谷歌数学涂鸦赏析（下）[1]

欧阳顺湘

25 艾达诞辰 197 周年

图 118 艾达诞辰 197 周年纪念（2012 年 12 月 10 日，全球）

图 119 英国首相府的艾达•洛夫莱斯画像（Margaret Sarah Carpenter 作于 1835 年）

2012 年 12 月 10 日，谷歌以涂鸦纪念艾达•洛夫莱斯（Ada Lovelace, 1815 年 12 月 10 日 -1852 年 11 月 27 日）诞辰 197 周年。艾达又名奥古斯塔 • 艾达 • 金（Augusta Ada King），常被称为洛夫莱斯伯爵夫人（Countess of Lovelace）。她在现代计算机诞生 100 多年前，就为巴贝奇[2]没有造出来实物的分析机设计了程序，因此有“程序之母”的称号。

在纪念艾达的涂鸦中，艾达身着长裙，用鹅毛笔于一张构成“Google”字样的长纸条上伏案书写，纸条旁边还同时显示有从巨型机到个人机和平板电脑等离不开程序的各型计算机。

历史上对科学有贡献的女性不多，且不少人随着时间的流逝而渐被遗忘。谷歌涂鸦对女性人物的纪念数据就在一定程度上表明了这一点。自 2001 年谷歌以涂鸦纪念特殊人物开始，直至 2008 年，谷歌涂鸦上才有女性人物被纪念。至 2012 年底，谷歌共纪念了 318 名男性，45 名女性，其中女性所占比例仅为 12.4%，每年女性出现的比例不超过 12.8%。

艾达是迄今为止，唯一被谷歌涂鸦纪念过的女数学家。谷歌为什么会想到以涂鸦来纪念她呢？在这个涂鸦发布当日，谷歌官方博客讲述了背后的故事。

2011 年，谷歌代表团访问位于伦敦唐宁街十号的英首相府。首相府中墙上有一高达 216 厘米、宽 137 厘米的大幅女士画像。参观过程中，代表团成员被问及这位有着维多利亚时代特征的盛装女士是谁，然而大多数人对她却是一无所

[1] 本文续《谷歌数学涂鸦赏析》之“上”和“中”（分别见 2013 年《数学文化》第 4 卷第 1 期和第 2 期）。

[2] 参附录一。

图 120 艾达·洛夫莱斯

知。在得知她是第一位程序员之后，这些整天与程序打交道的人都大为惊讶。返回美国后，他们开始进一步了解艾达，最终利用谷歌涂鸦和博客文字来纪念她。

艾达是英国伟大的浪漫主义诗人拜伦（乔治·戈登·拜伦[3]，George Gordon Byron, 1788-1824）勋爵的唯一婚生子女。正是艾达父亲的“负面影响”，使得她走上了学习数学与科学的道路。

拜伦出生于一个破落的贵族家庭，父亲是个浪荡子，在拜伦出生后不久即为逃避债务而遗弃家庭。拜伦的母亲带着他从小过着艰辛拮据的生活。只是拜伦十岁时，因继承了家族的爵位以及产业才得以改变。

1811 年，拜伦东方旅行三年归来，带回“四千行诗”。1812 年 2 月，拜伦的长篇叙事诗《恰尔德·哈洛尔德游记》（*Childe Harold's Pilgrimage*）第一、二章问世，引起轰动，就如他在日记中写的“我在一个美好的早晨醒来，发现自己成名了”，立刻成了著名诗人以及社交界的明星。

一方面，拜伦过着“放荡不羁”的生活，不但如他诗歌所写“且来享受醇酒妇人，尽情欢笑；明天再喝苏打水，听人讲道”，还如梁实秋所叙，“和无数的情人缱绻，包括他自己的异母所生的妹妹在内”，另一方面，因为少时的经历以及外出旅行之所见，拜伦和上流社会格格不入。例如，上议院通过法案，要对毁坏机器的工人判处死刑，而拜伦却在议会上为工人们的权益辩护，并写下政治讽刺诗。

艾达的母亲安妮·伊莎贝拉·米尔班奇（Anne Isabella Milbanke, 1792-1860）出生于贵族家庭，自小受到过良好教育。她还酷爱数学，被拜伦戏称为“平行四边形公主”。

1815 年，安妮与拜伦结婚。按查良铮所述，“这是拜伦一生所铸的最大的错误。拜伦夫人是一个见解偏狭的、深为其阶级的伪善所宥的人，完全不能理解拜伦的事业和观点。”

1815 年 12 月，艾达出生；不到一个月，安妮即与拜伦分居，带着艾达回到母亲家中。1816 年 4 月，拜伦不堪政客与上流社会借机发起的各种造谣中伤、攻击谩骂，永别英国，八年后死在希腊军中。

拜伦在第二次，也是最后一次离开英国后，续写了《恰尔德·哈洛尔德游记》第三、四章。他在第三章第一一三节中，以诗明志[4]：

我没有爱过这人世，人世也不爱我；
它的臭恶气息，我从来也不赞美；
没有强颜欢笑去奉承，不随声附和，
也未曾向它的偶像崇拜的教条下跪，
因此世人无法把我当作同类，
我厕身其中，却不是他们中的一人；
要是没有屈辱自己，心灵沾上污秽，
那么我也许至今还在人海中浮沉，
在并非他们的，而算作他们的思想的尸衣下栖身。

图 121 乔治·戈登·拜伦

[3] 参考查良铮（诗人穆旦）译《拜伦诗选》（上海译文出版社，1982 年）前作的《拜伦小传》。

[4] 中译见杨熙龄译《恰尔德·哈洛尔德游记》，上海译文出版社，1990 年。后面引用的此诗第三章另外两小节的译文同样来自该译著。

拜伦深知自己再也见不到女儿了，他在《恰尔德•哈洛尔德游记》第三章第一节中，开篇即与女儿告别：

可爱的孩子，你的脸可像你妈妈？
上次相见，你天真的蓝眼珠含着笑，
我的家庭和心灵的独养女儿，艾达！
然后分手了，——可不像这一遭，
那时还有希望。——猛然间我才惊觉：
周围已是起伏的海浪，风在唏嘘；
我走了；漂泊到哪儿，自己也不知道；
但是那海岸已经在我眼前隐去，
阿尔比温是再也不能使我欢欣，或者使我忧郁。

拜伦在这第三章最后还对女儿念念不忘，他在第一一五节中写道：

我的女儿！这一章诗以你的名字开始，
又以你的名字结束，诗到此写尽；
我看不到你的容貌，听不到你的声息，
但有谁更怀念你；多少年来总有个影
紧紧追随着你，它萦绕着你而不离分。
虽然你是永远再看不到我的脸颜，
但我的诗篇终会映射进你的眼睛，
渗入你的心坎，虽然那时我心已朽烂，
这是出自你父亲的手笔，他留下的声音和纪念。

拜伦追求自由、民主，讴歌各国的民族运动，但在安妮眼中，拜伦是“疯狂、邪恶且危险的”，因而不希望艾达受到其父亲那样不良品德的伤害，设法阻止艾达任何与她父亲相似的倾向。为此，艾达很小就开始接受科学与数学方面的教育。艾达的科学与数学老师有后来成为她丈夫的威廉•金（William King）以及著名数学家奥古斯都•德•摩根（Augusta De Morgan, 1806-1871）。安妮的精心培养使艾达获得了很强的数学素养，但并没能阻止她对父亲的同情。

艾达在 17 岁时与查尔斯•巴贝奇成了密友。艾达对巴贝奇建造分析机的想法极其着迷，而巴贝奇则对艾达的智力和写作能力非常佩服，赞她为“数字女巫（Enchantress of Numbers）”。

1842 年，意大利将军、政治家和数学家路易吉•梅纳布雷亚（Luigi Menabrea, 1809-1896）出版了介绍巴贝奇分析机的书《巴贝奇的分析机简要》（*Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*）。1843 年，艾达将这本书翻译成了英文。据巴贝奇在他晚年所撰自传《一个哲学家的生命历程》（*Passages From the Life of a Philosopher*, 1864 年）中的回忆，巴贝奇在得知艾达翻译了梅纳布雷亚的书后，问她既然自己对分析机这么熟悉，为何不自己写一篇原创文章？艾达回说，当初没想到这样做。然后巴贝奇即建议艾达针对梅纳布雷亚的书写一些注释。于是艾达在译文后连写了七篇后记，加起来是正文的三倍多[5]。

艾达在译注中给出了用分析机计算贝努利数[6]等问题的计算程序。因为巴贝奇对数字最感兴趣，所以只想到分析机可能成为强大的计算器。而艾达则预见到这样一台机器可以有更加广阔的用途。它不但可以用来表示数字，还可以表示单词与音乐，正如我们今日所实现的。

艾达年仅 36 岁即去世，与她父亲拜伦去世时年龄相同。根据她的遗愿，被葬于诺丁汉郡其父亲身边。为了纪念艾达，美国军方一个应用广泛的编程语言被命名为 Ada，这个语言是对另一个很有影响、同样以著名数学家的名字命名的编程语言 Pascal 的扩展。为了提高女性在科技和数学等方面的影响，每年的 10 月中的某一天被定为艾达•洛夫莱斯日（Ada Lovelace Day）。

26 玛雅历法纪念

图 122 玛雅历法纪念（2012 年 12 月 21 日，巴西、土耳其、意大利等共 40 余国）

[5] 参考 http://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html。

[6] 伯努利数是如下一常数列 $\{B_n\}$（取 $B_1=-\frac{1}{2}$）: $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}, B_5=0, B_6=\frac{1}{42}, B_7=0, B_8=-\frac{1}{30}$ ……。这是雅各布•伯努利为了解决所谓的“等幂和”问题，即为计算自然数序列的整数次幂部分和 $\sum_{k=0}^{m-1} k^n = 0^n+1^n+2^n+3^n+\cdots+(m-1)^n$ 而引入的（这里 n 为正整数）。这个和为一个 n+1 次多项式，系数与贝努利数密切相关：$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k m^{n+1-k}$。例如，$0+1+2+3+\cdots+(m-1)=\frac{1}{2}(B_0m^2+2B_1m)=\frac{1}{2}(m^2-m)$, $0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2=\frac{1}{3}(B_0m^3+3B_1m^2+3B_2m)=\frac{1}{6}m(2m-1)(m-1)$。贝努利数的一个简单定义是利用级数展开 $(|x|<2\pi)$: $\frac{x}{\exp(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$。

(a) 海报　　(b) 剧照

图 123　美国电影《2012》海报与剧照

地球和人类已平安度过 2012 年 12 月 21 日，然而，在此之前，民间盛传这一天是“玛雅历法预言”的世界末日。2009 年开始播映的科幻灾难片《2012》更以玛雅预言为背景，“呈现”了大地断裂、湖水干涸、埃菲尔铁塔倒塌、梵蒂冈崩溃、洪水来临等灾难场面。虽然许多人并不相信或以娱乐的心态对待此事，但也有不少人有疑虑乃至恐慌。

事实上，如我们后面将要解释，2012 年 12 月 21 日只是玛雅历法中的一个标志：一个计算周期即将结束，一个新的周期就要开始而已。谷歌涂鸦在这个特殊日期，用玛雅象形文字为元素，在形成谷歌徽标“Google”的同时，表示确切的日期“12 月 21 日”。谷歌设计涂鸦来纪念，是如往常对科技与数学的兴趣一样，关注玛雅人所创造的历法及其背后的数学和天文知识，祝福世界在下一个伯克盾里繁荣昌盛。

玛雅文明的历法、天文和数学知识为什么值得纪念呢？我们先来简单了解一下什么是玛雅文明。

玛雅文明出现在今中美洲的墨西哥南部、危地马拉、巴西、伯利兹以及洪都拉斯和萨尔瓦多西部等地区的热带丛林中，兴起于公元前 10 世纪，盛于 4-9 世纪。玛雅文明不可思议地高度发达：不知使用铁器，也不使用轮子，但却有着高超的建筑技术，建造了一座座布局严密、结构恢弘的巨型金字塔；玛雅人生产力低下，却观测到了非常精确的天文现象并制定了完整、复杂的历法系统。

在 8 世纪左右，玛雅人如谜一样地终止了建造自己的家园，大举迁移，放弃了已经高度发展的文明。有研究者认为，玛雅文明衰落的主要原因是以外部环境变化为导火索的内部相互残杀。在梅尔 • 吉布森（Mel Gibson）导演的关于玛雅人的电影《启示录》(*Apocalypto*, 2006 年）中，就展现了小部落被袭击，并以俘虏作活人献祭的血腥场面：玛雅祭司在金字塔顶端的神庙里主持祭祀，俘虏被剖开胸膛、活挖心脏进行烧烤，砍下的头颅沿着金字塔阶梯滚下。

《启示录》的末尾，两位追杀者和被追杀的主人公终于停止战斗，惊恐地看着海面上驶来的西班牙舰队。正是 16 世纪西班牙殖民者的入侵彻底毁灭了玛雅文明。西班牙人不但烧毁玛雅文献，还悉数杀害玛雅人中本来就为数不多的通晓玛雅文者。于是，解读玛雅文明，只有依靠散落

图 124　玛雅文明的雕刻艺术

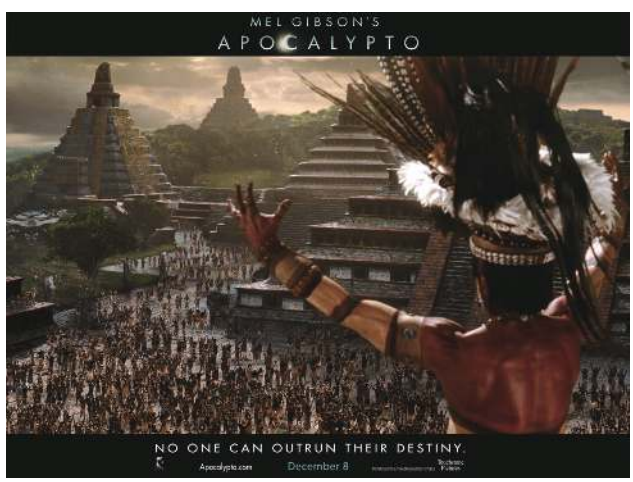


图 125　电影《启示录》宣传海报：玛雅金字塔上的祭祀

图 126 电影《启示录》剧照：西班牙人来了

图 127 《德累斯顿刻本》中的四页

在从林中的玛雅遗迹和幸存下来的四本玛雅刻本了。

第一位对玛雅文明进行破译的是欧洲 19 世纪一位著名的通才：通晓动物学、语言学和考古学等十几门专业的康斯坦丁•拉菲内克（Constantine Rafinesque, 1783-1840）。拉菲内克最先从《德累斯顿刻本》（*Dresden Codex*）解读出玛雅计算系统并于 1832 年宣布了他的发现：玛雅文本中的一点表示 1，一横表示 5。

德累斯顿图书馆的馆员弗斯特曼（Ernst Förstemann, 1822-1906）随后做了进一步研究。他工作的图书馆恰好有《德累斯顿手刻本》，同时他也恰好可以读到 1562 年下令烧毁玛雅文献的主教兰达（Diego de Landa）写的一篇文稿《尤卡坦诸事之关系》（Relación de las Cosas de Yucatán）。弗斯特曼喜好数学，利用他的数学逻辑，解读出玛雅人用来决定何时进行决战的天文表以及历法循环（Calendar Round）。

原来玛雅人是用二十进制来进行计算的。正如我们通常使用的十进制可能受启发于一双手的十个手指头一样，玛雅人使用二十进制可能是因为一双手的十个手指和一双脚的十个脚趾之和。而玛雅人用一点来表示 1 可能和他们习惯用一个可可豆作为“货币单位”有关。

在二十进制中，首先需要知道如何表达从 0 到 19 这二十个数字。玛雅人在公元前 36 年就已经开始用贝壳形状的符号来表示 0，这比印度和阿拉伯人使用 0 都要早很多，而西方直到 12 世纪才用到 0。不过玛雅人只是在位值计算中使用 0，并不将 0 单独作为数字使用。首次将 0 用作数字计算是印度人的重要贡献。然后，玛雅人用一点和一横分别表示数字 1 和数字 5，以及四点表示数字 4，两横表示数字 10，两横上加四点表示数字 14 等。

二十进制的规则与十进制类似：处于第二位的数字表示这位数字的 20 倍；处于第三位的数字表示这位数字的 $400 = 20^2$ 倍，依此类推。所以，若要表达十进制的 17 469，则可将其表为 2.3.13.9，因为：

$$17\ 469 = 2\times 20^3 + 3\times 20^2 + 13\times 20 + 9.$$

就如我们对十进制中的 10、100、1000 和 10 000 有专门的称呼（十、百、千和万）类似，在玛雅语中，20、400、8000、160 000、3 200 000 和 64 000 000 分别叫做 kal, bak, pic, calab, kinchil 和 alau。

作为比较，玛雅人简单地用一点、一横和贝壳符号这

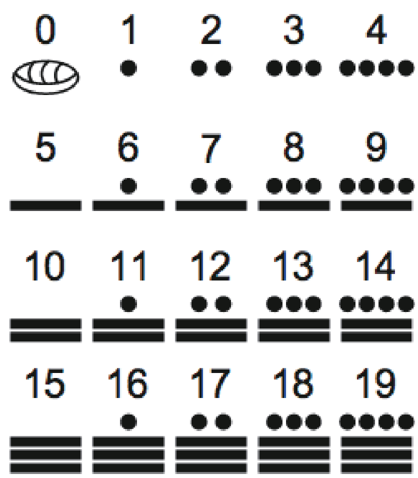


图 128 玛雅数字表示

三个符号的组合来表示数字，而罗马数字则需要用到七个符号，即 I（1）、V（5）、X（10）、L（50）、C（100）、D（500）和 M（1000），在表示数字时要用到如重复数次、右加左减等规则。例如，罗马数字 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII、IX、XI、XII、XIII、XIV、XV、XVI、XVII、XVIII、XIX、XX、XX1 分别表示从 1 到 21 这些数字。

玛雅人使用纯粹的二十进制来计数和进行加减法运算，但在表示时间时，对二十进制做了适当修改：第三位不是以 20 为底，而是采用 18。也就是说，在修正了的二十进制中，从低到高的位值分别为：1、20、360 ＝ 18

×20、7 200 = 20×18×20 和 144 000 = 20^{20}×18×20 等。

玛雅人的二十进制很明显地反映在他们的历法中（如一个月总是 20 天），特别是玛雅人对二十进制的修订使得他们可以更为精确地计时。

玛雅历法是一个主要由三种历法（三个年）组成的系统：卓尔金历（Tzolkin 或 Tzolk'in）或宗教年，哈布历或太阳年，长计历或官方年。

卓尔金历用于宗教目的，13 个月，每月 20 天，全年共 260 日。

哈布历全年共 365 天，这与现行公历类似。只是哈布历中有 18 个月，每月 20 天，另外 5 天是禁忌日，让人们反思过去，考虑今天和未来。类似于中国传统用天干和地支结合起来纪年一样，玛雅人也将卓尔金历和哈布历结合起来形成历法循环：某一天既用卓尔金历也用哈布历表示。这一循环要经过 18 980（260 和 365 的最小公倍数）天或说 52（= 18 980/365）个太阳年、73（= 18 980/260）个宗教年。

玛雅人用的“长计历（Long Count)”，希望表示自玛雅元年开始的每一天。 在长计历中，

- 1 天（Kin）为最小的单位；
- 20 天为一月（乌纳，Uinal）；
- 18 个月为一年（盾，Tun，360 天）；
- 20 盾为一卡盾（Katun，20 年）；
- 20 卡盾为伯克盾（Baktun，400 年）；
- 20 伯克盾为一皮克盾（Pictun，8000 年）；
- 伯克盾之后依次还有卡拉盾（Calabtun）、金奇盾（Kinchiltun），直至阿托盾（Alautun，18 ×20^7 天）。

由此可见长计历能纪的时间为 23 040 000 000 天。从玛雅纪元算起，2012 年 12 月 21 日恰好是第 13 个伯克盾结束、一个 5 200 年的创世周期结束的日子。所谓的“世界末日”就如我们都要经历的年年岁岁、岁岁年年一样平常，只是纪年的方式不一样而已。

图 129 2013 年 6 月 6 日，在墨西哥访问的习近平主席游览了古玛雅文化遗址奇琴伊察，图为习近平夫妇和墨西哥总统涅托夫妇合影，背景是卡斯蒂略金字塔

精确的历法依赖于精确的天文观测。例如，他们精确地计算出一个回归年，即地球绕太阳公转的时间为 365.242 129 天，与我们现在所知的 365.242 198 天相差无几；他们观测得到的金星年（金星绕太阳公转一年）为 584 日，与现代人的测算 583.92 日相差很小。

玛雅人先进的历法知识也反映在他们的建筑中。他们每隔 52 年要建造一座大型建筑物，每一座完成的建筑物都需符合天文上一定的要求。最有代表性的建筑之一是墨西哥尤卡坦半岛的卡斯蒂略金字塔（El Castillo，西班牙语，意为城堡）。 玛雅人崇拜太阳神，认为带羽毛的蛇神，是太阳神的化身，所以这一金字塔又被称为羽蛇神金字塔或库库尔坎（Kukulkan，玛雅神话中羽蛇神的名字）金字塔。卡斯蒂略金字塔建于 11 至 13 世纪之间，高 30 米，总共有 365 阶，每一阶就代表哈布历的一天；在春分与秋分的日出日落时，金字塔的拐角在北面的阶梯上投下羽蛇神状的阴影，并随着太阳的位置在金字塔的北面移动。

27 拉马努金诞辰 125 周年

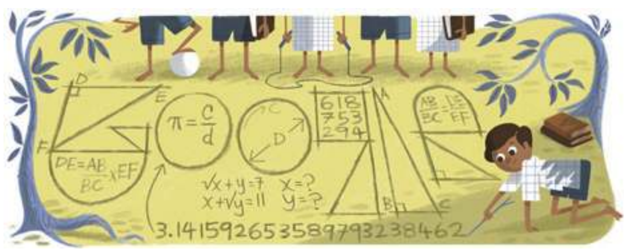


图 130 拉马努金诞辰 125 周年纪念（2012 年 12 月 22 日，印度）

2012 年 12 月 22 日，是印度充满传奇色彩的天才数学家斯里尼瓦瑟 • 拉马努金（Srinivasa Ramanujan, 1887 年 12 月 22 日 -1920 年 4 月 26 日）诞辰 125 周年的纪念日。因为拉马努金，2012 年被印度作为印度数学年纪念，而且从 2012 年开始，每年的 12 月 22 日被定为印度国家数学日。

谷歌印度以象征少年拉马努金在地面学习、书写数学结果的涂鸦来纪念他。涂鸦的内容有平面几何中的相似比、方程求解、幻方以及圆周率（涂鸦中写出 21 位）等内容。在涂鸦中，“Google”这六个字母用三角形、圆、半圆与正方形等几何图形来形成。

因为篇幅的关系，这里我们仅介绍纪念涂鸦中出现的

与拉马努金紧密相关的一些数学内容，即方程组、幻方与圆周率等。

拉马努金少年早慧。他的同学曾讲述的一个故事和涂鸦中的方程组

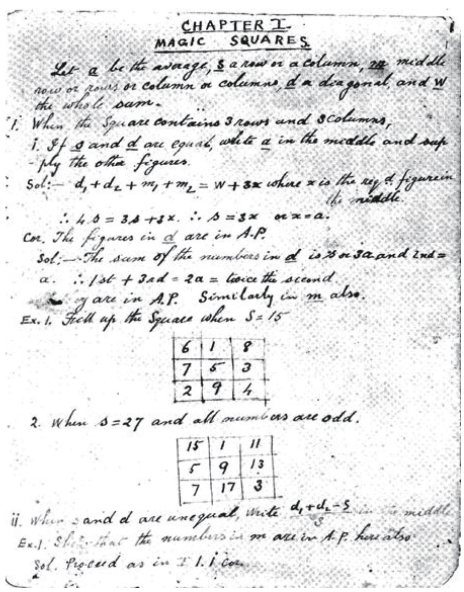
$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=7,\\ x+\sqrt{y}=11\end{cases}$$

有关。拉马努金在中学读书时，一位高年级同学问他如何求解上述方程，这样的问题本是更高年级同学才学习的，但就像答案早就印在脑海中一样，拉马努金不假思索地给出了正确答案：$x=9$，$y=4$。

所谓幻方就是排列成 n 行、n 列的方阵，其中填入 1 到 n^2 这 n^2 个连续自然数，以使得每行、每列以及对角线上的 n 个数字之和均相等。这样的方阵被称为 n 阶幻方。显然，幻方与整数分拆有些联系，这或许是拉马努金对此感兴趣的一个原因。附录中我们将通过金庸小说中相关话题再作更多介绍。

拉马努金在独自研究数学的过程中将自己所得到的结果记录在三本笔记本上。第一本笔记本的第一章即是关于幻方的，有标题《幻方》(*Magic Squares*)，而其它各章都没有标题。

拉马努金纪念涂鸦中出现的三阶幻方即是来自他的笔记本中的第一页上的第一个幻方。这个三阶幻方，将数字 1 到 9 排成三行三列，行和、列和以及对角线之和均为 15。此幻方顺时针旋转 90 度之后，恰为我国古代洛书上的幻方（参考图 162）。


CHAPTER I.
MAGIC SQUARES

Let a be the average, s a row or a column, m middle row or rows or column or columns, d a diagonal, and W the whole sum.

I. When the Square contains 3 rows and 3 columns,

i. If s and d are equal, write a in the middle and supply the other figures.

Sol:– $d_1+d_2+m_1+m_2=W+3x$ where x is the req^d. figure in the middle.

$\therefore 4s=3s+3x$. $\therefore s=3x$ or $x=a$.

Cor. The figures in d are in A.P.

Sol:– The sum of the numbers in d is s or 3a and 2nd = a. $\therefore$ 1st + 3rd = 2a = twice the second.

[illegible] are in A.P. Similarly in m also.

Ex. 1. Fill up the Square when S = 15

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2. When s = 27 and all numbers are odd.

15	1	11
5	9	13
7	17	3

ii. When s and d are unequal, write $\frac{d_1+d_2-s}{3}$ [illegible] middle

Ex. 1. Show that the numbers in m are in A.P. here also.

Sol. Proceed as in I. 1. i Cor.

图 131 拉马努金笔记本中的一页（来自 http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/notebookindex.htm），其中一个幻方被用于涂鸦中。

(a) 原雕刻

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

(b) 数字表示

图 132 印度耆那幻方

在拉马努金之前，印度历史上也出现过幻方。有世界文化遗产之称的印度中央邦北部的卡杰拉霍（Khajuraho）神庙建筑群中有一座耆那教（Jainism）的帕尔斯瓦纳特（Parshvanath）神庙，庙里有一个四阶幻方，距今已有约一千余年的历史。

拉马努金在圆周率 π 方面有不少贡献，发现了很多相关的公式。

下面与 π 有关的常数被称为拉马努金常数：

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768743.99999999999925\ldots$$

它的特点是与整数非常地接近，而且联系了数学中常用的常数 e 和 π。

拉马努金在一篇名为《模方程与 π 的逼近》(*Modular Equations and Approximations to Pi*) 的文章中提出了如下关于圆周率的著名公式：

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

这个级数收敛相当快速。例如，只取一项（$n=0$），就可以得到圆周率前 8 位十进制精度：

$$\pi\approx\frac{9801}{2\cdot1103\cdot\sqrt{2}}\approx 3.14159273001.$$

1985 年比尔•高斯珀（Bill Gosper）将这个公式改写成连分数的形式，得到了圆周率的一千七百万位。其特点是不需连续计算圆周率。楚德诺夫斯基兄弟（David 与 Gregory Chudnovsky）改进了拉马努金的公式，不但计算可以间断，还可以用不同计算机计算，再将结果组合。他们的算法创造过几次圆周率计算的世界纪录，如 2.7 万亿（2009 年）、5 万亿（2010 年）、10 万亿（2011 年）位。