



哥廷根数学的人和事

王涛

哥廷根数学学派的兴起堪称是数学史上最为璀璨的篇章之一，在 20 世纪的前 30 年里，哥廷根这座不起眼的小城绝对是世界数学的中心，被誉为数学圣地，有数学的“麦加”之称。伟大的数学传统、浓厚的学术氛围使每一个数学家陶醉，而哥廷根数学的人和事更是一道靓丽的风景线。

哥廷根数学的伟大传统，为高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）首创。其继任者都是德国最有声望的数学家，如狄利克雷（P. G. L. Dirichlet, 1805-1859）和黎曼（G. F. B. Riemann, 1826-1866）。虽然他们推进了高斯的事业，但和高斯一样，他们都未能给哥廷根带来黄金岁月。不仅如此，1866 年，随着 19 世纪最富独创性的数学家黎曼的去世，哥廷根大学的数学进入了一段相对比较困难的时期。而与此同时，德国几乎所有的大学——莱比锡、哥尼斯堡、埃尔朗根、波恩——都有知名的数学教授。在克莱因（F. Klein, 1849-1925）1886 年到达哥廷根大学之前，哥廷根大学并不具有优势，数学教授席位一度空缺甚至找不到合适的替代者，这与当时柏林大学数学人才济济、兴旺发达的局面形成了鲜明的对比。



哥廷根数学传统的缔造者、被誉为数学王子的高斯（1777-1855）



高斯的继任者——狄利克雷（1805-1859），他曾先后在柏林大学和哥廷根大学任教授



亚历山大·冯·洪堡（1769-1859）

柏林大学数学的兴起

19 世纪中叶的德意志远不是一个统一的国家，而是分为大大小小的邦国。哥廷根位于汉诺威王国内，柏林位于普鲁士王国内。其中普鲁士柏林大学的兴起绝对值得一提。

1806 年第四次反法同盟失败，作为同盟国之一的普鲁士几乎全军覆没，不久，柏林也陷落。拿破仑残忍地对待了普鲁士，这使得普鲁士发誓要报仇。施泰因、哈登堡、洪堡从政治、经济、军事和教育各个方面对普鲁士进行了改革，



狄利克雷的继任者、高斯的得意弟子黎曼（1826-1866），曾跟随狄利克雷在柏林学习过一段时间

其中教育改革是重中之重。1809 年，出生于波茨坦贵族家庭的威廉·冯·洪堡（Wilhelm von Humboldt, 1767-1835）出任普鲁士教育文化部部长，掌管普鲁士所有的教育文化事务，在短暂的任期内，洪堡改革了普鲁士引以为傲的教育制度。洪堡建立了新的教育制度，设初等教育、中等教育和高等教育三个层次；采用新的教学法，规定只有受过训练的合格教师才能任教。不少德国顶级数学家都曾在中学任教，包括晚年被视为德意志民族英雄的魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass, 1815-1897），当时很多成果都需要他拍板才能获得认可，比如 1882 年林德曼（C. L. F. Lindemann, 1852-1939）证明 π 的超越性。

洪堡的教育改革得到了普鲁士国王威廉三世的支持，威廉三世不仅接受了洪堡的建议，甚至不惜将豪华的王宫——海因利希宫贡献出来作校舍，筹建一所重点大学。就这样，一所以国王的名字——弗里德里希·威廉命名的大学成立了，这就是现在著名的柏林大学。国王威廉三世甚至用自己的家底每年为柏林大学拨款 15 万塔勒。当时他给教授们说道：“这个国家必须用它精神上的力量来弥补它物质上的损失，……，教育不仅不会使国家贫穷，相反教育是摆脱贫困的最好手段！”

由于洪堡巨大的贡献，柏林大学也被称为“洪堡大学”。

在柏林大学的创办和发展过程中，亚历山大·冯·洪堡（Alexander von Humboldt, 1769-1859）发挥了重要的作用。亚历山大·冯·洪堡是威廉·冯·洪堡的弟弟，著名的自然科



柏林三巨头。从左至右：魏尔斯特拉斯（1815-1897）是柏林学派的领袖，在德国享有巨大的威望；克罗内克的老师库默尔（1810-1893）；直觉主义的先驱——克罗内克（1823-1891）

学家和探险家。他是世界上第一个大学地理系——柏林大学地理系的首任系主任。亚历山大·冯·洪堡非常喜欢数学，对德国数学界的影响很大。比如，1826年他曾给年轻的狄利克雷写过推荐信，推荐他到柏林大学任职；帮助雅克比（C. G. J. Jacobi, 1804-1851）争取过津贴，还与克罗内克（L. Kronecker, 1823-1891）熟识；此外，他还帮助过高斯、史坦纳（Steinner, 1796-1863）和库默尔（E. E. Kummer, 1810-1893）任教授等职位。为了纪念这位伟大的科学家，柏林大学于1860年设立了著名的洪堡基金。得到资助的学者一般被称为洪堡学者，我国有不少学者都曾得到过洪堡基金的资助。

这比哥廷根大学创办晚75年的柏林大学赋予了大学以新的含义——学术研究。大学的意义不仅在于教学，还在于科学研究，探求真理，这就是柏林大学的理念，这一理念代表着新型大学的发展方向。与纯粹由普鲁士人建立的新型研究型大学相比，由英国人建立的哥廷根大学似乎更注重绅士教育，这点在高斯身上体现得淋漓尽致。但不管怎么说，19世纪30年代柏林大学正式有了数学系，狄利克雷被聘为柏林大学的教授。

哥廷根数学的阵痛

柏林大学的兴起是普鲁士整个国家兴旺发达的一个缩影。普鲁士逐渐地强大起来并试图完成时代赋予它的使命——结束德国分裂的局面。从哥廷根大学毕业的普鲁士首相俾斯麦开始了德意志铁与血的统一。1866年，也就是黎曼去世的那一年，普奥战争爆发并以《布拉格和约》而告终，战时协助奥地利的汉诺威被普鲁士吞并，哥廷根大学的地位一落千丈。而与之相反，柏林则从普鲁士这个邦国的首都一跃成为北德意志联邦的首都，5年之后，柏林又成为整个德意志联邦的首都，柏林大学的地位得到了极大的提升。有一件事能反映出柏林对于哥廷根的数学优势，黎曼去世后哥廷



哥廷根辉煌的缔造者——克莱因（1849-1925）



哥廷根辉煌的缔造者——希尔伯特（1862-1943）

根曾试图聘请柏林大学的克罗内克，但克罗内克婉言谢绝了，原因是柏林的学习、工作、生活环境使克罗内克感到满意。其实不仅如此，柏林大学的数学在魏尔斯特拉斯、库默尔和克罗内克的领导下已经发展到一个相当的层次，在函数论、数论、几何基础方向都有很强的实力，并且形成了一个学派，这就是数学史上著名的柏林学派。

但阵痛过后哥廷根终于迎来了自己的辉煌，这一辉煌缔造出一个新的学派——哥廷根学派。到19世纪末期，

随着柏林三巨头的去世，柏林大学的优势逐渐丧失，到 20 世纪初，局势已经完全逆转过来了。1902 年，随着富克斯(I. L. Fuchs, 1833-1902) 的去世，柏林大学试图聘请哥廷根的希尔伯特(D. Hilbert, 1862-1943) 来继任这个位置，希尔伯特不仅拒绝了这一任命，相反他还建议克莱因要求德意志教育文化部部长阿尔道夫(F. Althoff, 1839-1908) 在哥廷根增设一个数学教授席位，并且聘请他的好友闵科夫斯基(H. Minkowski, 1864-1909) 来担任这个位置，这一建议也被阿尔道夫采纳。克莱因与阿尔道夫相识于普法战争(1870-1871 年)，他们彼此非常尊重对方。由于这层关系的存在，阿尔道夫非常支持哥廷根数学的发展，这样到了 1902 年，哥廷根在数学教授的数量上也赶上和超过了柏林大学，由此哥廷根数学开始了真正意义上的黄金时代。

在多数描写哥廷根数学的资料中，过多的笔墨留在了高斯、狄利克雷、黎曼、克莱因和希尔伯特那里。然而黎曼 1866 年去世之后的继任者是谁？在克莱因 1886 年到哥廷根任教授之前，哥廷根的数学又是如何发展的呢？

黎曼的继任者——克莱布什

克莱布什(A. Clebsch, 1833-1872) 生于东普鲁士的哥尼斯堡，1850 年入哥尼斯堡大学，深受两位老师黑塞(Hesse) 和里奇劳特(F. Richelot) 的影响，他们都是雅克比的学生。实际上，克莱布什从未与雅克比谋面，因为雅克比在他入学后第二年(1851 年) 就去世了，但克莱



克莱布什(1833-1872)

布什通过收集雅克比的全集而受到了雅克比的影响。1854 年克莱布什到柏林深造。1858 年到 1863 年在卡尔斯鲁厄(Karlsruhe) 任理论力学教授，其后又在吉森(Giessen) 任数学教授。1868 年克莱布什移居哥廷根，成为黎曼的继任者。同年，他与纽曼(C. G. Neumann, 1832-1925) 一起创办了一份重要的数学杂志《数学年刊》(*Mathematische Annalen*)，这是一份非常有影响的杂志，希尔伯特从 1902 年起一直担任该刊的主编。

克莱布什早期工作的兴趣在数学物理方面，他对变分法和微分方程也有研究，但克莱布什最主要的工作是代数几何。代数几何是 19 世纪最伟大的数学创造之一，100 多年来已发展成为数学的核心部分，它与所有数学分支都有着密不可分的联系并推动着它们的发展。代数几何学的研究对象是由多项式方程或方程组所定义的代数簇。代数簇的特殊情形是代数曲线和代数曲面。

克莱布什研究的主要是复数域上的代数曲线和代数曲面。代数几何的中心问题是分类，19 世纪中叶代数曲线的分类由黎曼所奠定，并由克莱布什继承。为了对曲线进行分类，克莱布什首次引入连通、亏格等概念，证明了一系列有关定理。克莱布什明确指出，代数几何学研究双有理变换及其不变量，而他本人正是以这种观点研究代数曲线和代数曲面的。

克莱布什开创了德国的代数几何学派，他和黎曼被称为是经典代数几何的奠基人。他的学生布瑞尔(A. W. V. Brill, 1842-1935) 和 M. 诺特(M. Noether, 1844-1921) 继承发展了克莱布什的思想，他们都是当时著名的代数几何学家。而 M. 诺特正是数学史上最伟大的女数学家 E. 诺特(E. Noether, 1855-1935) 的父亲，后来 E. 诺特来到了哥廷根，在哥廷根数学的发展中发挥了不可估量的作用。像 M. 诺特和 E. 诺特这样父女同为杰出数学家的组合在数学史上似乎并不多见。

然而自高斯去世之后，哥廷根大学的数学教授似乎中了一个魔咒：其继任者都没能在这个职位上干多长时间。狄利克雷在这个位置上只待了 4 年就去世了。而其继任者黎曼在担任这个职位 3 年后感染了胸膜炎，后期一直在意大利养病。作为黎曼的继任者，克莱布什也没能幸免，在他任教授 4 年后由于患白喉病而去世。

数学教授的频繁更迭对哥廷根数学的发展相当不利。

把自己置于危险境地——富克斯

克莱布什的继任者是富克斯，富克斯于 1874 年来到哥廷根。然而富克斯来到哥廷根大学不到一年，便接受了海德堡大学的任命而离去，这又从侧面说明了哥廷根当时甚至与海德堡相比也没有多大的优势，在康斯坦丝·瑞德《希尔伯



微分方程的代名词——富克斯（1833-1902）

特——数学世界的亚历山大》（李文林、袁向东译）中对海德堡大学给予了如下评述：

海德堡大学是德国所有大学中最讨人喜欢和最富有浪漫色彩的学校。

当时的德国大学之间人才可以自由流动，学生可以在第二个学期转到别的学校听课。比较碰巧的是，希尔伯特于1881年到海德堡大学听课，富克斯刚好在那里任教。富克斯的授课方式与众不同，给希尔伯特留下了很深的印象。富克斯课前一般不做准备，对要讲解的内容总是现讲现推，习惯于在课堂上把自己“置于危险的境地”。这确实是一个难得的机会，可以看到一位数学家的思维过程。不可否认这对希尔伯特有很大影响，以致于后来希尔伯特在哥廷根授课前也只做一般的准备，课上有细节错误更是常事，然而这更有助于他忽然展开对某个事实的想法。这点与克莱因追求尽善尽美大不相同，克莱因总是比学生们提前到，以检查他可能疏漏的地方而加以改正。当然他们的报告都是经典。

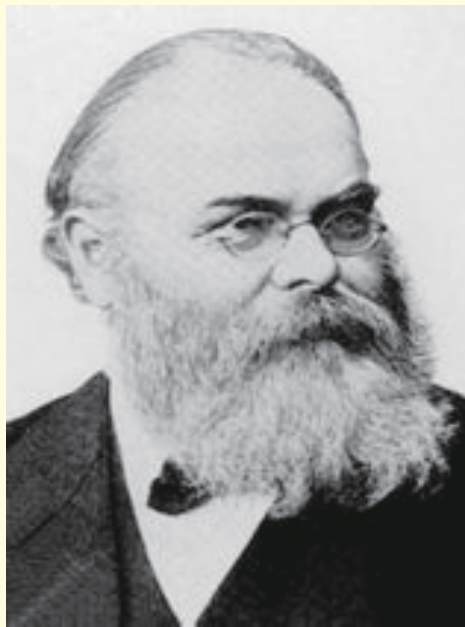
富克斯主要从事的是微分方程方面的研究，他在微分方程方面的巨大贡献使得他成为微分方程的代名词。富克斯在常微分方程的理论方面，做出了重要贡献。他利用超几何级数解线性微分方程，1866年富克斯在他的一篇论文中指出，在奇点邻域内的解可以用级数表出，研究这一问题的理论被称为线性微分方程的富克斯理论。这一理论直接指向了庞加莱（J. H. Poincaré, 1854-1912）的自守函数理论，另一方面通过克莱因与椭圆函数论相结合，并间接地引起了庞加莱与克莱因的竞争。这些问题成为19世纪70-80年代许多

数学家研究的主要课题，而且在微分方程理论本身中也扮演着重要的角色。自守函数中有一类重要的函数称为富克斯函数。这类函数在一种线性变换的作用下是不变的，这些变换可以形成一个群，叫做富克斯群，这都说明富克斯在线性常微分方程方面有着巨大的贡献。

富克斯的继任者——施瓦茨（1875-1892）

1875年富克斯离任之后，哥廷根终于迎来了一位在哥廷根任职超过10年以上的数学教授——施瓦茨（H. A. Schwarz, 1843-1921），施瓦茨对哥廷根有相当的影响。施瓦茨到哥廷根后，根据他的报告内容制定了一份详尽的计划：首先，介绍微分与积分周期覆盖、解析几何、二阶曲面、双曲率曲面和综合几何等初等内容。然后介绍解析函数周期覆盖、椭圆函数、极小曲面、超几何级数以及函数论等其他领域。在数学系教授斯特恩（M. A. Stern, 1807-1894）的支持下，1878年数学物理研讨会率先建立一个流动图书馆，这个图书馆一直在施瓦茨的管理下，直到他离开哥廷根。随着乌尔里希（G. K. J. Ulrich, 1798-1879）的去世，他又接管了数学工具和模型室。现在我们能到哥廷根数学研究所第三层走廊的模型室里看到多达500多件的模型。

施瓦茨的数学成就，主要体现在三个方面，分别是分析学、微分方程和几何学。施瓦茨深受其老师魏尔斯特拉斯的影响，对函数论情有独钟。特别是在微分方程方面，施瓦茨在研究二阶线性微分方程的解的结构时，引入了一类线性变换群，这一工作为自守函数研究创造了条件。



施瓦茨（1843-1921）



H. 韦伯 (1842-1913)

短暂的继任者——韦伯 (1892-1895)

H. 韦伯 (H. Weber, 1842-1913) 出生于海德堡, 1863 年获得海德堡大学博士学位。毕业后韦伯在一系列学校任职, 他曾在哥尼斯堡大学任教授。哥尼斯堡大学的数学因雅克比而闻名, 从数学史来看, 雅克比的名声至少要比现在高得多, 他被誉为他那个时代仅次于高斯的数学家, 这也不难理解法国天才数学家伽罗瓦 (E. Galois, 1811-1832) 在临死前一再要求请高斯和雅克比就他研究问题的重要性公开发表看法。雅克比在数学史上保持着几项记录, 他是数学史上最为努力的数学家; 此外, 数学讨论班制度也是由他创造的。讨论班是德国数学教育和科研的一大创造, 在德国数学的兴起中扮演着极为重要的角色, 直到今天它仍是数学教学和科研的不二法门, 世界各地也经常定期或者不定期举办各种著名的数学讨论班。

韦伯天赋极高, 多才多艺, 在数论和数学物理方面都作出过重要的贡献, 算得上是雅克比的传人。而年轻的希尔伯特在哥尼斯堡大学学习期间, 曾跟随他学习过数论和函数论。巧合的是, 当 1895 年韦伯离任去斯特拉斯堡大学任职时, 接替他的正是希尔伯特。

韦伯是第一个给出群抽象定义的数学家, 在群论抽象化的过程中起着举足轻重的作用。他最著名的论著是《代数学教程》(Lehrbuch der Algebra), 《代数学教程》在很长的一段时间里被当做了教材。

哥廷根的其他教师

蒂博 (B. F. Thibaut, 1775-1832), 1797 年任哥廷根讲师, 1805 年任教授。高斯一生厌恶教学, 没有多少学生,



哥廷根数学研究所第三层的数学模型

也没有人愿意选他的课, 而蒂博则与高斯形成了鲜明对比, 他被誉为哥廷根最好的授课老师, 其修辞风格甚至可以和歌德相比。蒂博的主要研究领域为微分方程和积分学。他于 1832 年将一批测地工具和模型捐赠给了学校, 到 1865 年这些工具和模型被专门放在一个展厅里。这一展厅由乌尔里希负责, 经过施瓦茨和希尔伯特的经营, 特别是克莱因, 他甚至为模型室拉到了赞助, 从而使模型室获得了稳定的资金支持。这就是现在哥廷根数学所第三层走廊里的模型的历史源头。可以想象, 这些模型在当年的几何教学乃至科研中发挥了多么重要的作用, 如今在 Mathematica 和 Maple 等数学软件问世后, 这些模型更多的是一种对历史的承载。

斯特恩, 1848 年成为全职教授, 这一年开始, 哥廷根拥有了两个数学教授席位。此外, 斯特恩还是德意志第一个犹太教授, 最早注意到了黎曼的天赋, 曾协助高斯培养黎曼, 克莱因继任的正是他的位置。严格地说, 克莱因并不属于高斯、狄利克雷和黎曼这一教授席位的继承人 (见结尾附录)。

乌尔里希, 数学物理讨论班的主要参与者之一, 哥廷根大学数学工具和模型室的主要负责人, 主要研究领域为立体几何、三角学、应用几何、力学和土木建筑。

利斯亨 (J. B. Listing, 1808-1882), 1834 年博士毕业于哥廷根, 其导师为高斯。1837 年, W. 韦伯 (W. E. Weber, 1804-1891, 注意与之前的 H. 韦伯不是同一个人) 由于参与了七君子事件而被解职, 因此高斯建议利斯亨继任这一职位 (物理系的职位), 尽管当时他没有发表过一篇文章。在高斯的影响下, 他于 1848 年出版了《拓扑学初步研究》(Vorstudien zur Topologie), 这是首次在出版物中用到“拓扑”这个词, 尽管在之前的信件中已出现过类似的词汇。长久以来, 这门学科更多被称为位置分析 (Analysis Situs), 直到 20 世纪 20 年代美国数学家莱夫谢兹 (S. Lefschetz, 1884-1972) 使用了拓扑学 (Topology)



莫比乌斯带最早是由利斯亭于 1861 年发现的，4 年后莫比乌斯才对此作了描述。恰当的名字应该是利斯亭带，现在为其正名为时已晚

这个名称，这一学科的名称才固定下来。

西林 (Ernst Schering, 1824-1897)，德国数学家，1857 年在哥廷根大学获得博士学位，他最著名的工作是对高斯文章的编辑。

结语

在高斯时代，德国除了高斯之外，仅有少数几个数学家进行着数学研究。这一局面在德意志统一后迅速得到了改观，当时德国数学已处于普遍高涨的状态，其普及性即使法国也不可比。与这一时期的柏林大学相比，哥廷根数学发展的速度大大落后了，当时哥廷根数学在德国众多的数学研究中心中已没有多大优势。

虽然克莱布什、富克斯、施瓦茨、H. 韦伯在数学史上没有像高斯、狄利克雷和黎曼那样显赫的地位，但他们在哥廷根数学的发展史上却不容忽视。在克莱因到达哥廷根之前，正是他们支撑了哥廷根数学的发展，并且在函数论、代数几何、微分方程、代数等方向保持了领先。从历史上看，函数论处于 19 世纪数学的中心地位，几乎是评价所有数学家的试金石。许多大数学家在当时之所以了不起，并非是我们现在认为的那样，而是由于他们在函数论这个领域的杰出工作。雅克比、魏尔斯特拉斯、黎曼、庞加莱更是因为他们对函数论的工作而获得了他们宝贵的职位和显赫的名声。

数学发展需要大师，在施瓦茨和韦伯离任后，克莱因有了大施拳脚的机会，他网罗大师，在 1895 年聘来了希尔伯特，后来的发展证明了他独到的眼光，正是希尔伯特巨大的威望，给哥廷根数学带来了无比的声誉。柏林则由于魏尔斯特拉斯的去世而趋于式微。数学发展需要有很强组织能力的人来领导，克莱因的行政天才的的确确给哥廷根的数学发展带来了巨大的便利，而柏林的克罗内克也为柏林争取过不少利益。

数学的发展还需要政策，需要国家和政府的稳定支持。德国大学之间充分的人才交流、默契的竞争以及和谐的发

展，使得哥廷根数学逐渐迎来了自己的辉煌。但无可否认，柏林大学 19 世纪后半叶以及哥廷根数学 1886-1933 年间的辉煌是与德意志文化教育部的稳定支持分不开的。终于在 1933 年之后，随着纳粹的掌权，哥廷根数学又毁于一旦，至今也没有恢复当年的荣耀。

附：哥廷根数学的编制（1800-1900）

哥廷根初期只有一个数学教授席位，也很少有学生选择数学来作为他们主要的研究领域。1848 年，哥廷根设立了第二个数学教授席位。

哥廷根数学第一教授 哥廷根数学第二教授

1807-1855 高斯	1848-1883 斯特恩
1856-1859 狄利克雷	1886-1913 克莱因
1860-1866 黎曼	
1868-1872 克莱布什	
1874-1875 富克斯	
1875-1892 施瓦茨	
1892-1895 H. 韦伯	
1895-1930 希尔伯特	



作者简介：王涛，河北师范大学数学与信息科学学院博士生，主要研究方向为近现代数学史。