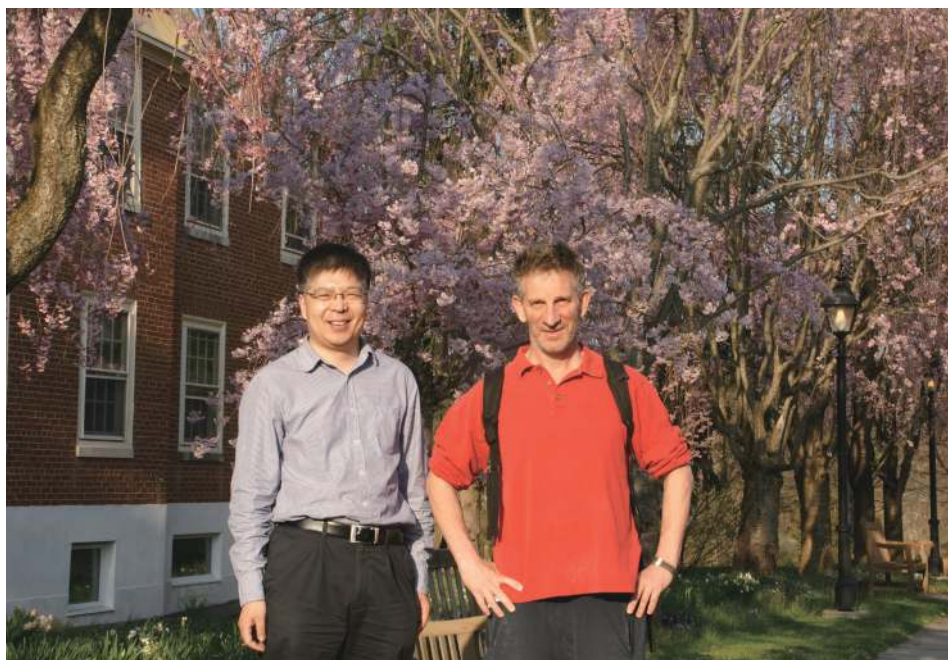
只是不断加以鼓励，并确信所指导的学生正在做的是一些有意思的问题，且清楚其可以采用的工具是什么。这么多年下来，我发现自己经常重复说的某些评论与建议对于学生来说还是很有用的。以下所列是其中的一部分。

(1) 当我们学习一个新领域的知识时，我们应该将阅读现代论述与钻研原始论文结合起来，尤其是该领域开创大师的论文。很多学科的现代叙述所产生的主要麻烦是它们太完美了。随着每一个（数学专著与教科书的）新作者都不断地发现和加入更巧妙的证明处理方法，最后形成的理论体系总是倾向于采用“最简短的证明”。很不幸的是，这种形式化的表述经常引起新一代学生们的极大困惑：“人们是怎样想出来的？”通过回到原始的出发点，学生通常就能够看到概念与理论的演变十分自然，并且理解它们是怎样一步步变成现代形式的理论的。（当然面对着那些天才的数学家们所具有的令人意想不到的杰出思想，我们只能感到惊叹不已，但是这种情况要比起你想象的少得多。）我想举一个例子，紧李群表示论有许多现代的表述，我在讲解其中的一种时，通常会推荐学生去阅读外尔（Hermann Weyl）的原始论文，看他是如何推导出他的特征标公式的。类似地，我会向已经了解复分析并且想要进一步学习黎曼面现代理论的学生，推荐他写的书《黎曼面的概念》，而黎曼面对于现代数学的许多领域来说具有最基本的重要性。研究和阅读像外尔这样的大数学家的论文选集同样也是十分富有教益的。在学习他们的定理的同时，我们可以发现他们的心智是如何运作的。从一篇论文到下一篇之间，基本上总是有一条线在自然地引导，而且容易看出某些后来的研究发展也是不可避免的。这一切都非常具有启发性。

(2) 另一方面，你应当对一些教条和“标准猜想”敢于质疑，即使它们来自于某些大人物。许多标准猜想都是基于一些人们所能够理解的特殊情形作出的。除此之外，剩下的基本上只有人们多少有些一厢情愿的想法：人们很期望一般的图景不会和特殊情形所建议的图景相差太远。我知道几个这样的研究事例，在其中一开始的时候，人们都是先着手证明一个被认为普遍成立的结论，但是没有取得任何进展，直到最后人们才认真地反思它是否真的成立。在说了以上这些后，我也感到，如果不是出于特别好的理由，随便地去怀疑某个特定的猜想（例如黎曼猜想）及其可证性，的确有些不妥。虽然作为科学家的我们，肯定是应该采取一种批判性的态度（特别是针对一些我们数学家所发明的人造对象），但在心理上同样重要的是，我们要相信我们的“数学世界”的存在性，对什么能成立以及什么能被证明抱有信心。

(3) 不要将“初等”混同于“容易”：一个证明可以确定是初等的，但却不是容易的。实际上，存在着许多这样的定理：只要用一点点（现代数学的）高端方法就可以使定理的证明变得非常容易理解，并显示蕴涵于其中的思想，相反如果避免使用高端的概念与方法，而只是用初等的方法来证明，则会掩盖定理背后的思想内涵。另一方面，也要注意不要将高端等同于高质量，或者等同于“高级证明”（这是一个我很喜欢用的字眼，它会引起许多我以前学生们的哄笑）。在年轻的数学家们中间确实有一种（盲目）使用新奇的高端数学语言的倾向，以显示他们正在做的工作比较深刻。然而，只有真正理解了现代工具，并且与新的思想相结合，现代的工具才能发挥作用。那些在某些领域（例如数论）工作的人，如果不花时间和实质性的努力去学习掌握这些工具，就会使他们处于非常不利的境地。拒绝学习和掌握这些新工具，就好像只用凿子来拆一座建筑物。即使你使用凿子非常熟练，别人用推土机也比你有巨大的优越性，并且用不着掌握像你那样（使用凿子）的技巧。

(4) 在数学中做研究会让人感到受挫，如果你还不习惯于遭受挫折，那么数学就不是你的理想选择。在绝大多数的时间里，你是没有任何进展的，如果不是这样，则要么你是一个天才，要么就是你所遇到的问题属于在开始研究之前你已经知道怎样解决的那种。尽管一些后续的研究



2010年萨纳克与本刊主编之一在普林斯顿高等研究院（任秀敏 摄）

工作也会有相当的（发展）空间，并且达到较高的水准，但是一般来说绝大多数的重大突破都是用艰苦的工作换来的，伴随着许多错误的步骤，长时间里只有微小的进展，甚至还有倒退。有一些方法可以减轻这种痛苦。如今许多人采用合作研究的方式，这种方法除了有让不同专长的人一起攻关的明显优点外，还能让人们来共同承受失败。这对绝大多数的人们来说肯定是有好处的（至少迄今为止，在数学中分享重大突破所带来的喜悦和荣誉还没有像某些学科那样导致许多严重的名次争议）。我经常劝我的学生在任何可用的时间里，手上要同时有一连串待研究的问题。其中，就是挑战最小的问题也应该有足够的难度，难到解决它以后会给你带来相当的满足感（不然又有什么意思呢？），并且幸运的话可能带动其他问题的解决。这样，你应该考虑一连串更具有挑战性的问题，其中最难的问题就是（该领域）最关注的未解决问题。你应该不时地考虑去攻克它们，从各种不同的视角来审视它们。很重要的是你要敢于让自己去解决非常困难的问题，不然就没有成功的可能性，也许幸运的话，你会从中获取许多。

（5）每周听系里的各种学术报告，并且希望报告的组织者能够挑选好的报告人。在数学中有比较广博的知识是很重要的。在学习了解其他分支领域里的人们解决有趣问题的进展时，或当你听到演讲者在谈论相当不同的研究时，你的心灵会经常受到某些思想的触动。同样，你也可能学到一种方法或理论，或许可以用到你正在做的其中一个问题上。在最近的一段时期里，有好几个长期未能解决的重大问题获得了最令人惊讶的突破，解决它们的方法都是来自于一些不同的数学分支领域思想的意想不到的组合。



译者简介：陈跃，复旦大学数学系77级本科毕业，上海师范大学应用数学硕士，现任上海师范大学数学系副教授，主要研究代数几何的历史，写有《扎里斯基与代数几何的抽象化》等文章。