

# 虚数的意义



阮一峰

有人在问答网站 Stack Exchange 提问：

“我一直觉得虚数(imaginary number)很难懂。中学老师说，虚数就是 $-1$ 的平方根。

$$i = \sqrt{-1}$$

可是，什么数的平方等于 $-1$ 呢？对 $-1$ 求平方根，计算器直接显示出错！

直到今天，我也没有搞懂。谁能解释，虚数到底是什么？它有什么用？”

很多人在问题下面给出了自己的解释，还推荐了微软公司工程师 Kalid Azad 写的一篇非常棒的文章《虚数的图解》<sup>1</sup>。我读后恍然大悟，发现虚数原来这么简单，一点也不奇怪和难懂！

下面，我在 Azad 文章的基础上，用自己的语言解释虚数的含义。

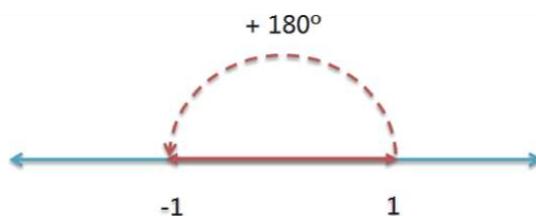
## 1 什么是虚数？

首先，假设有一根数轴，上面有两个反向的点： $+1$  和  $-1$ 。

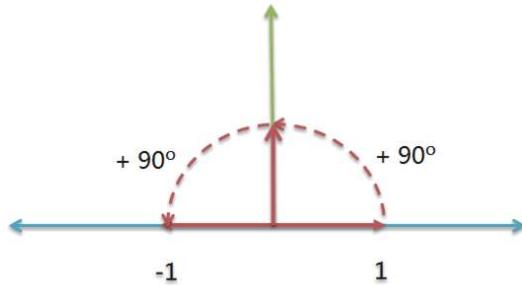


<sup>1</sup> Kalid Azad, A Visual, Intuitive Guide to Imaginary Numbers, <http://betterexplained.com/articles/a-visual-intuitive-guide-to-imaginary-numbers/>, 2007.

这根数轴的正向部分，可以绕原点旋转。显然，逆时针旋转 180 度， $+1$  就会变成  $-1$ 。



这相当于两次逆时针旋转 90 度。



因此，我们可以得到下面的关系式：

$$( +1 ) \times (\text{逆时针旋转 } 90 \text{ 度}) \times (\text{逆时针旋转 } 90 \text{ 度}) = -1$$

有人可能会问，为什么这里要用乘法？其实，这里的乘法运算符只是代表连续进行的某种操作。

接下来，把 +1 消去，这个式子就变为：

$$(\text{逆时针旋转 } 90 \text{ 度})^2 = -1$$

将“逆时针旋转 90 度”记为  $i$ ：

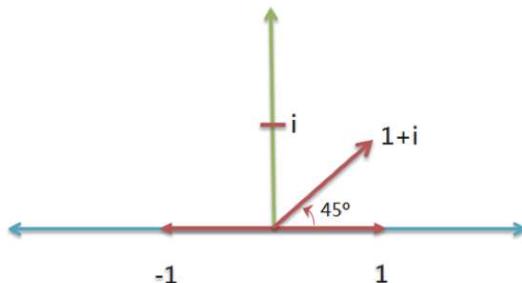
$$i^2 = -1$$

这个式子很眼熟，它就是虚数的定义公式。

所以，我们知道了，虚数  $i$  就是逆时针旋转 90 度， $i$  不是一个数，而是一个旋转量。

## 2 复数的定义

既然  $i$  表示旋转量，我们就可以用  $i$  表示任何实数的旋转状态。



将实数轴看作横轴，虚数轴看作纵轴，就构成了一个二维平面。旋转到某一个角度的任何正实数，必然唯一对应这个平面中的某个点。

只要确定横坐标和纵坐标，比如  $(1, i)$ ，就可以确定某个实数的旋转量（45 度）。

数学家用一种特殊的方法，表示这个二维坐标：用 + 号把横坐标和纵坐标连接起来。比如，把  $(1, i)$  表示成  $1 + i$ 。这种表示方法就叫做复数（complex number），其中 1 称为实数部， $i$  称为虚数部。

为什么要把二维坐标表示成这样呢？下一节告诉你原因。