前排从左至右：张英伯，林亚南，刘建亚，汤涛；后排从左至右：丁玖，朱斌，罗懋康，顾沛，蔡天新，贾朝华，庄歌

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者

《数学文化》欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com

本刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本刊淘宝网：http://mysanco.taobao.com/
本期出版时间：2013年8月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金的支持

Contents | 目录

数学人物

哥廷根数学的人和事 王 涛 3

鲍耶与非欧几何 张小平 刺 克 10

数学趣谈

7的话剧 柳形上 16

顺藤摸瓜 —— Pollard's Rho 及其它 万精油 25

善科网 —— 数学趣题专栏 30

数学烟云

谷歌数学涂鸦赏析（下） 欧阳顺湘 32

数学与文化交融的奇迹 —— 幻方 方开泰 郑妍珣 52

数学教育

虚数的意义 阮一峰 66

浅说椭圆曲线 陆 俊 70

数学经纬

跨越千年的数学桥 徐雯雯 俞 宁 79

法国军人的数学素质 陈关荣 85

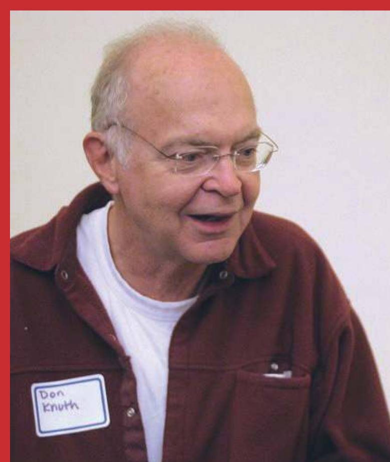
数学家随笔

课题研究与论文写作技巧 韩茂安 88

高德纳的奖励支票与《数学之英文写作》作者的一错一美元 欧阳顺湘 91

好书推荐

把数学写作当作语言艺术的一部分 蒋 迅 99



哥廷根数学的人和事

王 涛

哥廷根数学学派的兴起堪称是数学史上最为璀璨的篇章之一，在20世纪的前30年里，哥廷根这座不起眼的小城绝对是世界数学的中心，被誉为数学圣地，有数学的“麦加”之称。伟大的数学传统、浓厚的学术氛围使每一个数学人陶醉，而哥廷根数学的人和事更是一道靓丽的风景线。

哥廷根数学的伟大传统，为高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）首创。其继任者都是德国最有声望的数学家，如狄利克雷（P. G. L. Dirichlet, 1805-1859）和黎曼（G. F. B. Riemann, 1826-1866）。虽然他们推进了高斯的事业，但和高斯一样，他们都未能给哥廷根带来黄金岁月。不仅如此，1866年，随着19世纪最富独创性的数学家黎曼的去世，哥廷根大学的数学进入了一段相对比较困难的时期。而与此同时，德国几乎所有的大学——莱比锡、哥尼斯堡、埃尔朗根、波恩——都有知名的数学教授。在克莱因（F. Klein, 1849-1925）1886年到达哥廷根大学之前，哥廷根大学并不具有优势，数学教授席位一度空缺甚至找不到合适的替代者，这与当时柏林大学数学人才济济、兴旺发达的局面形成了鲜明的对比。

哥廷根数学传统的缔造者、被誉为数学王子的高斯（1777-1855）

高斯的继任者——狄利克雷（1805-1859），他曾先后在柏林大学和哥廷根大学任教授

亚历山大•冯•洪堡（1769-1859）

柏林大学数学的兴起

19 世纪中叶的德意志远不是一个统一的国家，而是分为大大小小的邦国。哥廷根位于汉诺威王国内，柏林位于普鲁士王国内。其中普鲁士柏林大学的兴起绝对值得一提。

1806 年第四次反法同盟失败，作为同盟国之一的普鲁士几乎全军覆没，不久，柏林也陷落。拿破仑残忍地对待了普鲁士，这使得普鲁士发誓要报仇。施泰因、哈登堡、洪堡从政治、经济、军事和教育各个方面对普鲁士进行了改革，

狄利克雷的继任者、高斯的得意弟子黎曼（1826-1866），曾跟随狄利克雷在柏林学习过一段时间

其中教育改革是重中之重。1809 年，出生于波茨坦贵族家庭的威廉 • 冯 • 洪堡（Wilhelm von Humboldt, 1767-1835）出任普鲁士教育文化部部长，掌管普鲁士所有的教育文化事务，在短暂的任期内，洪堡改革了普鲁士引以为傲的教育制度。洪堡建立了新的教育制度，设初等教育、中等教育和高等教育三个层次；采用新的教学法，规定只有受过训练的合格教师才能任教。不少德国顶级数学家都曾在中学任教，包括晚年被视为德意志民族英雄的魏尔斯特拉斯（K. Weierstrass, 1815-1897），当时很多成果都需要他拍板才能获得认可，比如 1882 年林德曼（C. L. F. Lindemann, 1852-1939）证明 π 的超越性。

洪堡的教育改革得到了普鲁士国王威廉三世的支持，威廉三世不仅接受了洪堡的建议，甚至不惜将豪华的王宫——海因利希宫贡献出来作校舍，筹建一所重点大学。就这样，一所以国王的名字——弗里德里希 • 威廉命名的大学成立了，这就是现在著名的柏林大学。国王威廉三世甚至用自己的家底每年为柏林大学拨款 15 万塔勒。当时他给教授们说道："这个国家必须用它精神上的力量来弥补它物质上的损失，……，教育不仅不会使国家贫穷，相反教育是摆脱贫困的最好手段！"

由于洪堡巨大的贡献，柏林大学也被称为"洪堡大学"。

在柏林大学的创办和发展过程中，亚历山大 • 冯 • 洪堡(Alexander von Humboldt, 1769-1859) 发挥了重要的作用。亚历山大 • 冯 • 洪堡是威廉 • 冯 • 洪堡的弟弟，著名的自然科



柏林三巨头。从左至右：魏尔斯特拉斯（1815-1897）是柏林学派的领袖，在德国享有巨大的威望；克罗内克的老师库默尔（1810-1893）；直觉主义的先驱——克罗内克（1823-1891）

哥廷根辉煌的缔造者——克莱因（1849-1925）

哥廷根辉煌的缔造者——希尔伯特（1862-1943）

学家和探险家。他是世界上第一个大学地理系——柏林大学地理系的首任系主任。亚历山大•冯•洪堡非常喜欢数学，对德国数学界的影响很大。比如，1826 年他曾给年轻的狄利克雷写过推荐信，推荐他到柏林大学任职；帮助雅克比（C. G. J. Jacobi, 1804-1851）争取过津贴，还与克罗内克（L. Kronecker, 1823-1891）熟识；此外，他还帮助过高斯、史坦纳（Steinner, 1796-1863）和库默尔（E. E. Kummer, 1810-1893）任教授等职位。为了纪念这位伟大的科学家，柏林大学于 1860 年设立了著名的洪堡基金。得到资助的学者一般被称为洪堡学者，我国有不少学者都曾得到过洪堡基金的资助。

这所比哥廷根大学创办晚 75 年的柏林大学赋予了大学以新的含义——学术研究。大学的意义不仅在于教学，还在于科学研究，探求真理，这就是柏林大学的理念，这一理念代表着新型大学的发展方向。与纯粹由普鲁士人建立的新型研究型大学相比，由英国人建立的哥廷根大学似乎更注重绅士教育，这点在高斯身上体现得淋漓尽致。但不管怎么说，19 世纪 30 年代柏林大学正式有了数学系，狄利克雷被聘为柏林大学的教授。

哥廷根数学的阵痛

柏林大学的兴起是普鲁士整个国家兴旺发达的一个缩影。普鲁士逐渐地强大起来并试图完成时代赋予它的使命——结束德国分裂的局面。从哥廷根大学毕业的普鲁士首相俾斯麦开始了德意志铁与血的统一。1866 年，也就是黎曼去世的那一年，普奥战争爆发并以《布拉格和约》而告终，战时协助奥地利的汉诺威被普鲁士吞并，哥廷根大学的地位一落千丈。而与之相反，柏林则从普鲁士这个邦国的首都一跃成为北德意志联邦的首都，5 年之后，柏林又成为整个德意志联邦的首都，柏林大学的地位得到了极大的提升。有一件事能反映出柏林对于哥廷根的数学优势，黎曼去世后哥廷根曾试图聘请柏林大学的克罗内克，但克罗内克婉言谢绝了，原因是柏林的学习、工作、生活环境使克罗内克感到满意。其实不仅如此，柏林大学的数学在魏尔斯特拉斯、库默尔和克罗内克的领导下已经发展到一个相当的层次，在函数论、数论、几何基础方向都有很强的实力，并且形成了一个学派，这就是数学史上著名的柏林学派。

但阵痛过后哥廷根终于迎来了自己的辉煌，这一辉煌缔造出一个新的学派——哥廷根学派。到 19 世纪末期，

随着柏林三巨头的去世，柏林大学的优势逐渐丧失，到20世纪初，局势已经完全逆转过来了。1902年，随着富克斯（I. L. Fuchs, 1833-1902）的去世，柏林大学试图聘请哥廷根的希尔伯特（D. Hilbert, 1862-1943）来继任这个位置，希尔伯特不仅拒绝了这一任命，相反他还建议克莱因要求德意志教育文化部部长阿尔道夫（F. Althoff, 1839-1908）在哥廷根增设一个数学教授席位，并且聘请他的好友闵科夫斯基（H. Minkowski, 1864-1909）来担任这个位置，这一建议也被阿尔道夫采纳。克莱因与阿尔道夫相识于普法战争（1870-1871年），他们彼此非常尊重对方。由于这层关系的存在，阿尔道夫非常支持哥廷根数学的发展，这样到了1902年，哥廷根在数学教授的数量上也赶上和超过了柏林大学，由此哥廷根数学开始了真正意义上的黄金时代。

在多数描写哥廷根数学的资料中，过多的笔墨留在了高斯、狄利克雷、黎曼、克莱因和希尔伯特那里。然而黎曼1866年去世之后的继任者是谁？在克莱因1886年到哥廷根任教授之前，哥廷根的数学又是如何发展的呢？

黎曼的继任者——克莱布什

克莱布什（A. Clebsch, 1833-1872）生于东普鲁士的哥尼斯堡，1850年入哥尼斯堡大学，深受两位老师黑塞（Hesse）和里奇劳特（F. Richelot）的影响，他们都是雅克比的学生。实际上，克莱布什从未与雅克比谋面，因为雅克比在他入学后第二年（1851年）就去世了，但克莱布什通过收集雅克比的全集而受到了雅克比的影响。1854年克莱布什到柏林深造。1858年到1863年在卡尔斯鲁厄（Karlsruhe）任理论力学教授，其后又在吉森（Giessen）任数学教授。1868年克莱布什移居哥廷根，成为黎曼的继任者。同年，他与纽曼（C. G. Neumann, 1832-1925）一起创办了一份重要的数学杂志《数学年刊》（*Mathematische Annalen*），这是一份非常有影响的杂志，希尔伯特从1902年起一直担任该刊的主编。

克莱布什（1833-1872）

克莱布什早期工作的兴趣在数学物理方面，他对变分法和微分方程也有研究，但克莱布什最主要的工作是代数几何。代数几何是19世纪最伟大的数学创造之一，100多年来已发展成为数学的核心部分，它与所有数学分支都有着密不可分的联系并推动着它们的发展。代数几何学的研究对象是由多项式方程或方程组所定义的代数簇。代数簇的特殊情形是代数曲线和代数曲面。

克莱布什研究的主要是复数域上的代数曲线和代数曲面。代数几何的中心问题是分类，19世纪中叶代数曲线的分类由黎曼所奠定，并由克莱布什继承。为了对曲线进行分类，克莱布什首次引入连通、亏格等概念，证明了一系列有关定理。克莱布什明确指出，代数几何学研究双有理变换及其不变量，而他本人正是以这种观点研究代数曲线和代数曲面的。

克莱布什开创了德国的代数几何学派，他和黎曼被称为是经典代数几何的奠基人。他的学生布瑞尔（A. W. V. Brill, 1842-1935）和M. 诺特（M. Nother, 1844-1921）继承发展了克莱布什的思想，他们都是当时著名的代数几何学家。而M. 诺特正是数学史上最伟大的女数学家E. 诺特（E. Nother, 1855-1935）的父亲，后来E. 诺特来到了哥廷根，在哥廷根数学的发展中发挥了不可估量的作用。像M. 诺特和E. 诺特这样父女同为杰出数学家的组合在数学史上似乎并不多见。

然而自高斯去世之后，哥廷根大学的数学教授似乎中了一个魔咒：其继任者都没能在这个职位上干多长时间。狄利克雷在这个位置上只待了4年就去世了。而其继任者黎曼在担任这个职位3年后感染了胸膜炎，后期一直在意大利养病。作为黎曼的继任者，克莱布什也没能幸免，在他任教授4年后由于患白喉病而去世。

数学教授的频繁更迭对哥廷根数学的发展相当不利。

把自己置于危险境地——富克斯

克莱布什的继任者是富克斯，富克斯于1874年来到哥廷根。然而富克斯来到哥廷根大学不到一年，便接受了海德堡大学的任命而离去，这又从侧面说明了哥廷根当时甚至与海德堡相比也没有多大的优势，在康斯坦丝•瑞德《希尔伯

微分方程的代名词——富克斯（1833-1902）

特——数学世界的亚历山大》（李文林、袁向东译）中对海德堡大学给予了如下评述：

海德堡大学是德国所有大学中最讨人喜欢和最富有浪漫色彩的学校。

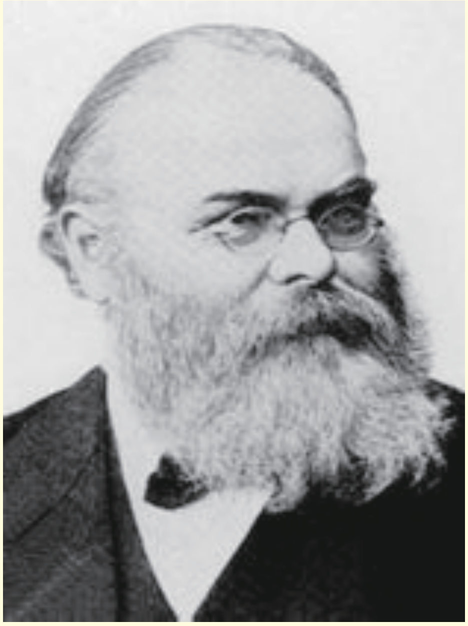
当时的德国大学之间人才可以自由流动，学生可以在第二个学期转到别的学校听课。比较碰巧的是，希尔伯特于1881年到海德堡大学听课，富克斯刚好在那里任教。富克斯的授课方式与众不同，给希尔伯特留下了很深的印象。富克斯课前一般不做准备，对要讲解的内容总是现讲现推，习惯于在课堂上把自己“置于危险的境地”。这确实是一个难得的机会，可以看到一位数学家的思维过程。不可否认这对希尔伯特有很大影响，以致于后来希尔伯特在哥廷根授课前也只做一般的准备，课上有细节错误更是常事，然而这更有助于他忽然展开对某个事实的想法。这点与克莱因追求尽善尽美大不相同，克莱因总是比学生们提前到，以检查他可能疏漏的地方而加以改正。当然他们的报告都是经典。

富克斯主要从事的是微分方程方面的研究，他在微分方程方面的巨大贡献使得他成为微分方程的代名词。富克斯在常微分方程的理论方面，做出了重要贡献。他利用超几何级数解线性微分方程，1866年富克斯在他的一篇论文中指出，在奇点邻域内的解可以用级数表出，研究这一问题的理论被称为线性微分方程的富克斯理论。这一理论直接指向了庞加莱（J. H. Poincaré, 1854-1912）的自守函数理论，另一方面通过克莱因与椭圆函数论相结合，并间接地引起了庞加莱与克莱因的竞争。这些问题成为19世纪70-80年代许多数学家研究的主要课题，而且在微分方程理论本身中也扮演着重要的角色。自守函数中有一类重要的函数称为富克斯函数。这类函数在一种线性变换的作用下是不变的，这些变换可以形成一个群，叫做富克斯群，这都说明富克斯在线性常微分方程方面有着巨大的贡献。

富克斯的继任者——施瓦茨（1875-1892）

1875年富克斯离任之后，哥廷根终于迎来了一位在哥廷根任职超过10年以上的数学教授——施瓦茨（H. A. Schwarz, 1843-1921），施瓦茨对哥廷根有相当的影响。施瓦茨到哥廷根后，根据他的报告内容制定了一份详尽的计划：首先，介绍微分与积分周期覆盖、解析几何、二阶曲面、双曲率曲面和综合几何等初等内容。然后介绍解析函数周期覆盖、椭圆函数、极小曲面、超几何级数以及函数论等其他领域。在数学系教授斯特恩(M. A. Stern, 1807-1894)的支持下，1878年数学物理研讨会率先建立一个流动图书馆，这个图书馆一直在施瓦茨的管理下，直到他离开哥廷根。随着乌尔里希（G. K. J. Ulrich, 1798-1879）的去世，他又接管了数学工具和模型室。现在我们能在哥廷根数学研究所第三层走廊的模型室里看到多达500多件的模型。

施瓦茨的数学成就，主要体现在三个方面，分别是分析学、微分方程和几何学。施瓦茨深受其老师魏尔斯特拉斯的影响，对函数论情有独钟。特别是在微分方程方面，施瓦茨在研究二阶线性微分方程的解的结构时，引入了一类线性变换群，这一工作为自守函数研究创造了条件。



施瓦茨（1843-1921）

H. 韦伯（1842-1913）

短暂的继任者——韦伯（1892-1895）

H. 韦伯（H. Weber, 1842-1913）出生于海德堡，1863年获得海德堡大学博士学位。毕业后韦伯在一系列学校任职，他曾在哥尼斯堡大学任教授。哥尼斯堡大学的数学因雅克比而闻名，从数学史来看，雅克比的名声至少要比现在高得多，他被誉为他那个时代仅次于高斯的数学家，这也不难理解法国天才数学家伽罗瓦（E. Galois, 1811-1832）在临死前一再要求请高斯和雅克比就他研究问题的重要性公开发表看法。雅克比在数学史上保持着几项记录，他是数学史上最为努力的数学家；此外，数学讨论班制度也是由他创造的。讨论班是德国数学教育和科研的一大创造，在德国数学的兴起中扮演着极为重要的角色，直到今天它仍是数学教学和科研的不二法门，世界各地也经常定期或者不定期举办各种著名的数学讨论班。

韦伯天赋极高，多才多艺，在数论和数学物理方面都作出过重要的贡献，算得上是雅克比的传人。而年轻的希尔伯特在哥尼斯堡大学学习期间，曾跟随他学习过数论和函数论。巧合的是，当1895年韦伯离任去斯特拉斯堡大学任职时，接替他的正是希尔伯特。

韦伯是第一个给出群抽象定义的数学家，在群论抽象化的过程中起着举足轻重的作用。他最著名的论著是《代数学教程》（*Lehrbuch der Algebra*），《代数学教程》在很长的一段时间里被当做了教材。

哥廷根的其他教师

蒂博（B. F. Thibaut, 1775-1832），1797年任哥廷根讲师，1805年任教授。高斯一生厌恶教学，没有多少学生，

哥廷根数学研究所第三层的数学模型

也没有人愿意选他的课，而蒂博则与高斯形成了鲜明对比，他被誉为哥廷根最好的授课老师，其修辞风格甚至可以和歌德相比。蒂博的主要研究领域为微分方程和积分学。他于1832年将一批测地工具和模型捐赠给了学校，到1865年这些工具和模型被专门放在一个展厅里。这一展厅由乌尔里希负责，经过施瓦茨和希尔伯特的经营，特别是克莱因，他甚至为模型室拉到了赞助，从而使模型室获得了稳定的资金支持。这就是现在哥廷根数学所第三层走廊里的模型的历史源头。可以想象，这些模型在当年的几何教学乃至科研中发挥了多么重要的作用，如今在Mathematica和Maple等数学软件问世后，这些模型更多的是一种对历史的承载。

斯特恩，1848年成为全职教授，这一年开始，哥廷根拥有了两个数学教授席位。此外，斯特恩还是德意志第一个犹太教授，最早注意到了黎曼的天赋，曾协助高斯培养黎曼，克莱因继任的正是他的位置。严格地说，克莱因并不属于高斯、狄利克雷和黎曼这一教授席位的继承人（见结尾附录）。

乌尔里希，数学物理讨论班的主要参与者之一，哥廷根大学数学工具和模型室的主要负责者，主要研究领域为立体几何、三角学、应用几何、力学和土木建筑。

利斯亭（J. B. Listing, 1808-1882），1834年博士毕业于哥廷根，其导师为高斯。1837年，W. 韦伯（W. E. Weber, 1804-1891, 注意与之前的H. 韦伯不是同一个人）由于参与了七君子事件而被解职，因此高斯建议利斯亭继任这一职位（物理系的职位），尽管当时他没有发表过一篇文章。在高斯的影响下，他于1848年出版了《拓扑学初步研究》（*Vorstu-dien zur Topologie*），这是首次在出版物中用到“拓扑”这个词，尽管在之前的信件中已出现过类似的词汇。长久以来，这门学科更多被称为位置分析（Analysis Situs），直到20世纪20年代美国数学家莱夫谢兹（S. Lefschetz, 1884-1972）使用了拓扑学（Topology）

莫比乌斯带最早是由利斯亭于1861年发现的，4年后莫比乌斯才对此作了描述。恰当的名字应该是利斯亭带，现在为其正名为时已晚

这个名称，这一学科的名称才固定下来。

西林（Ernst Schering, 1824-1897），德国数学家，1857年在哥廷根大学获得博士学位，他最著名的工作是对高斯文章的编辑。

结语

在高斯时代，德国除了高斯之外，仅有少数几个数学家进行着数学研究。这一局面在德意志统一后迅速得到了改观，当时德国数学已处于普遍高涨的状态，其普及性即使法国也不可比。与这一时期的柏林大学相比，哥廷根数学发展的速度大大落后了，当时哥廷根数学在德国众多的数学研究中心中已没有多大优势。

虽然克莱布什、富克斯、施瓦茨、H. 韦伯在数学史上没有像高斯、狄利克雷和黎曼那样显赫的地位，但他们在哥廷根数学的发展史上却不容忽视。在克莱因到达哥廷根之前，正是他们支撑了哥廷根数学的发展，并且在函数论、代数几何、微分方程、代数等方向保持了领先。从历史上看，函数论处于19世纪数学的中心地位，几乎是评价所有数学家的试金石。许多大数学家在当时之所以了不起，并非是像我们现在认为的那样，而是由于他们在函数论这个领域的杰出工作。雅克比、魏尔斯特拉斯、黎曼、庞加莱更是因为他们对函数论的工作而获得了他们宝贵的职位和显赫的名声。

数学发展需要大师，在施瓦茨和韦伯离任后，克莱因有了大施拳脚的机会，他网罗大师，在1895年聘来了希尔伯特，后来的发展证明了他独到的眼光，正是希尔伯特巨大的威望，给哥廷根数学带来了无比的声誉。柏林则由于魏尔斯特拉斯的去世而趋于式微。数学发展需要有很强组织能力的人来领导，克莱因的行政天才的的确确给哥廷根的数学发展带来了巨大的便利，而柏林的克罗内克也为柏林争取过不少利益。

数学的发展还需要政策，需要国家和政府的稳定支持。德国大学之间充分的人才交流、默契的竞争以及和谐的发展，使得哥廷根数学逐渐迎来了自己的辉煌。但无可否认，柏林大学19世纪后半叶以及哥廷根数学1886-1933年间的辉煌是与德意志文化教育部的稳定支持分不开的。终于在1933年之后，随着纳粹的掌权，哥廷根数学又毁于 一旦，至今也没有恢复当年的荣耀。

附：哥廷根数学的编制（1800-1900）

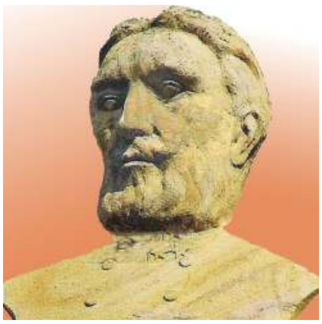
哥廷根初期只有一个数学教授席位，也很少有学生选择数学来作为他们主要的研究领域。1848年，哥廷根设立了第二个数学教授席位。

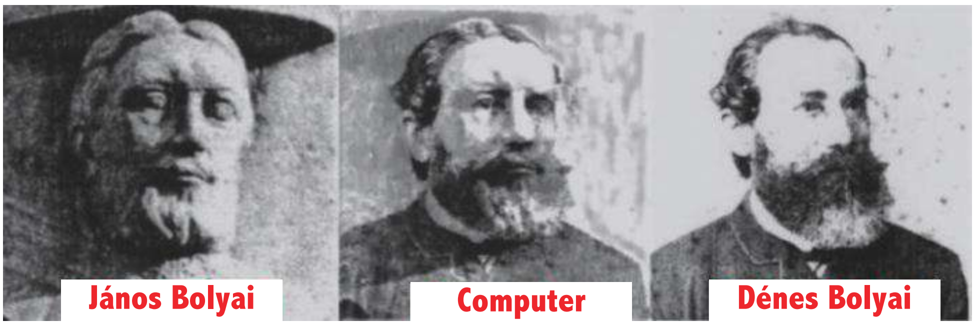
哥廷根数学第一教授	哥廷根数学第二教授
1807-1855 高斯	1848-1883 斯特恩
1856-1859 狄利克雷	1886-1913 克莱因
1860-1866 黎曼	
1868-1872 克莱布什	
1874-1875 富克斯	
1875-1892 施瓦茨	
1892-1895 H. 韦伯	
1895-1930 希尔伯特	

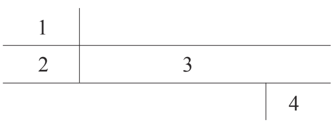
作者简介：王涛，河北师范大学数学与信息科学学院博士生，主要研究方向为近现代数学史。

鲍耶与非欧几何

张小平　　刺 克







运气不佳的雅诺什•鲍耶（János Bolyai，在英文中有时也被称为 John Bolyai，即约翰•鲍耶——笔者注）数百年来给人们的印象一直是这副样子（图片 1）。不过在美国数学会会刊 *Notices* 2011 年的一篇文章《鲍耶的真实面目》（*Real Face of János Bolyai*）中，通过计算机结合目前留下的唯一一尊雅诺什•鲍耶的雕像（图片 2）以及他的儿子丹尼斯•鲍耶（Dénes Bolyai）的照片，生成了一幅全新的鲍耶图像（图片 3）。画家弗朗西斯•马科斯（Ferenc Márkos）在此基础上于 2012 年重新创作了数学家雅诺什•鲍耶的油画（图片 4），目前这幅油画已经成为维基百科中雅诺什•鲍耶的“标准像”。不过所有这些雕像、照片、油画仍然和真正的鲍耶相去甚远。

提起匈牙利数学家，您可能最先想到的是数学史上最多产的保罗•爱多士（Paul Erdös）；提起非欧几何，您可能最先想到的是罗巴切夫斯基（Nikolas Lobachevsky）和黎曼（Georg Riemann）。那如果取交集呢？这不是一个空集，但却只有一个元素，就是本文的主人公——雅诺什•鲍耶（János Bolyai），这位匈牙利数学家和罗巴切夫斯基几乎同时独立地创建了非欧几何中的双曲几何。对于非欧几何这个挑战经典的成果，它的产生必定不会是一帆风顺，鲍耶也遇到了种种非议，甚至还有父亲的反对，今天就让我们带您走近这位数学家，看看他的生平和非欧几何在他手中诞生的过程。

欧氏几何

所谓非欧几何就是非欧几里得几何的简称，要了解非欧几何，我们还得从欧几里得几何，即欧氏几何，谈起。

欧氏几何是欧几里得于公元前 3 世纪创立的。欧几里得的《几何原本》是最早用公理化方法建立演绎数学体系的典范，是世界上流传最广、影响最大的一部数学经典之作。他精心选择了五个公理和五个公设，经过严密地逻辑推理，导出了欧氏几何的全部理论。这个理论所确立的公理化思想是数学的灵魂。所谓公理或公设，指的是不需要证明而加以承认的命题，它具有“不证自明”的特征。

如果说欧氏几何是一块美玉，那么这块美玉上有一处微瑕，就是第五公设。这条公设是指：

在同一平面内，如果一条线段与两条直线相交，在某一侧的内角和小于两直角和，那么这两条直线在不断延伸后，会在内角和小于两直角和的一侧相交。

首先，数学家们认为这条公设表述得过于复杂，根本不具备“不证自明”的特征，而且《几何原本》直到第 29 个命题的证明中才用到它。于是，数学家们自然就想用一种新的思路去处理它。这首先就要解决一个问题，第五公设相对于其它的公设是否是一个独立的命题。如果是的话，就很简单了，只须用一个简明的等价命题去替代它。其次，数学家们也质疑它的独立性，总想利用其它几个公理和公设直接证明它，使它成为一个定理。就为这样一个看似简单的问题，数学家们竟然忙碌了两千多年，在证明它是否具有独立性方面没有取得任何实质性进展。不过在这个过程中，数学家们倒是发现了与第五公设等价的许多命题。其中最简明的一个是普罗克勒斯（Proclus, 410-485）提出的：

在同一平面内，过直线外一点有且只有一条直线与这条直线平行。

由于数学家们难以撼动《几何原本》的理论，一批哲学家和数学家对欧几里得的几何就表示出了绝对的信任。1736 年以后，从数学家克吕格尔（G. S. Kerügel）开始，就陆续有数学家和哲学家公开宣布，欧几里得几何的第五公设相对于其它公设是独立的，是不能被证明的。康德（Immanuel Kant）认为，欧几里得几何揭示的是“先天的、唯一的现实空间的概念”。哲学家黑格尔（G. W. F. Hegel）更加认为：欧几里得几何体系已经相当完备，不可能取得进一步的实质性进展了。

然而数学发展的历史总是让人无法捉摸。就在数学家和哲学家们忙于证明第五公设而一无所获时，有人用下面的两个命题代替第五公设产生了不同于欧几里得理论的几何学，也就是非欧几何。

罗巴切夫斯基（1792-1856）

（1）在同一平面内，过直线外一点可以最少引两条直线与这条直线平行。

（2）在同一平面内，过直线外一点一条平行线也不能引。

用第二个命题代替第五公设，黎曼开创了椭圆几何（也称黎曼几何），而鲍耶和罗巴切夫斯基不约而同地想到了第一个命题，开创了双曲几何。

鲍耶的生平

鲍耶的父亲法卡什 • 鲍耶（Farkas Bolyai）是当地一位有名气的数学和物理教师，毕业于德国哥廷根大学，和“数学王子”高斯是同学。共同的志趣使法卡什 • 鲍耶和高斯两人成为好友，分别后经常有书信往来，共同研讨数学问题，其中第五公设问题成为他们之间经常交流的一个话题。他的理论思考始终离不开研究欧几里得的《几何原本》，虽然研究第五公设的奥秘花费了他大半生的心血，但最终也没有取得任何有价值的成果。但是，他在将欧氏几何的严密逻辑体系拓展到算术、代数和分析的理论上做出了有益的探索，这些工作还受到了高斯的称赞。

雅诺什 • 鲍耶于 1802 年 12 月 15 日出生于当时的匈牙利的柯罗日瓦尔（Kolozsvár），现在的罗马尼亚的克劳森堡（Cluj-Napoca）。他小时候，父亲在当地的加尔文

匈牙利分别于 1960 年与 1975 年发行的纪念鲍耶父子的邮票及他们的故居

主义学院（Calvinist College）教书；和当时的传统相似，父亲除了教数学外，还充当物理和化学老师。父亲希望自己的儿子成为一名数学家，并也沿着这个方向作出努力。同时，父亲认为光有一个智慧的大脑还不够，健康的身体发育应该是更重要的。所以小鲍耶小时候是德智体全面发展，这也为他成年后成为职业军人打下了良好的身体基础。

小鲍耶小时候就表现出了包括数学能力在内的全方位才能，整个一个小神童的形象：

他四岁时就可以分辨某些几何图形，就可以理解正弦函数，可以找出最知名的星座。五岁的时候他就有很强的阅读能力，并且这个能力几乎是自己独立开发的。他在学习语言和音乐方面表现了令人羡慕的天才。 他七岁时开始拉小提琴，他几乎不费劲地就可以演奏一些很困难的曲目。

另一方面，小鲍耶生活在一个困难的家庭。父亲虽然在大学教书，但薪水微薄；虽然有一些兼职和外快，家庭的经济状况仍然很差。更糟糕的是，小鲍耶的母亲并非是一个称职的母亲，未能给他提供一个良好的家庭环境。

小鲍耶九岁以前基本上受的是私塾型的教育。父亲亲自教他数学，其它小学科目由当地最好的大学生家教。他九岁正式走进中学的校门。到 13 岁的时候，他已经掌握了分析力学、微积分等高等数学和力学科目；虽然父亲仍然是他的导师，这个时候他已经能够轻松地参与父亲任教的加尔文主义学院针对大四学生的专业课程。 鲍耶尤其对欧几里得的几何学情有独钟，并且独立发现了一条重要定理：任何两个面积相等的多边形，将其中一个经过有限次分割，一定能够重新拼接成与另一个全等的多边形。

1818 年，鲍耶 16 岁时，父亲写信给高斯，请他让自己这个天才的儿子住在他家并成为他的弟子。让父子两人非常失望的是高斯一口拒绝了。很难知道高斯拒绝的原因。否则小鲍耶能够在大师身边吸收科学营养，在哥廷根这个数学中心成长，可能对世界数学会有不一样的影响。

1817 年 6 月，鲍耶中学毕业。当时的匈牙利和附近的维也纳大学还不能提供高质量的数学教育，老爸也很难负担得起送儿子去国外更负盛名的大学去留学。经过痛苦地抉择，父子俩决定选择维也纳皇家工程学院的军事工程专业。鲍耶从 1818 年到 1822 年在皇家工程学院用了四年时间完成了七年的课程。他是一名出色的学生，从第二年开始学业就名列前茅。同时他也是学校的一名优秀运动员，并继续他的小提琴演奏，在维也纳参加业余表演。

鲍耶 1823 年参军成为工程兵的少尉，并被派驻在蒂米什瓦拉（Temesvár）的军事基地。 在 11 年的军旅生涯里，他被誉为是奥匈帝国军队中最好的剑客和最优秀的舞蹈家。 他既不抽烟也不喝酒，甚至连咖啡也不沾，时时保持着纯真和谦虚的品德，这在当时的军人里是很稀有的。令人惊讶的是，他还无师自通地掌握了九门外语，包括汉语和藏语！

鲍耶的数学研究

大约在 1820 年，在维也纳学习的鲍耶踏上了与老爸同样的路径，试图用一个可以从其它途径推出的公理来取代欧几里得的平行公设。开始，他也是从正面入手，试图用欧氏其它公设来证明平行公设，结果失败了。其父坚决反对儿子堕入在他看来是前途渺茫的深渊，1820 年写信责

令儿子必须停止这项研究，信中说：

希望你从第五公设的研究上止步，你即使耗费所有的时间，也不可能证明这个问题……，我的青春和快乐已经空抛在这里。这个无底的黑暗或许可以吞吃掉一千个灯塔式的牛顿，这个夜任何时候也不会在大地上光明。

鲍耶显然没有听从父亲的忠告。但他开始了另一个路径：他遗留的笔记本表明他 1820 年已经开始研究双曲几何了。 1823 年 11 月 3 日他在给父亲的信中说：

……（他）创建了一个全新的世界……（created a new, another world out of nothing）

不过稍后他在笔记本里加了几行注释，说那时这个理论尚未创建起来。到 1824 年，已经有证据表明他已经基本建立了一个完整的非欧几里得系统。1825 年 2 月，鲍耶亲自回到家乡柯罗日瓦尔，向父亲详细介绍自己的研究过程和成果，并请求帮助发表自己的论文。父亲的态度依然如故，对儿子阐释的研究成果难以理解，特别对“绝对几何”中的主要定理要依赖于一个任意常数而感觉迷茫，表示不能接受这种所谓“绝对几何学”。

“绝对几何”与欧氏几何的重大不同，明显表现在三角形内角和的差异上。在“绝对几何学”中，三角形的内角和是一个小于两直角 π 的变量，它随着三角形面积的增大而减小，当面积趋近于零时，它趋近于 π。更确切地说，有

$$\triangle ABC \text{ 的面积} = K[\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)] \quad (1)$$

其中 K 是取定的一正常数，差 $\pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$ 称为 $\triangle ABC$ 的“亏值”。上式表明，三角形的面积与这个三角形的亏值成正比，易见当 $S_{\triangle ABC}$ 增大时，亏值亦增大，从而内角和减小。

可能太难了，或者因为儿子不听话，父亲的反应极不热烈。 这使得鲍耶这次回家感觉很差，乘兴而来，败兴而归。1826 年，他在驻军基地巧遇了一个船长沃尔泽 • 冯 • 艾克维尔（Wolther von Eckwehr），此人曾经是他在维也纳皇家工学院的数学老师。他把论文的德文抄稿寄给母校的数学老师，请求评审和支持，不但石沉大海，手抄稿还被遗失了。

直到 1830 年，鲍耶在部队换防去另一个地方伦贝格（Lemberg）的途中决定再次回家看看。这次情形大不一样，父亲已经看懂了儿子的工作，知道这是了不起的创新。他强烈建议鲍耶把他的工作写出来，作为附录放在他自己即将出版的著作《写给好学青年的数学原理》（*Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae*）第一卷的末尾里。这是一个伟大的建议。正如鲍耶后来写的那样：

高斯（1777-1855）

如果不是我的父亲敦促甚至强迫我立即把我的工作写在纸上，可能附录的内容永远难见天日。

就这样，鲍耶的不朽之作《空间的绝对几何学》（*Appendix Explaining the Absolutely True Science of Space*）得以流传了下来。这篇被压缩到 24 页的论文，是鲍耶一生中发表的唯一论文。由于论文压缩得过于简洁，内容越加显得抽象深奥，即便数学家都难以读懂，严重影响了这一伟大思想的传播。

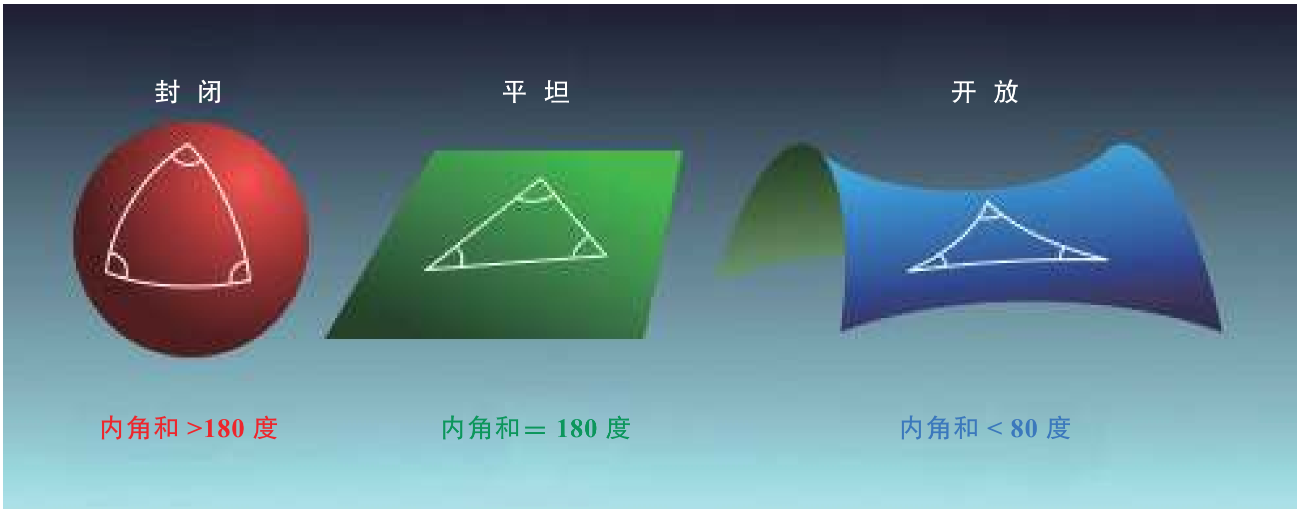
1831 年 6 月 20 日老鲍耶写信给老同学高斯，并将儿子《附录》样稿寄给他，想听听他的意见，但高斯没有回信。1832 年 1 月 16 日他又给高斯去信，这次终于有了回音。高斯在 3 月 6 日的复信中写道：

关于你儿子的工作，当我一开始便说我不能称赞他时，你一定会感到震惊……，因为称赞他便等于称赞我自己，文章所有内容，你儿子采取的思路、方法以及所达结果，和我在 30 至 35 年前已开始的一部分工作完全相同，我真是被这些结果吓住了，……，但我本来就是不愿发表的，……

虽然高斯在信中夸奖鲍耶是

一流的天才青年几何学家（I regard this young geometer Bolyai as a genius of the first order）

但鲍耶看到信后还是感到心情沉重：他不相信别人比他更



在双曲抛物面上的一个三角形，内角和小于 180 度

早达到同一结果，认定高斯在这个发现上要夺优先权。尽管他后来相信高斯所讲的是真话，但仍认为高斯没有公开自己的发现是一个不可原谅的错误。

毫无疑问，高斯信中说的是事实。 从他 1824 年 11 月 8 日写给弗朗茨 • 托里努斯（Franz Taurinus）的信中可以看出他对非欧几何的认识：

> 一个三角形的三个内角和小于 180°这一假设可以导致一个奇怪的几何学，这与我们现行的“欧几里得几何”相当不同，但却也是可以自圆其说的。我已经可以把这个理论发展到非常满意的情形，唯一不完美的是要确定一个事先未知的常数 。

高斯早于自己知道非欧几何理论对鲍耶是沉重的打击；他从此变得一蹶不振。他开始变得像另外一个人，脾气暴躁，极难与人相处。更糟糕的是，他的身体也出了问题，经常发烧，使他很难胜任军队事务。1833 年 6 月 16 日他不得不提前退伍，靠退伍金维持生活，并且短期里回到父亲身边同住。

不久鲍耶离开父亲，搬到偏僻的多马尔德（Domald）地区的一个小乡村。1834 年，他与当地一位妇女结婚，生有三个孩子，生活贫困潦倒，父子、夫妻感情都有很多问题。1856 年，他的父亲去世，同年，他与妻子离婚。

鲍耶怀有极深的数学情结，尤其是对非欧几何的思考从未停止。鲍耶甚至还尝试过将非欧几何的理论扩充到立体几何的工作，重点研究过绝对空间中四面体的体积问题。但是，鲍耶一直都不知道，远在几千里之外的俄国有一个叫罗巴切夫斯基的数学家，和他做着同样伟大的工作，直到 1848 年，他获悉罗巴切夫斯基早于他三年，在 1829 年就发表了非欧几何的研究成果。这件事情激起了他的思想波澜，一度怀疑这是高斯在幕后操纵的闹剧。倒是他的父亲对待这件事情的态度显得洒脱，他写信劝慰鲍耶说：“许多思想都有自己产生的时代。在同一时代它们又在不同的地点被发现，恰似春天的紫罗兰在阳光明媚的大地上到处开放一样。”

除了非欧几何的伟大工作之外，鲍耶也曾在复数理论的研究方面投入了很多精力。1833 年，他获悉莱比锡大学的数学研究机构征询关于“虚量的严格几何构造”的学术成果，他立刻整理投寄了一篇关于虚数理论的论文，猜想在复数理论中存在“超复数”，并且构造了“三维复数”的一种表示法，这个结果同样没有引起数学界的关注。后来，数学家哈密尔顿完满地解决了这个难题，建立了成熟的理论。鲍耶从此对公开发表论文感到心灰意冷，虽然留下了两万页的数学手稿，但是，从此以后，他再没有试图发表过一篇数学论文。

1860 年 1 月 17 日，鲍耶在贫病交加中结束了凄惨的生命。他死于肺病，被埋葬在奥匈帝国的一个偏辟小镇茅罗什瓦萨尔海伊（Marosvásárhely）的墓地里。

非欧几何理论的确立和影响

鲍耶去世后的几年里，非欧几何的理论在国际数学界仍然时常遭到讥笑和反对。直到 1868 年，意大利数学家贝尔特拉米（E. Beltremi）利用微分几何的最新研究成果，在现实空间里发现了可以实现非欧几何的一种现实模型，它是形如喇叭状的一种曲面，称为伪球面。非欧几何的理论开始引起了数学界的关注。20 世纪初期，非欧几何理论

在爱因斯坦的广义相对论中得到证实和应用，同时在粒子微观空间领域研究中也得到证实。数学家们才真正认识到空间形式原来不仅仅只是欧氏几何里的三维空间，欧氏几何之外还存在另外的几何。非欧几何的理论才能更加精确地描述和深刻地揭示任意的空间形式。因此，数学家们从根本上改变了对几何本质的原教旨理解。非欧几何的理论直接影响了一百多年来数学许多领域的发展走势，而且对天文学、宇宙学和天体物理学的发展以及人类时空观念都产生了极为深远的影响。正如爱因斯坦（Albert Einstein）所指出的："大量事实已经证明：从非欧几何发展起来的思想是无可限量的。"

1894 年，鲍耶这位非欧几何的拓荒者离开人世 34 年后，匈牙利数学物理学会在偏僻小镇的荒郊找到了鲍耶的坟墓，他们在这座坟墓上竖立起鲍耶的雕像，并把他传世的唯一论文《空间的绝对几何学》列入世界数学经典之作，藉以纪念他创立非欧几何的不朽功绩。作为非欧几何创始人之一的他生前穷苦潦倒，学术思想无人重视，去世三十多年后，终于和高斯、罗巴切夫斯基一起，被数学界公认为非欧几何的创始人之一。

1905 年，匈牙利科学院为了纪念雅诺什•鲍耶这位非欧几何的创始人，宣布设立"鲍耶奖"，奖金为一万克朗，以奖励在过去五年中为数学的进步做出巨大贡献的数学家。第一届"鲍耶奖"授予了数学大师庞加莱（J. H. Poincaré）。1910 年秋天，第二届"鲍耶奖"授予了数学大师希尔伯特（D. Hilbert）。鉴于爱因斯坦将广义相对论的思想完全解析化，从而证明了把星际空间看作非欧几何空间的真实性，1915 年希尔伯特又亲自提名将第三届"鲍耶奖"授予伟大的物理学家爱因斯坦。国际数学界对鲍耶在数学历史中的地位予以了充分的肯定。

贝尔特拉米伪球面

作者简介：张小平，1957 年出生于广东省广州市。1978 年 2 月考入河南大学数学教育专业。高中在新疆就读时有幸成为张景中院士的学生。现为新疆兵团第二师华山中学高级教师。曾在《数学通报》、《数学传播》等刊物发表文章二十多篇。

作者自述：刺克，曾就读于国内某非著名大学，后又在美国某非著名大学获得数学博士学位。其人恐高晕针怕寂寞，能说好动爱生活。

柳形上

想到来说说 7，或多或少缘于对数字 7 的喜爱。犹记得在数学与人文的课上，问课上的同学“你最喜爱哪个数字”这样略带游戏色彩的问题，有点惊奇的是，喜爱数字 7 的同学不在少数。但若问他们为何喜爱 7，却往往说不出所以然。喜爱就是喜爱，或许这也是一种理由。这一小品文的目的或在于演绎如下的心境：喜爱 7 可以有许多理由……且让我们漫步 7 的七彩世界。

1 人文篇

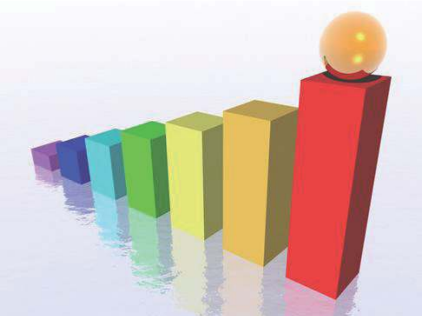
一个星期有 7 天，这是源自圣经传说，还是古时代的人们对数字 7 的偏爱？

在《圣经 • 创世纪》有这样的故事记载：在天地尚未形成之前，黑暗笼罩虚空；于是上帝用了六天创造了天地万物，而以第七天作为神圣的安息日。

相关的史料表明，“一星期 7 天制”最早起源于古巴比伦，其后被传到古希腊、古罗马等地。而在古代学者的眼里，宇宙间有 7 大行星——金星、木星、水星、火星、土星、太阳、月亮。于是一星期 7 天和其上这 7 大行星间的关联多少让我们有几许心灵的触动。

Sunday	Dies Solis, 太阳（Sun）日
Monday	Dies Lunæ, 月亮（Moon）日
Tuesday	Dies Martis, 战神（Mars, 火星）日
Wednesday	Dies Mercurli, 使神（Mercury, 水星）日
Thursday	Dies Lovis, 主神（Jupiter, 木星）日
Friday	Dies Veneris, 爱神（Venus, 金星）日
Saturday	Dies Saturni, 农神（Saturn, 土星）日

你是否有追逐过雨后彩虹的七色霞光？ 那里收藏有我们童真时代的梦幻时光。

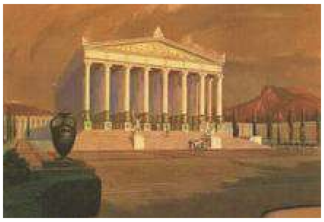


在许多文化中，“ 七 ”都是一个充满神秘色彩的数字。在西方文化中它或代表着智慧与完美，这样的理念影响深远。在中国文化中有七仙女的神话传说，抑或牛郎织女的七夕之鹊桥相会。在宗教文化里则有七大主教，神的七大礼物，七重天，七大守护神，七美德和七宗罪之说 ……

嗨，在你的记忆空间里，还有多少故事与 7 相约？

遥想在二千多年前，希腊作家安提佩特（Antipater）笔下的七大奇迹：

1. 埃及胡夫金字塔 2. 奥林匹亚宙斯巨像 3. 阿尔忒弥斯神殿 4. 摩索拉斯基陵墓
5. 亚历山大灯塔 6. 巴比伦空中花园 7. 罗德岛太阳神巨像



1	2	3
4		5
6		7

由于上述古代世界的奇迹大多已经毁灭，后人又提出了中古时代的世界七大奇迹：罗马斗兽场，亚历山大的地下陵墓，中国的万里长城，英国的巨石阵，中国报恩寺的琉璃宝塔，意大利的比萨斜塔，土耳其的索菲亚大教堂。在2001年，由法国人贝尔纳•韦伯创办的“新七大奇迹”基金会发起新七大奇迹的网上评选……下面的画片折射着七的魅力：

（i）在酸碱度测试中，7代表着中性——这是纯水的PH值。
（ii）一些科学研究如是说，7小时是人类每天最理想的睡眠时间。
（iii）人类的短时记忆容量以复述出7位数为正常水平。
（iv）“眼球经济”时代中的“7秒定律”：消费者往往会在7秒内决定其购买意愿。
（v）“7年之痒”——这或是婚姻要经历危险的那一时段。
（vi）西方有俗话说，如果你打碎镜子将会有7年不走运。

这里还有一则人类的悲剧与7相关：美国失事的两架航天飞机，“挑战者”号（1986年）和“哥伦比亚”号（2003年），都是有7名宇航员丧生。

话说在2007年到来之际，英国《独立报》曾列举了77个与人类有关的数字“7”。

上面的这些七星瓢虫被认为是幸运的象征。其背上有七个点；还有点巧合是它们的寿命比较长，平均有77天；这是一种益虫。

在文学的世界里，当有许多的画片连接着七的印象。画说童话中的白雪公主也是得到7个小矮人的帮助。《白雪公主》（缘自德国著名童话集《格林童话》）是许多人童年最喜欢听的故事之一。话说一个可爱美丽的公主因为后母嫉妒其美貌而被迫逃到森林，偶遇善良的七个小矮人。最后在他们帮助下，克服了后母的诅咒，找到真爱的王子的故事。

相约7的动画片当还有很多很多……

白雪公主与七个小矮人

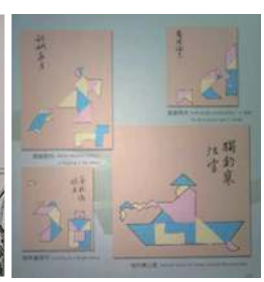
2 七巧板的楼阁

下面的这二组图画中，第一组是由七巧板拼成的各种形态的图；而第二组的画面则是经由七巧板组装的书架。这些图案都折射着七巧板世界非凡的魅力。

多姿多彩的七巧板拼图

经由七巧板组合而成的书架

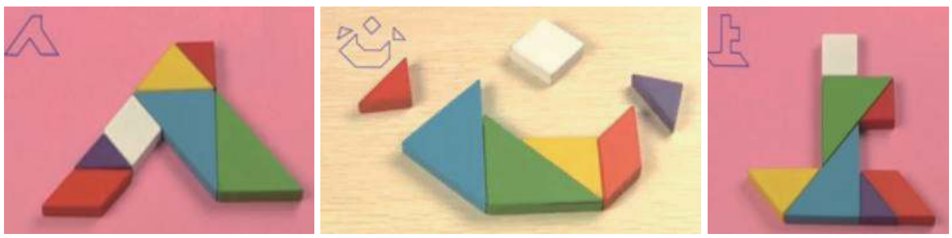
还记得么？ 在我们的孩提时代，有许多次与七巧板游戏相遇。画片中的“七巧板”由一个正方形分割而得，中有五种不同的形状，共有七块；奇妙的是，这七块看似简单的图案却可以拼排成千变万化的几何图形，形似各种自然万物，“纵横离合，变化无穷”。



七巧板起源于我国宋代，最早被称作“燕几图”，而后演变成明朝的蝶翅儿，最后形成清初到现代的七巧板。在国外被称为“Tangram”意即“中国的图形”……19 世纪初，七巧板流传到西方，引起人们的广泛兴趣，并迅速传播开来，被誉为“东方魔板”。

其虽然只有 7 块，却可以变幻出千变万化的形象图案。

3 种“seven”的七巧板呈现



七巧板与汉字例证

这里还有一幅由 11 副七巧板拼出的“数学”星空——

3 数学篇

在数学的天空，闪烁有众多 7 的星点。

最早的谜题——

问题一

这里一共有 7 间房子，每个房间有 7 只猫，每只猫可以抓 7 只老鼠，每只老鼠会吃掉 7 穗麦子，每穗小麦能够磨 7 份面粉。问：这些猫总共可以减少多少份面粉的损失？

这个古老的迷题可以追溯到公元前 1850 年，来自由古埃及书记官阿美斯抄写的《莱因德纸草书》。

经由简单的等比数列的知识，我们可知这 7 个房间中的这些猫可以减少 7^5 份面粉。

上面的阿美斯谜题在后来的岁月中影响深远。距离其几千年之后，有一个名曰“圣伊夫之谜”的问题出现在斐波那契的《算盘书》上，这部经典的书出版在 1202 年。与“圣伊

夫之谜”相约的诗呈如下：

问题二

我赴圣地伊夫斯，路遇一男携七妻；一妻各把七袋负，一袋各装七猫咪。猫咪生仔数又七，几多同去伊夫斯？

这个有趣的问题说的是，某天我在去圣地伊夫斯的路上，遇上一个带着 7 个妻子的男子，他的每个妻子都肩负着 7 个袋子，每个袋子里装着 7 个猫咪，而每个猫咪又生有 7 个小猫，问同去伊夫斯的人物共有多少？ 这个谜题的谜底或是 $1+1+7+7^2+7^3+7^4$。

下面的这个问题也可视为阿美斯谜题的一个变形。

问题三

话说 7 个老翁去罗马，每人有 7 匹骡子，每匹骡子负 7 个袋子，每只袋子装有 7 块面包，每块面包配有 7 把刀，每把刀配有 7 个鞘。求总数是多少？

在这里还有一个趣之问与 7 相约——我国古代的”浮萍七子“趣题:浮萍夜产 7 子（连同母萍），则一叶浮萍，逐日可得浮萍数，会是一个等比数列：

$$1, 7, 7^2, 7^3, \cdots$$

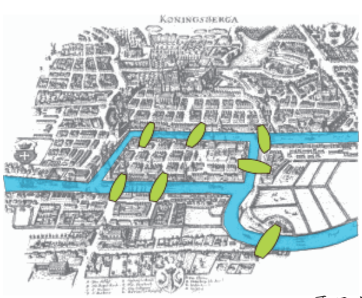
在相隔数世纪的阿美斯纸草书，斐波那契的《算盘书》，还是童谣集《鹅妈妈》中的谜题，都显示着抽象的 7 的力量之谜。

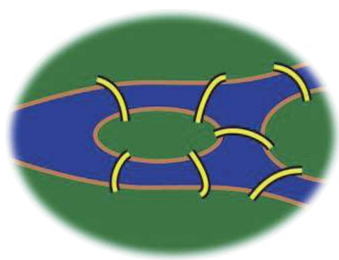
欧拉（Leonhard Euler）的七桥画片

在数学的历史之旅中，欧拉的“七桥问题”占有很独特的地位。这个有趣的问题源自生活的实际，经由数学与故事的相遇，奏响了拓扑学的先声，这个有趣的问题如是说，

七桥问题：话说 18 世纪，东普鲁士的首府哥尼斯堡是一座景色迷人的城市，普莱格尔河横贯其境，使这座城市锦上添花，显得更加风光旖旎。在河的中央有一座美丽的小岛。普莱格尔河的两条支流，环绕其间汇成大河，把整个城区分为如下图的几块。著名的哥尼斯堡大学，依偎在一河边——使得这一秀色宜人的城市，又增添了几多古雅与庄重的韵味！这里——河上有七座各具特色的桥把岛和河岸连接起来。这一别致的桥群，古往今来吸引了众多的人们来此漫步！

可不可能既不重复又不遗漏地走遍这七座桥？——这就是闻名遐迩的“哥尼斯堡七桥问题。”



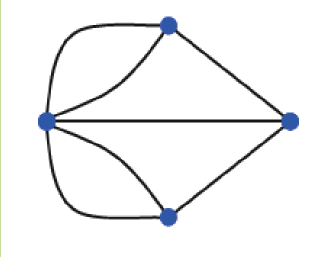


哥尼斯堡的城市画片

话说那里的人们在长时间的实践后，都得不到方法来解得上面的问题。于是最后去请教当时的大数学家欧拉，欧拉在思考后，回答说：“这是不可能的。”

图画中的数学：这其中的秘密在于，他将岛和两岸陆地看作点，而把桥视为线…… 这样，原来的七桥问题就抽象概括成了类左的关系图。

注意到在七桥问题所成之图形中，没有一点含有偶数条数（却有 4 个奇点），因此故事中的上述的任务是不可能实现的。



把岛、半岛和陆地的具体属性舍去，而仅仅留下与问题有关的东西，这就是四个几何上的“点”；他再把桥的具体属性排除，仅留下一条几何上的“线”，然后把“点”与“线”结合起来，这样就实现了从客观事物到图形的转变。这一种经由具体到抽象的思维方式，正是数学的精神所在。

回眸处，142857 是一个奇妙的数：

$$142857\times2=285714$$
$$142857\times3=428571$$
$$142857\times4=571428$$
$$142857\times5=714285$$
$$142857\times6=857142$$

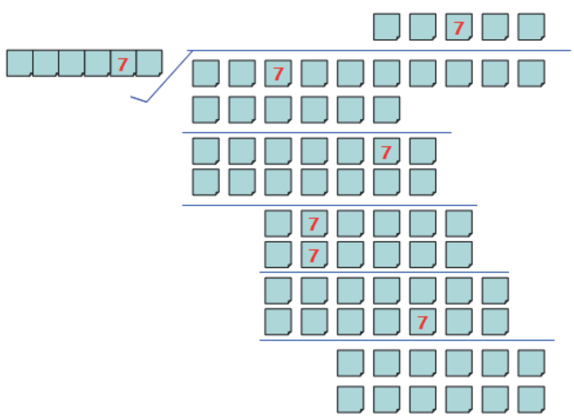
这个数的奇妙却以如下的方式与 7 相约：

$$\frac{1}{7}=0.142857142857142857\cdots$$

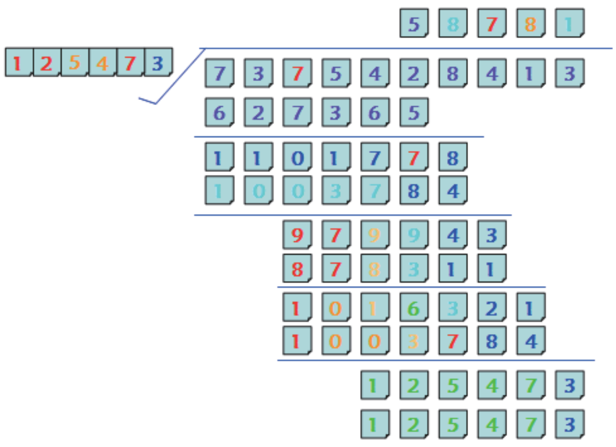
漫步于此，我们将邂逅一个有几许挑战性的问题。

下面的这个其名曰“7 枚 7”的问题源出英国数学家贝韦克（E. H. Berwick）之手……他于 1906 年在《学校世界》中发表了这个题目。在海因里希 • 德里（Heinrich Dörrie）的名著《100 个著名数学初等问题》一书中则有其比较详细的问与答。

问题：完形填空——在下面的这个算式中填入适当的数，使得被除数 / 除数 = 商数。



若你在 1 个小时里依然无法收获这个问题完整的解，则不妨来阅读如下的画片：



这里是如上解的一些注释：

在上面的算式中，记除数为 $D:=\overline{d_1d_2d_3d_4 7d_6}$，商 $Q:=\overline{q_1q_2 7q_4q_5}$

(i) $\overline{d_1d_2}=12$：这缘自如下的几点——

$D\times7=\overline{*7**}\Rightarrow \overline{d_1d_2}\le 13$. 于是可能是 10, 11, 12, 13。

经由 $\overline{11107d_6}\times9=\overline{9997**}\Rightarrow\overline{d_1d_2}=12$。

(ii) $\overline{d_3d_4}=54$；$q_4=8$：

经由 $\overline{12d_3d_4 7d_6}\times 7=\overline{87*****}$，可知 $d_3=4$ 或者 $d_3=5$。

再注意到 $\overline{124d_4 7d_6}\times9=\boxed{1116****}$ ……其第二位数不是 0，可知 $q_4=8$。再由 $\overline{125000}\times8=1000000$ 可知 $d_3=5$。

注意到 $\overline{125d_4 7d_6}\times8=\overline{10**7**}$ 可知 d_4 有两则可能：

$d_4=4$ 或者 $d_4=9$；

如若 $d_4=9$ 则 $\overline{12597d_6}\times7=\overline{8817**}\cdots$ 此与 $D\times7=\boxed{*7****}$ 矛盾。

因而有 $d_4=4$。

(iii) $d_6=3$；$q_5=1$，$q_2=8$，$q_1=5$：在于如下的表格中的一些信息的综合。

125470 × 9 = 1129230	125470 × 8 = 1003760
125471 × 9 = 1129239	125471 × 8 = 1003768
125472 × 9 = 1129248	125472 × 8 = 1003776
125473 × 9 = 1129257	125473 × 8 = 1003784
125474 × 9 = 1129266	125474 × 8 = 1003792

125470 × 7 = 878290	125470 × 8 = 1003760
125471 × 7 = 878297	125471 × 8 = 1003768
125472 × 7 = 878304	125472 × 8 = 1003776
125473 × 7 = 878311	125473 × 8 = 1003784
125474 × 7 = 878318	125474 × 8 = 1003792

125472 × 7 = 878304	125472 × 8 = 1003776
125473 × 7 = 878311	125473 × 8 = 1003784

在我们系本科生杂志《蚁趣》的第六期中，曾有这样一个问题：如下的数列的极限是多少？

$$\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}},\cdots$$

这是一道数学分析题。许多的同学提到，看到这样的形式，很自然地会想到用单调有界定理来证明其收敛性。然而经过观察，发现单纯地使用这条定理是不可行的：因为这一数列不是单调的。这个问题有一些个挑战性。

若记上面的数列为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，则对 $k = 1, 2, 3,\cdots$ 我们有

(i). $x_{4k-3} \geq x_{4k-2} \geq x_{4k+1} \geq x_{4k+2}$,

(ii). $x_{4k-1} \leq x_{4k} \leq x_{4k+3} \leq x_{4k+4}$.

上面不等式证明可借助于 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, n=1,2,3\ldots$ 和归纳法。

由数列的单调有界原理可知上面的两个子数列（i）和（ii）的极限都存在。我们设（i）中的数列的极限为 a，设（ii）中的数列的极限为 b（$a\geq 0; b\geq 0$）。

经由 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, n=1,2,3\ldots$，两边取极限得：

$$a=\sqrt{7-\sqrt{7+b}} \quad 和 \quad b=\sqrt{7-\sqrt{7+a}}\ .$$

由此可得 $a = b$。于是数列有极限可设为 a。再由 $a=\sqrt{7-\sqrt{7+a}}$（同时注意到 $0 < a < 3$）解得 $a = 2$.

综上所述，原数列的极限存在且为 2。

画外音：

这里有此题的另一种解法，其折射着不动点定理的力量。

令 $f(x):=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$，则易知 2 是函数 $f(x)$ 的一个不动点，因为我们注意到

$$f(2)=\sqrt{7-\sqrt{7+2}}=2\,.$$

于是我们有

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-f(2)|=|f'(\xi)(x_n-2)|\leq\frac{2012}{2013}\cdot|x_n-2|$$

此处用到了中值定理……进而不难证明原数列的极限存在且等于 2。

作者简介：柳彤上，现任教于华东师范大学数学系，从事几何与PDE方面的一些研究；缘于华师大的数学传统而对数学教育和数学普及的文化事业有所兴趣。

回眸处，二千多年前古希腊的学者普洛克洛斯如是说，“哪里有数，哪里就有美”。7的画阁，隐藏有七彩缤纷的童真与传奇。期待，有一日我们可以经由此演绎出一幕7的话剧。

顺藤摸瓜 *Pollard's Rho 及其它*

万精油

上期趣味数学专栏的题目是囚犯开盒子问题。为方便解答，我们把上期题目再列一遍。

上期题目：监狱里有 $2k$ 个犯人。监狱长把所有犯人找来对他们说："你们的名字完全随机地放在这 $2k$ 个盒子里，每盒一个。明天你们轮流到这里来，每个人打开一个盒子，看看是不是自己，不是再开下一个，最多可以开 k 个，看到自己的名字就算通过。如果所有人都通过，就释放你们。现在你们可以讨论一个策略，完了之后不准再有任何形式的交流"。

注 1：每个人看到自己名字的概率是 1/2。如果没有策略，释放的概率是 $(1/2)^{(2k)}$，当 $k = 5$ 时，成功率已经低于千分之一，k 更大时就几乎成为不可能事件。能不能设计一个策略，使得全体被释放的概率有一个与 k 无关的正下界？

注 2：$2k$ 个盒子从左到右一字排开。每次被打开后马上关上，不能挪动。不能做任何记号。事先商量好对策后犯人之间不能有任何交流。

这由于没有信息传递，初看起来，似乎没有任何办法提高成功率。因为每个人成功的概率是 1/2，大家的选择又相互独立，独立事件的总成功率就是每个成功率的乘积。这个乘积以指数的速度逼近于零。如果我们有办法让大家的 1/2 尽可能的集中（也就是说不独立），那么，我们就可以避开这 $2k$ 个 1/2 的乘积了。下面我们来介绍一种能让大家的 1/2 成功率集中的办法。

题目说盒子从左到右一字排开，所以可以给它们编号。从左到右为 1 到 $2k$。把犯人也编号，1 到 $2k$。每人都记住所有人的号。开盒时先开自己号码对应的盒，如果不对，开盒里的名字对应的盒，这样继续下去直到看到自己的名字。

因为盒子和名字都有号码，盒子和名字的关系可以看成一个置换。比如：(2, 5, 6, 3, 1, 4）就是一个置换，它把 1 换到 2，2 换到 5，3 换到 6，等等。每个位置对应的数字就是那个位置所换的数。因为数字有限，总有换回来的时候。比如上面这个置换把 5 换到 1，那么（1, 2, 5)就形成了一个子循环。我们可以把上面这个置换分解成两个子置换：(2, 5, 6, 3, 1, 4) =（2, 5, 1）(6, 4, 3)。事实上，如果不是一个大循环，所有置换都可以如此分解成独立的子循环。

囚犯们如果采用这个跟踪名字的策略，每人通过的充分必要条件是自己所在循环的长度不大于 k。所有人都通过的充分必要条件是这个置换没有长度大于 k 的子循环。我们来算一下这件事的概率。

设 $m > k$。假如 $2k$ 个元素的置换有一个长度等于 m 的循环（显然，这样的循环只能有一个）。先算一算这样的循环有多少个。先从 $2k$ 个元素里选 m 个，一共有 $C(2k, m)$ 种选法。一个循环没有始终，如果我们从任意一个元素（比如最小的那个）开始，另外 $m - 1$ 可以有 $(m - 1)!$ 种不同的顺序，所以，这 m 个元素可以有 $(m - 1)!$ 种不同的循环。剩下的 $2k - m$ 个可以有（$2k - m$）! 种顺序，所以，$2k$ 个元素的置换有一个长度等于 m 的循环的总数是 $C(2k, m)*(m - 1)!*(2k - m)!$，除以总排列数 $(2k)!$ 就是它发生的概率。 $C(2k, m)*(m -$

1)!*$(2k-m)!/(2k)!$ 化简后等于 $1/m$。M 可以是 $k+1$ 到 $2k$ 的任意数，把上面的概率从 $k+1$ 到 $2k$ 加起来，得 $1/(k+1)+\ldots+1/2k$, 这个和的上界为 ln 2。也就是说一个 $2k$ 个元素的置换有一个长度大于 k 的子循环的概率小于 ln 2。因此所有人都通过的概率大于 $1-\ln 2=0.30685\ldots$。这就是采用这种方法后集体通过的概率。这个数与 k 无关，比 1/2 的 $2k$ 次方要大很多。

下面我们来看一个具体例子。

假设有 8 个犯人。从左到右的盒子里的名字（用号码表示）的顺序是 3 7 8 5 4 2 6 1 这个置换群的分解是 (1 3 8), (2 7 6), (5 4)。没有周期大于 4 的子循环，所以每个人都会成功。每个人都先去开对应于自己号码的盒子，然后跟踪盒子里的号码，直到看到自己的号码 (打开 4 个盒子以内)。每个人看到的名字顺序列出来就是

$$
\begin{aligned}
1 &\rightarrow 3\ 8\ 1\\
2 &\rightarrow 7\ 6\ 2\\
3 &\rightarrow 8\ 1\ 3\\
4 &\rightarrow 5\ 4\\
5 &\rightarrow 4\ 5\\
6 &\rightarrow 2\ 7\ 6\\
7 &\rightarrow 6\ 2\ 7\\
8 &\rightarrow 1\ 3\ 8
\end{aligned}
$$

每个人都在开四个盒子以前就找到了自己的名字（号码），集体成功。

但是，如果从左到右的盒子里的名字（用号码表示）的顺序是 3 4 8 6 7 2 1 5 这个置换群的分解是 (1 3 8 5 7), (2 4 6)。有一个子循环周期大于 4。所以，有 5 个人开完四个盒子后都找不到自己的名字，集体失败。

根据我们前面的计算，在完全随机的情况下，一个置换群有周期大于其半数的概率小于 ln 2，所以，我们这个方法的成功率大于 $1-\ln 2$。一个与犯人个数无关的常数。

这个方法能够有这么一个与个数无关的成功率的原因是，每个人都遵循同样的原则，顺着一条路走下去。如果有人不成功，就有很多人都不成功。这样就把出错的机会聚集在一起，集体成功的机会自然就增大了。

在很多时候，在看似杂乱无章的地方找东西，最重要的就是要先找到这种可以顺着摸的藤。没有藤，造也要造一条藤出来。整数分解的一个很有名的方法，Pollard's Rho，用的就是这种方法。这个方法很有意思，我们就来简单介绍一下。

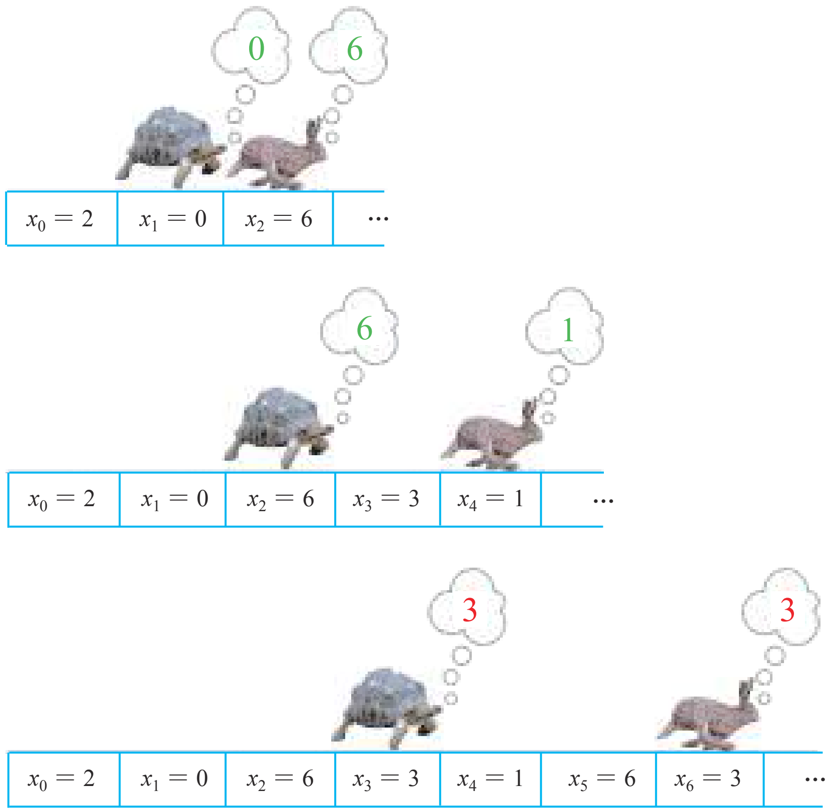
整数分解是一个很古老的问题，对小一点的数，最常见而且最有效的整数分解法是两千多年前古希腊数学家发明的筛法。这个“小一点的数”在不同情况下有不同的意义。如果用手算，5、6 位数就不小了，用计算机算，7、8 位数也算小。不过，不管用什么算，当位数超过 10 位以上时，这种算法的弱点就暴露出来了。因为它必须要从 2 开始，走遍被分解数平方根以内的所有素数，运算量上升的很快。

Pollard's Rho 不需要用一个个素数来筛，而是采用顺藤摸瓜的方法。这个藤的建立基于一个被称之为龟兔算法的寻找周期的方法。

假设有一个从有限集合到有限集合的映射，那么，一直重复这个映射（英文叫 iterated map），总会有一个周期（因为集合有限）。怎样找到这个周期的长度呢？最直观的办法是一直重复这个映射，记下它所经过的所有点，每次新映射，查看新映射的点是否在过去的记录中（也就是说要把过去经过的点都检查一遍），如果有，那么这两个重复点之间的映

射步数就是这个周期的长度。但是，这个方法有两个缺点，一个是需要保持一个数据向量（周期越长，向量长度越大），因为事先不知道这个周期有多长，还必须预备一个大向量。更致命的一个缺点是每次需要查看的数据越来越长。如果周期是 M，总共需查看 $M*(M+1)/2$ 次。龟兔算法不需要查这么多次。除了步数以外，只需保持两个数字，每一步只需检查这两个数是否相等。具体方法是，假设映射是 f，任选一个初始值，然后开始跟踪从这个点出发的两条轨迹。x, y 从同一点出发，x 每次映射一次，$x=f(x)$，y 映射两次，$y=f(f(y))$；因为 f 有周期。进入周期后 x 和 y 就会开始在周期里转圈，y 总会追上 x。当 $x=y$ 时，我们就知道 x 与 y 的步数差就是 f 的周期长度。为什么把它叫龟兔算法呢？x 就是乌龟，每次走一步，y 就是兔子，每次走两步。当兔子甩下乌龟一圈时，兔子与乌龟之间的步数就是周期长度。有人或许会问，如果乌龟不动，兔子走完一圈不是也可以碰到它吗？问题是，并不是所有初始点都在循环圈内，要走一段才会进入周期，所以乌龟和兔子都得动。下面的图会就是一个最好的说明。

这个图显示了龟兔算法应用到序列：2, 0, 6, 3, 1, 6, 3, 1, 6, 3, 1, ...



龟兔算法能被用来分解整数还依赖于一个准则——生日准则。生日准则说当一群人的人数超过 23 时，这群人中有两个人同生日的概率大于 50%。更一般的情况是，不断随机取两个数 X 与 Y，取到 $1.177\sqrt{p}$ 次以上时，这两个数模 p 出现同余的可能性大于 50%。在生日准则中，$p=365$，$1.177\sqrt{p}=22.49$。

准备工作做好了，我们现在回到整数分解。

假设 p 是我们想要分解的数 n 的一个因子，如果我们有一对数 x，y 模 p 同余，$d=$

gcd$(x-y, n)$ 就是 n 的一个因子。这里 gcd 表示最大公约数。如果 d 不是 1 或 n, 那么 d 就是 n 的一个因子。

Pollard's Rho 采用的方法就是构造某种映射，然后采用龟兔算法模拟随机数对。这些映射都是模 n 以后取值，生日准则告诉我们跟踪映这些数对足够次以后，这些数对出现同余的可能性很大，这样我们就找到了我们想要分解的数的因子。

具体一点，Pollar's Rho 算法可写成

输入 n, 这是我们希望分解的数

输出：n 的因子。如果这个因子不是 1 或 n，成功，否则失败。

1. $x \leftarrow 2, y \leftarrow 2; d \leftarrow 1$
2. While $d = 1$:
1. $x \leftarrow f(x)$
2. $y \leftarrow f(f(y))$
3. $d \leftarrow \mathrm{GCD}(|x-y|, n)$
3. If $d = n$, return failure.
4. Else, return d.

上面算法中，f 是一个映射，模 n 取值（映射到有限集合）。我们现在来看一个具体例子：

假设 $n = 8051$, $f(x) = \bmod(x^{2+1}, n)$,

给初始值 $x = 2$; $y = 2$;

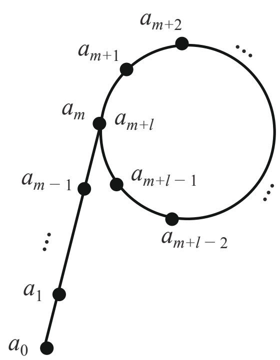
第一步：$x = 5$; $y = 26$; $\gcd(x-y, 8051) = 1$;

第二步：$x = 26$; $y = 7474$; $\gcd(x-y, 8051) = 1$;

第三步：$x = 677$; $y = 871$; $\gcd(x-y, 8051) = 97$;

三步就找到了 8051 的因子 97。

这个算法发明者是 John Pollar，算法名称后面那个 Rho 是因为这些数对除了开始的尾巴，很快就进入周期，很像希腊字母 ρ。见附图。



需要注意的是，因为这个算法建立在概率基础上，不能保证每次都成功，有时会失败。这时我们就需要变换映射函数 f。第二，如果 n 是素数，这个算法会一直执行下去，所以，执行足够次以后需要加一个停止指令。

Pollar's Rho 最有效的时候是 n 有小因子的时候。如果 n 的因子都很大，则效率不高。

Pollar's Rho 最辉煌的成就是首先成功分解了第八个费尔马数 $2^{2^8}+1$。这个数有 78 位数。筛法是不可能筛出来的。因为要走遍 39 位数以内所有的素数，走到太阳系毁灭时间也不够。

我们上面给的只是最简单的算法，基于同样原理的算法后来又被改造，发展出一些更有效更快的算法，有兴趣的读者可以自己去找来看一看。还有很多与 Pollar's Rho 不同，或者说比它更高级的整数分解算法，需要用到椭圆曲线。专门用来对付大整数分解。

整数分解算法之所以重要，是因为绝大多数网络安全系统都依赖于整数分解的难度。整数分解是目前网络安全系统研究的重要课题之一。

本期趣味题目：

棋盘定位：教授把你叫到他的办公室，给你一个国际象棋棋盘（8×8 方格），棋盘上有些格子里有棋子，有些格子里没有棋子。棋子都是翻过来的，也就是说每个棋子都一样。教授在棋盘上随便指了一格。你现在需要做下面两件事中的一个：

1. 选一个有棋子的格子，把棋子从格子中拿走。

   或者

2. 选一个没有棋子的格子，放一个棋子到格子中。

教授再把你的朋友叫进来，把你改变过的棋盘给他看。他的任务是从棋盘中看出教授所指的那个格子。

注意，棋盘的初始状态是随机的，教授所指的格子也是随机的。两个动作你只能选一样来做。你可以事先与你的朋友商量好一套利用棋盘上的棋子位置的信息传递系统，使得你的朋友总可以确定教授所指的格子。

《数学文化》2013 年第 2 期数学趣题答案

2012 与 4：

1

很显然，答案是多种多样的，譬如将 503 个 4 相加，就能得到 2012。以下给出一些较为简单（即使用 4 的个数较少）的答案：

$444\times4+4^4-4\times4-4=2012$	（9 个 4）
$4\times(4^4+4^4)-44+4+4$	（9 个 4）
$44\times44+44+(4+4)\times4$	（9 个 4）
$4^4\times(4+4)-44+4+4$	（8 个 4）
$44\times44+4!+4!+4!+4$	（8 个 4）
$4(444-4)+4^4-4$	（8 个 4）
$\sqrt{44^4}+4!\times4-4!+4$	（7 个 4）
$(4^4-4)\times(4+4)-4$	（6 个 4）
$(4^4-4)\times4\times\sqrt{4}-4$	（6 个 4）
$(4\sqrt{4})!\div(4!-4)-4$	（5 个 4）
$(4+4)!/(4!-4)-4$	（5 个 4）

三针重合：

3

首先，与传统的连续性旋转的时钟题不同，秒针每分钟都与其他两针重合一次，所以可以忽略秒针：只要时针分针重合，秒针总能与之重合。11：00 → 2：00 → 13：00 之间，时针分针只能重合一次。其余钟点，每小时内，时针分针重合一次。综上所述，一天 24 时内，时针分钟秒钟可重合 22 次。

劣质时钟：

2

$\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 如图所示。

设 $\alpha=k\times30^\circ+\alpha_0$，$\beta=l\times30^\circ+\beta_0$，其中 α_0 和 β_0 是指针超过最后一个整数刻度的角度，k 和 1 为位于 [0, 12] 内的整数。

由于时针每转过 30°，分针都转过 360°，所以，若分针指针互换后仍然是一个有效的时间，则有：

$$\begin{cases}\dfrac{\beta}{360^\circ}=\dfrac{\alpha_0}{30^\circ}=\dfrac{\alpha}{30^\circ}-k & ①\\[2ex] \dfrac{\alpha}{360^\circ}=\dfrac{\beta_0}{30^\circ}=\dfrac{\beta}{30^\circ}-l & ②\end{cases}$$

由 ①，得 $\beta=12\alpha-360^\circ k$。将其带入②化简得

$\alpha=\dfrac{360^\circ(12k+l)}{143}$，于是 $\beta=\dfrac{360^\circ(k+12l)}{143}$。

如果 $k=l$，交换时针分针后仍然是相同的时刻，此种情况下可以正常判断时间。

对于其余的 $A_{12}^2=132$ 种 $k\neq l$ 的情况，则无法做出判断。

因此答案为 132。

污损的账单：

4

设 N 分为单价，而 X, Y 分别是账单中缺掉的第一个和最后一个数字，则数字 $X293Y$（即具有值 $X\times10000+2000+900+30+Y$ 的数）必等于 22 乘 N，这样 $X293Y$ 恰好同时被 11 和 2 两者除尽，这意味着 Y 必是偶数。

由于单价大于 25 元，$22N>22\times2500=55\ 000$，因而 $X=6, 7, 8$ 或 9。11 是 $22N$ 的因数，从而也是 $X293Y$ 的因数。

利用对 11 的可除性检验法（各位数字的交错和被 11 除尽）我们有：

（记号：$11|X293Y$ 表示 11 恰好除尽 $X293Y$）

$11|X293Y\Rightarrow11|X-2+9-3+Y\Rightarrow11|X+Y+4$.

如果 $X=6$, $11|(6+Y+4)\Rightarrow11|(10+Y)\Rightarrow Y=1$，但我们需要 Y 是偶数；

如果 $X=7$, $11|(7+Y+4)\Rightarrow11|(11+Y)\Rightarrow Y=0$，它是可接受的；

如果 $X=8$, $11|(8+Y+4)\Rightarrow11|(12+Y)\Rightarrow Y$ 不是个位数；

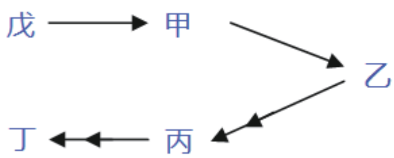
如果 $X=9$, $11|(9+Y+4)\Rightarrow11|(13+Y)\Rightarrow Y=9$，但我们需要 Y 是偶数。因此 $22N=72930$，则 $N=3315$。

所以单价是 33.15 元。

狼与羊：

5

设单箭头表示“某某说某某是羊”且双箭头表示“某某说某某是狼”。然后我们有：



假设戊是羊，则他说的是真话。因此：甲是羊，乙是羊，丙是狼，丁是羊。

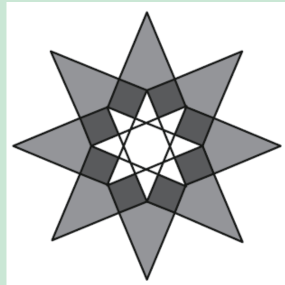
但这是不可能的，因为戊和甲两者都是羊与丁所说矛盾，这说明戊不是羊。因此戊是狼，所说的是假话，

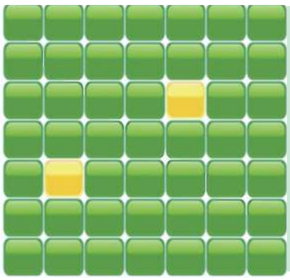
从而有：甲是狼，乙是狼，丙是羊，丁是狼。故总共有 4 只狼。

本期数学趣题

1

如图所示的白色正八角星，被 8 个边长为 1 的小正方形 (深灰色部分) 和 8 个“风筝形” (浅灰色部分) 包围，求每个“风筝形”的面积。





2

一个 7×7 的棋盘的 2 个方格填黄色，其余的方格填绿色。如果一种填色法可从另一种填色法经过在棋盘的平面中的旋转而得到，那么这两种填色法视作同一种。问有多少种不同的填色法？

3

一次考试有 200 名学生参加，分数是 1 到 100 的自然数。这 200 人的总成绩是 10101 分。请问，至少有几名同学会得到同一个分数？

4

话说月老是个马大哈，闭着眼睛将红绳乱拴一气，到头来不知多少痴男怨女被错配鸳鸯，有情无缘。只不知道他老人家糊涂到什么程度，哪怕只拴对了一对儿也好嘛。问：五对注定姻缘的男女，连一对儿都拴不对的可能性有多大？

5

数学老师和班主任打赌，班上的 50 名同学中，至少有两个同学生日相同。输家要请对方吃大餐，班主任信心满满准备痛宰对方一顿，毕竟一年 365 天，自己赢面居多。事实真的象他所想的那样吗？

谷歌数学涂鸦赏析（下）[1]

欧阳顺湘

25 艾达诞辰 197 周年

图 118 艾达诞辰 197 周年纪念（2012 年 12 月 10 日，全球）

图 119 英国首相府的艾达•洛夫莱斯画像（Margaret Sarah Carpenter 作于 1835 年）

2012 年 12 月 10 日，谷歌以涂鸦纪念艾达•洛夫莱斯（Ada Lovelace, 1815 年 12 月 10 日 -1852 年 11 月 27 日）诞辰 197 周年。艾达又名奥古斯塔 • 艾达 • 金（Augusta Ada King），常被称为洛夫莱斯伯爵夫人（Countess of Lovelace）。她在现代计算机诞生 100 多年前，就为巴贝奇[2]没有造出来实物的分析机设计了程序，因此有“程序之母”的称号。

在纪念艾达的涂鸦中，艾达身着长裙，用鹅毛笔于一张构成“Google”字样的长纸条上伏案书写，纸条旁边还同时显示有从巨型机到个人机和平板电脑等离不开程序的各型计算机。

历史上对科学有贡献的女性不多，且不少人随着时间的流逝而渐被遗忘。谷歌涂鸦对女性人物的纪念数据就在一定程度上表明了这一点。自 2001 年谷歌以涂鸦纪念特殊人物开始，直至 2008 年，谷歌涂鸦上才有女性人物被纪念。至 2012 年底，谷歌共纪念了 318 名男性，45 名女性，其中女性所占比例仅为 12.4%，每年女性出现的比例不超过 12.8%。

艾达是迄今为止，唯一被谷歌涂鸦纪念过的女数学家。谷歌为什么会想到以涂鸦来纪念她呢？在这个涂鸦发布当日，谷歌官方博客讲述了背后的故事。

2011 年，谷歌代表团访问位于伦敦唐宁街十号的英首相府。首相府中墙上有一高达 216 厘米、宽 137 厘米的大幅女士画像。参观过程中，代表团成员被问及这位有着维多利亚时代特征的盛装女士是谁，然而大多数人对她却是一无所

[1] 本文续《谷歌数学涂鸦赏析》之“上”和“中”（分别见 2013 年《数学文化》第 4 卷第 1 期和第 2 期）。

[2] 参附录一。

图 120 艾达•洛夫莱斯

知。在得知她是第一位程序员之后，这些整天与程序打交道的人都大为惊讶。返回美国后，他们开始进一步了解艾达，最终利用谷歌涂鸦和博客文字来纪念她。

艾达是英国伟大的浪漫主义诗人拜伦（乔治•戈登•拜伦[3]，George Gordon Byron, 1788-1824）勋爵的唯一婚生子女。正是艾达父亲的"负面影响"，使得她走上了学习数学与科学的道路。

拜伦出生于一个破落的贵族家庭，父亲是个浪荡子，在拜伦出生后不久即为逃避债务而遗弃家庭。拜伦的母亲带着他从小过着艰辛拮据的生活。只是拜伦十岁时，因继承了家族的爵位以及产业才得以改变。

1811 年，拜伦东方旅行三年归来，带回"四千行诗"。1812 年 2 月，拜伦的长篇叙事诗《恰尔德•哈洛尔德游记》（*Childe Harold's Pilgrimage*）第一、二章问世，引起轰动，就如他在日记中写的"我在一个美好的早晨醒来，发现自己成名了"，立刻成了著名诗人以及社交界的明星。

一方面，拜伦过着"放荡不羁"的生活，不但如他诗歌所写"且来享受醇酒妇人，尽情欢笑；明天再喝苏打水，听人讲道"，还如梁实秋所叙，"和无数的情人缱绻，包括他自己的异母所生的妹妹在内"，另一方面，因为少时的经历以及外出旅行之所见，拜伦和上流社会格格不入。例如，上议院通过法案，要对毁坏机器的工人判处死刑，而拜伦却在议会上为工人们的权益辩护，并写下政治讽刺诗。

艾达的母亲安妮•伊莎贝拉•米尔班奇（Anne Isabella Milbanke, 1792-1860）出生于贵族家庭，自小受到过良好教育。她还酷爱数学，被拜伦戏称为"平行四边形公主"。

1815 年，安妮与拜伦结婚。按查良铮所述，"这是拜伦一生所铸的最大的错误。拜伦夫人是一个见解偏狭的、深为其阶级的伪善所宥的人，完全不能理解拜伦的事业和观点。"

1815 年 12 月，艾达出生；不到一个月，安妮即与拜伦分居，带着艾达回到母亲家中。1816 年 4 月，拜伦不堪政客与上流社会借机发起的各种造谣中伤、攻击谩骂，永别英国，八年后死在希腊军中。

拜伦在第二次，也是最后一次离开英国后，续写了《恰尔德•哈洛尔德游记》第三、四章。他在第三章第一一三节中，以诗明志[4]：

我没有爱过这人世，人世也不爱我；
它的臭恶气息，我从来也不赞美；
没有强颜欢笑去奉承，不随声附和，
也未曾向它的偶像崇拜的教条下跪，
因此世人无法把我当作同类，
我厕身其中，却不是他们中的一人；
要是没有屈辱自己，心灵沾上污秽，
那么我也许至今还在人海中浮沉，
在并非他们的，而算作他们的思想的尸衣下栖身。

图 121 乔治•戈登•拜伦

[3] 参考查良铮（诗人穆旦）译《拜伦诗选》（上海译文出版社，1982 年）前作的《拜伦小传》。

[4] 中译见杨熙龄译《恰尔德•哈洛尔德游记》，上海译文出版社，1990 年。后面引用的此诗第三章另外两小节的译文同样来自该译著。

拜伦深知自己再也见不到女儿了，他在《恰尔德•哈洛尔德游记》第三章第一节中，开篇即与女儿告别：

可爱的孩子，你的脸可像你妈妈？
上次相见，你天真的蓝眼珠含着笑，
我的家庭和心灵的独养女儿，艾达！
然后分手了，——可不像这一遭，
那时还有希望。——猛然间我才惊觉：
周围已是起伏的海浪，风在唏嘘；
我走了；漂泊到哪儿，自己也不知道；
但是那海岸已经在我眼前隐去，
阿尔比温是再也不能使我欢欣，或者使我忧郁。

拜伦在这第三章最后还对女儿念念不忘，他在第一一五节中写道：

我的女儿！这一章诗以你的名字开始，
又以你的名字结束，诗到此写尽；
我看不到你的容貌，听不到你的声息，
但有谁更怀念你；多少年来总有个影
紧紧追随着你，它萦绕着你而不离分。
虽然你是永远再看不到我的脸颜，
但我的诗篇终会映射进你的眼睛，
渗入你的心坎，虽然那时我心已朽烂，
这是出自你父亲的手笔，他留下的声音和纪念。

拜伦追求自由、民主，讴歌各国的民族运动，但在安妮眼中，拜伦是“疯狂、邪恶且危险的”，因而不希望艾达受到其父亲那样不良品德的伤害，设法阻止艾达任何与她父亲相似的倾向。为此，艾达很小就开始接受科学与数学方面的教育。艾达的科学与数学老师有后来成为她丈夫的威廉•金（William King）以及著名数学家奥古斯都•德•摩根（Augusta De Morgan, 1806-1871）。安妮的精心培养使艾达获得了很强的数学素养，但并没能阻止她对父亲的同情。

艾达在 17 岁时与查尔斯•巴贝奇成了密友。艾达对巴贝奇建造分析机的想法极其着迷，而巴贝奇则对艾达的智力和写作能力非常佩服，赞她为“数字女巫（Enchantress of Numbers）”。

1842 年，意大利将军、政治家和数学家路易吉•梅纳布雷亚（Luigi Menabrea, 1809-1896）出版了介绍巴贝奇分析机的书《巴贝奇的分析机简要》（*Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*）。1843 年，艾达将这本书翻译成了英文。据巴贝奇在他晚年所撰自传《一个哲学家的生命历程》（*Passages From the Life of a Philosopher*, 1864 年）中的回忆，巴贝奇在得知艾达翻译了梅纳布雷亚的书后，问她既然自己对分析机这么熟悉，为何不自己写一篇原创文章？艾达回说，当初没想到这样做。然后巴贝奇即建议艾达针对梅纳布雷亚的书写一些注释。于是艾达在译文后连写了七篇后记，加起来是正文的三倍多[5]。

艾达在译注中给出了用分析机计算贝努利数[6]等问题的计算程序。因为巴贝奇对数字最感兴趣，所以只想到分析机可能成为强大的计算器。而艾达则预见到这样一台机器可以有更加广阔的用途。它不但可以用来表示数字，还可以表示单词与音乐，正如我们今日所实现的。

艾达年仅 36 岁即去世，与她父亲拜伦去世时年龄相同。根据她的遗愿，被葬于诺丁汉郡其父亲身边。为了纪念艾达，美国军方一个应用广泛的编程语言被命名为 Ada，这个语言是对另一个很有影响、同样以著名数学家的名字命名的编程语言 Pascal 的扩展。为了提高女性在科技和数学等方面的影响，每年的 10 月中的某一天被定为艾达•洛夫莱斯日（Ada Lovelace Day）。

26 玛雅历法纪念

图 122 玛雅历法纪念（2012 年 12 月 21 日，巴西、土耳其、意大利等共 40 余国）

[5] 参考 http://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html。

[6] 伯努利数是如下一常数列 $\{B_n\}$（取 $B_1=-\frac{1}{2}$）: $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}, B_5=0, B_6=\frac{1}{42}, B_7=0, B_8=-\frac{1}{30}$ ……。这是雅各布•伯努利为了解决所谓的“等幂和”问题，即为计算自然数序列的整数次幂部分和 $\sum_{k=0}^{m-1} k^n = 0^n + 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (m-1)^n$ 而引入的（这里 n 为正整数）。这个和为一个 n+1 次多项式，系数与贝努利数密切相关：$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k m^{n+1-k}$。例如，$0+1+2+3+\cdots+(m-1)=\frac{1}{2}(B_0m^2+2B_1m)=\frac{1}{2}(m^2-m)$, $0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2=\frac{1}{3}(B_0m^3+3B_1m^2+3B_2m)=\frac{1}{6}m(2m-1)(m-1)$。贝努利数的一个简单定义是利用级数展开 $(|x|<2\pi)$: $\frac{x}{\exp(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$。

(a) 海报

(b) 剧照

图 123 美国电影《2012》海报与剧照

地球和人类已平安度过 2012 年 12 月 21 日，然而，在此之前，民间盛传这一天是“玛雅历法预言”的世界末日。2009 年开始播映的科幻灾难片《2012》更以玛雅预言为背景，“呈现”了大地断裂、湖水干涸、埃菲尔铁塔倒塌、梵蒂冈崩溃、洪水来临等灾难场面。虽然许多人并不相信或以娱乐的心态对待此事，但也有不少人有疑虑乃至恐慌。

事实上，如我们后面将要解释，2012 年 12 月 21 日只是玛雅历法中的一个标志：一个计算周期即将结束，一个新的周期就要开始而已。谷歌涂鸦在这个特殊日期，用玛雅象形文字为元素，在形成谷歌徽标“Google”的同时，表示确切的日期“12 月 21 日”。谷歌设计涂鸦来纪念，是如往常对科技与数学的兴趣一样，关注玛雅人所创造的历法及其背后的数学和天文知识，祝福世界在下一个伯克盾里繁荣昌盛。

玛雅文明的历法、天文和数学知识为什么值得纪念呢？我们先来简单了解一下什么是玛雅文明。

玛雅文明出现在今中美洲的墨西哥南部、危地马拉、巴西、伯利兹以及洪都拉斯和萨尔瓦多西部等地区的热带丛林中，兴起于公元前 10 世纪，盛于 4-9 世纪。玛雅文明不可思议地高度发达：不知使用铁器，也不使用轮子，但却有着高超的建筑技术，建造了一座座布局严密、结构恢弘的巨型金字塔；玛雅人生产力低下，却观测到了非常精确的天文现象并制定了完整、复杂的历法系统。

在 8 世纪左右，玛雅人如谜一样地终止了建造自己的家园，大举迁移，放弃了已经高度发展的文明。有研究者认为，玛雅文明衰落的主要原因是以外部环境变化为导火索的内部相互残杀。在梅尔 • 吉布森（Mel Gibson）导演的关于玛雅人的电影《启示录》（*Apocalypto*, 2006 年）中，就展现了小部落被袭击，并以俘虏作活人献祭的血腥场面：玛雅祭司在金字塔顶端的神庙里主持祭祀，俘虏被剖开胸膛、活挖心脏进行烧烤，砍下的头颅沿着金字塔阶梯滚下。

《启示录》的末尾，两位追杀者和被追杀的主人公终于停止战斗，惊恐地看着海面上驶来的西班牙舰队。正是 16 世纪西班牙殖民者的入侵彻底毁灭了玛雅文明。西班牙人不但烧毁玛雅文献，还悉数杀害玛雅人中本来就为数不多的通晓玛雅文者。于是，解读玛雅文明，只有依靠散落

图 124 玛雅文明的雕刻艺术

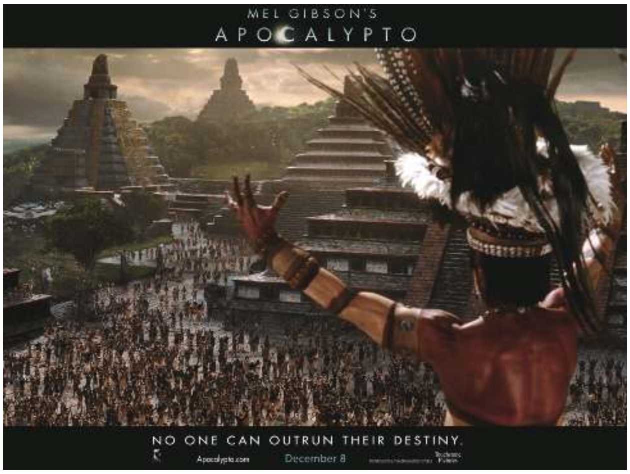


图 125 电影《启示录》宣传海报：玛雅金字塔上的祭祀

图 126 电影《启示录》剧照：西班牙人来了

图 127 《德累斯顿刻本》中的四页

在从林中的玛雅遗迹和幸存下来的四本玛雅刻本了。

第一位对玛雅文明进行破译的是欧洲 19 世纪一位著名的通才：通晓动物学、语言学和考古学等十几门专业的康斯坦丁•拉菲内克（Constantine Rafinesque, 1783-1840）。拉菲内克最先从《德累斯顿刻本》（*Dresden Codex*）解读出玛雅计算系统并于 1832 年宣布了他的发现：玛雅文本中的一点表示 1，一横表示 5。

德累斯顿图书馆的馆员弗斯特曼（Ernst Förstemann, 1822-1906）随后做了进一步研究。他工作的图书馆恰好有《德累斯顿手刻本》，同时他也恰好可以读到 1562 年下令烧毁玛雅文献的主教兰达（Diego de Landa）写的一篇文稿《尤卡坦诸事之关系》（Relación de las Cosas de Yucatán）。弗斯特曼喜好数学，利用他的数学逻辑，解读出玛雅人用来决定何时进行决战的天文表以及历法循环（Calendar Round）。

原来玛雅人是用二十进制来进行计算的。正如我们通常使用的十进制可能受启发于一双手的十个手指头一样，玛雅人使用二十进制可能是因为一双手的十个手指和一双脚的十个脚趾之和。而玛雅人用一点来表示 1 可能和他们习惯用一个可可豆作为“货币单位”有关。

在二十进制中，首先需要知道如何表达从 0 到 19 这二十个数字。玛雅人在公元前 36 年就已经开始用贝壳形状的符号来表示 0，这比印度和阿拉伯人使用 0 都要早很多，而西方直到 12 世纪才用到 0。不过玛雅人只是在位值计算中使用 0，并不将 0 单独作为数字使用。首次将 0 用作数字计算是印度人的重要贡献。然后，玛雅人用一点和一横分别表示数字 1 和数字 5，以及四点表示数字 4，两横表示数字 10，两横上加四点表示数字 14 等。

二十进制的规则与十进制类似：处于第二位的数字表示这位数字的 20 倍；处于第三位的数字表示这位数字的 $400 = 20^2$ 倍，依此类推。所以，若要表达十进制的 17 469，则可将其表为 2.3.13.9，因为：

$$17\,469 = 2\times 20^3 + 3\times 20^2 + 13\times 20 + 9.$$

就如我们对十进制中的 10、100、1000 和 10 000 有专门的称呼（十、百、千和万）类似，在玛雅语中，20、400、8000、160 000、3 200 000 和 64 000 000 分别叫做 kal, bak, pic, calab, kinchil 和 alau。

作为比较，玛雅人简单地用一点、一横和贝壳符号这

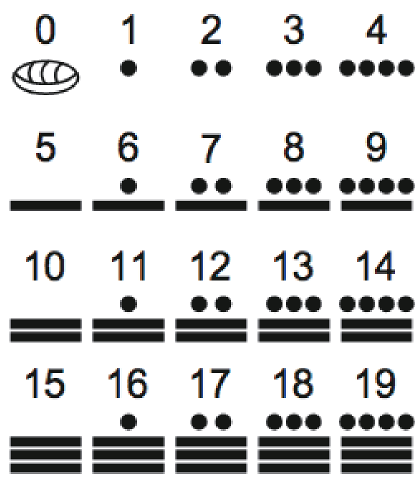


图 128 玛雅数字表示

三个符号的组合来表示数字，而罗马数字则需要用到七个符号，即 I（1）、V（5）、X（10）、L（50）、C（100）、D（500）和 M（1000），在表示数字时要用到如重复数次、右加左减等规则。例如，罗马数字 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII、IX、XI、XII、XIII、XIV、XV、XVI、XVII、XVIII、XIX、XX、XX1 分别表示从 1 到 21 这些数字。

玛雅人使用纯粹的二十进制来计数和进行加减法运算，但在表示时间时，对二十进制做了适当修改：第三位不是以 20 为底，而是采用 18。也就是说，在修正了的二十进制中，从低到高的位值分别为：1、20、360 ＝ 18

$\times 20$、7 200 = $20\times18\times20$ 和 144 000 = $20^{20}\times18\times20$ 等。

玛雅人的二十进制很明显地反映在他们的历法中（如一个月总是 20 天），特别是玛雅人对二十进制的修订使得他们可以更为精确地计时。

玛雅历法是一个主要由三种历法（三个年）组成的系统：卓尔金历（Tzolkin 或 Tzolk'in）或宗教年，哈布历或太阳年，长计历或官方年。

卓尔金历用于宗教目的，13 个月，每月 20 天，全年共 260 日。

哈布历全年共 365 天，这与现行公历类似。只是哈布历中有 18 个月，每月 20 天，另外 5 天是禁忌日，让人们反思过去，考虑今天和未来。类似于中国传统用天干和地支结合起来纪年一样，玛雅人也将卓尔金历和哈布历结合起来形成历法循环：某一天既用卓尔金历也用哈布历表示。这一循环要经过 18 980（260 和 365 的最小公倍数）天或说 52（= 18 980/365）个太阳年、73（= 18 980/260）个宗教年。

玛雅人用的“长计历（Long Count）”，希望表示自玛雅元年开始的每一天。 在长计历中，

- 1 天（Kin）为最小的单位；
- 20 天为一月（乌纳，Uinal）；
- 18 个月为一年（盾，Tun，360 天）；
- 20 盾为一卡盾（Katun，20 年）；
- 20 卡盾为伯克盾（Baktun，400 年）；
- 20 伯克盾为一皮克盾（Pictun，8000 年）；
- 伯克盾之后依次还有卡拉盾（Calabtun）、金奇盾（Kinchiltun），直至阿托盾（Alautun，18×20^7 天）。

由此可见长计历能纪的时间为 23 040 000 000 天。从玛雅纪元算起，2012 年 12 月 21 日恰好是第 13 个伯克盾结束、一个 5 200 年的创世周期结束的日子。所谓的“世界末日”就如我们都要经历的年年岁岁、岁岁年年一样平常，只是纪年的方式不一样而已。

图 129 2013 年 6 月 6 日，在墨西哥访问的习近平主席游览了古玛雅文化遗址奇琴伊察，图为习近平夫妇和墨西哥总统涅托夫妇合影，背景是卡斯蒂略金字塔

精确的历法依赖于精确的天文观测。例如，他们精确地计算出一个回归年，即地球绕太阳公转的时间为 365.242 129 天，与我们现在所知的 365.242 198 天相差无几；他们观测得到的金星年（金星绕太阳公转一年）为 584 日，与现代人的测算 583.92 日相差很小。

玛雅人先进的历法知识也反映在他们的建筑中。他们每隔 52 年要建造一座大型建筑物，每一座完成的建筑物都需符合天文上一定的要求。最有代表性的建筑之一是墨西哥尤卡坦半岛的卡斯蒂略金字塔（El Castillo，西班牙语，意为城堡）。 玛雅人崇拜太阳神，认为带羽毛的蛇神，是太阳神的化身，所以这一金字塔又被称为羽蛇神金字塔或库库尔坎（Kukulkan，玛雅神话中羽蛇神的名字）金字塔。卡斯蒂略金字塔建于 11 至 13 世纪之间，高 30 米，总共有 365 阶，每一阶就代表哈布历的一天；在春分与秋分的日出日落时，金字塔的拐角在北面的阶梯上投下羽蛇神状的阴影，并随着太阳的位置在金字塔的北面移动。

27 拉马努金诞辰 125 周年

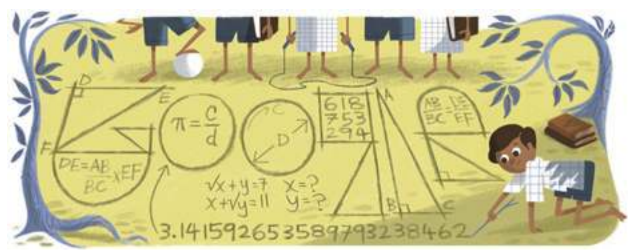


图 130 拉马努金诞辰 125 周年纪念（2012 年 12 月 22 日，印度）

2012 年 12 月 22 日，是印度充满传奇色彩的天才数学家斯里尼瓦瑟 • 拉马努金（Srinivasa Ramanujan, 1887 年 12 月 22 日 -1920 年 4 月 26 日）诞辰 125 周年的纪念日。因为拉马努金，2012 年被印度作为印度数学年纪念，而且从 2012 年开始，每年的 12 月 22 日被定为印度国家数学日。

谷歌印度以象征少年拉马努金在地面学习、书写数学结果的涂鸦来纪念他。涂鸦的内容有平面几何中的相似比、方程求解、幻方以及圆周率（涂鸦中写出 21 位）等内容。在涂鸦中，“Google”这六个字母用三角形、圆、半圆与正方形等几何图形来形成。

因为篇幅的关系，这里我们仅介绍纪念涂鸦中出现的

与拉马努金紧密相关的一些数学内容，即方程组、幻方与圆周率等。

拉马努金少年早慧。他的同学曾讲述的一个故事和涂鸦中的方程组

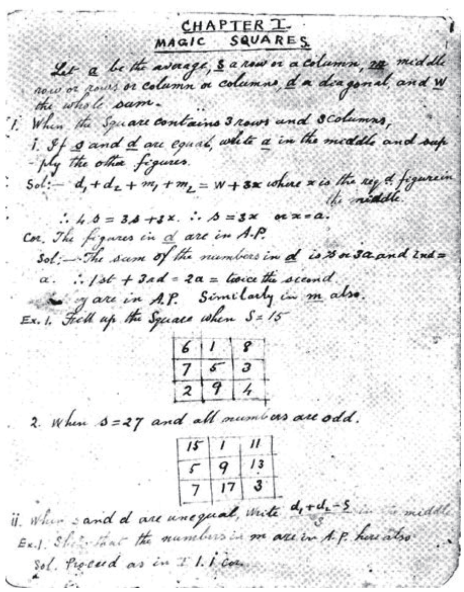
$$\begin{cases}\sqrt{x}+y=7,\\ x+\sqrt{y}=11\end{cases}$$

有关。拉马努金在中学读书时，一位高年级同学问他如何求解上述方程，这样的问题本是更高年级同学才学习的，但就像答案早就印在脑海中一样，拉马努金不假思索地给出了正确答案：$x=9$，$y=4$。

所谓幻方就是排列成 n 行、n 列的方阵，其中填入 1 到 n^2 这 n^2 个连续自然数，以使得每行、每列以及对角线上的 n 个数字之和均相等。这样的方阵被称为 n 阶幻方。显然，幻方与整数分拆有些联系，这或许是拉马努金对此感兴趣的一个原因。附录中我们将通过金庸小说中相关话题再作更多介绍。

拉马努金在独自研究数学的过程中将自己所得到的结果记录在三本笔记本上。第一本笔记本的第一章即是关于幻方的，有标题《幻方》（*Magic Squares*），而其它各章都没有标题。

拉马努金纪念涂鸦中出现的三阶幻方即是来自他的笔记本中的第一页上的第一个幻方。这个三阶幻方，将数字 1 到 9 排成三行三列，行和、列和以及对角线之和均为 15。此幻方顺时针旋转 90 度之后，恰为我国古代洛书上的幻方（参考图 162）。



CHAPTER I.
MAGIC SQUARES

Let a be the average, S a row or a column, m middle row or rows or column or columns, d a diagonal and W the whole sum.

I. When the Square contains 3 rows and 3 columns,

i. If S and d are equal, write a in the middle and supply the other figures.

Sol:– $d_1+d_2+m_1+m_2=W+3x$ where x is the req'd figure in the middle.

∴ $4S=3S+3x$. ∴ $S=3x$ or $x=a$.

Cor. The figures in d are in A.P.

Sol:– The sum of the numbers in d is S or 3a and 2nd = a. ∴ 1st + 3rd = 2a = twice the second. ∴ they are in A.P. Similarly in m also.

Ex. 1. Fill up the Square when S = 15

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2. When S = 27 and all numbers are odd.

15	1	11
5	9	13
7	17	3

ii. When S and d are unequal, write d_1+d_2-S in the middle

Ex. 1. Show that the numbers in m are in A.P. here also.

Sol. Proceed as in I. i. Cor.

图 131 拉马努金笔记本中的一页（来自 http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/notebookindex.htm），其中一个幻方被用于涂鸦中。

(a) 原雕刻

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

(b) 数字表示

图 132 印度耆那幻方

在拉马努金之前，印度历史上也出现过幻方。有世界文化遗产之称的印度中央邦北部的卡杰拉霍（Khajuraho）神庙建筑群中有一座耆那教（Jainism）的帕尔斯瓦纳特（Parshvanath）神庙，庙里有一个四阶幻方，距今已有约一千余年的历史。

拉马努金在圆周率 π 方面有不少贡献，发现了很多相关的公式。

下面与 π 有关的常数被称为拉马努金常数：

$$e^{\pi\sqrt{163}}=262537412640768743.99999999999925\ldots$$

它的特点是与整数非常地接近，而且联系了数学中常用的常数 e 和 π。

拉马努金在一篇名为《模方程与 π 的逼近》（*Modular Equations and Approximations to Pi*）的文章中提出了如下关于圆周率的著名公式：

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

这个级数收敛相当快速。例如，只取一项（$n=0$），就可以得到圆周率前 8 位十进制精度：

$$\pi\approx\frac{9801}{2\cdot 1103\cdot\sqrt{2}}\approx 3.14159273001.$$

1985 年比尔 • 高斯珀（Bill Gosper）将这个公式改写成连分数的形式，得到了圆周率的一千七百万位。其特点是不需连续计算圆周率。楚德诺夫斯基兄弟（David 与 Gregory Chudnovsky）改进了拉马努金的公式，不但计算可以间断，还可以用不同计算机计算，再将结果组合。他们的算法创造过几次圆周率计算的世界纪录，如 2.7 万亿（2009 年）、5 万亿（2010 年）、10 万亿（2011 年）位。

28 托里斯诞辰 160 周年

图 133 托里斯诞辰 160 周年纪念（2012 年 12 月 28 日，西班牙）

2012 年 12 月 28 日谷歌西班牙以涂鸦纪念该国工程师和数学家莱昂纳多 • 托里斯 • 克维多（Leonardo Torres y Quevedo, 1852 年 12 月 28 日 -1936 年 12 月 18 日)诞辰 160 周年。

1870 年，十八岁的托里斯随父亲迁到马德里，同时进入马德里技术大学的土木工程系读书。1873 年，在第三次卡洛斯战争期间，他曾休学志愿参加毕尔巴鄂（Bilbao）的保卫战。托里斯于 1876 年以优异的成绩毕业，并到他父亲任职工程师的铁路公司工作。但同年，他即开始了一次在欧洲大陆的长途旅行，考察欧洲先进的科学技术，特别是当时电的早期应用。后来他继承了一些遗产，便从铁路公司辞职，专心从事机械发明。

托里斯是一位天才的工程师。他是空中缆车设计先驱，世界上第二个演示了无线电控制的力量，他设计的飞艇在第一次世界大战中为英法所用，在自动化领域也取得了很大的成绩，是现代计算机和机器人的先驱。我们下面仅介绍与纪念涂鸦有关的一些内容：空中缆车、下棋机器和模拟计算器。

图 134 西班牙 1955 年发行的纪念托里斯的邮票，面值 50 比塞塔

美加边境的尼亚加拉河上有著名的尼亚加拉大瀑布。瀑布冲出的峡谷中水流奔腾不息，于下游 4 千多米处突然一转，激流形成了一个大漩涡。要仔细观赏大漩涡并一览其上下游的壮观景色，可以乘坐大漩涡上的空中缆车（Niagara Whirlpool Aero Car）。缆车属于加拿大，设计精巧，已经有很长的历史了：它在 1914 年到 1916 年间建造，1916 年正式对外开放，安全运行至今。今天，大瀑布，大漩涡和缆车都是非常吸引人的景点。

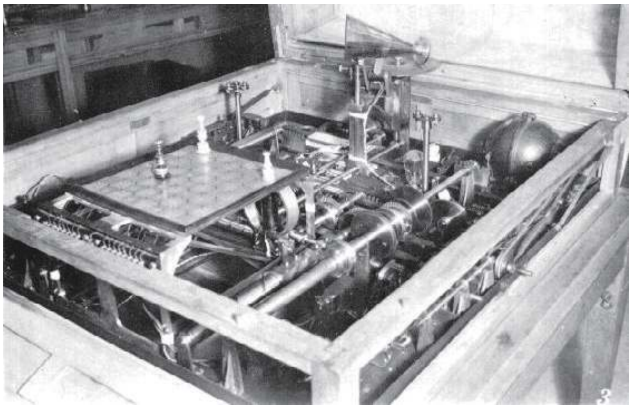
纪念托里斯的涂鸦上的缆车原型即为这个大漩涡上的空中缆车。该缆车是迄今唯一还存在的托里斯设计的缆车作品。这个缆车又名西班牙缆车，不仅是因为它系西班牙人设计，也是因为它是由西班牙人投资建造的。

历史上最早的“人机对弈”出现在 18 世纪晚期。奥地利的沃尔夫冈 • 冯 • 肯佩伦在 1770 年为取悦玛丽娅 • 特蕾西娅女大公而建造并展出了土耳其行棋傀儡。这是一个“自动下棋装置”，还能执行骑士巡逻，将马放在棋盘上，可使它走遍棋盘上每一格。这个装置因为击败了许多人类下棋高手而名声大噪。但后来被证明这其实是一场骗局：有一名棋界高手藏在机器里面进行操作。

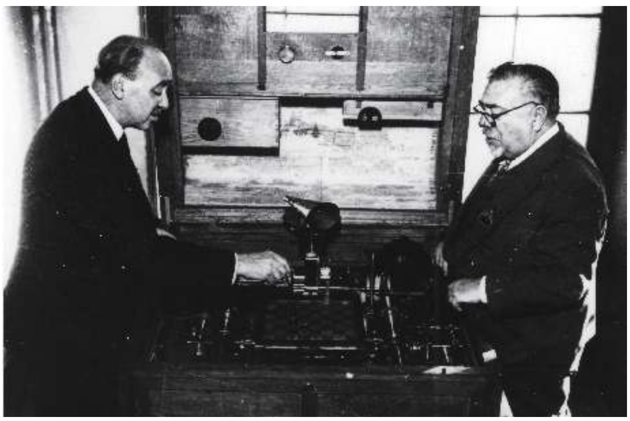
世界上第一个真实会下国际象棋的机器是托里斯设计并制造的 EI Ajedrecista（下棋者，西班牙语）。EI Ajedrecista 由托里斯从 1910 年开始建造，1914 年在巴黎首次公开展出。它能自动地指挥王和车与另一方的王进行残局对决。这也是为何在纪念涂鸦中的缆车里面，不但有托里斯，一头牛，还有两个象棋棋子——王和车——的原因。

受巴贝奇的差分机和分析机的启发，托里斯设计并制造了一台可以计算多项式的值与代数方程的根的机器（托里斯将之称为“代数机”），精度达到千分之一。 他设计了一个模拟机械装置用来计算。因为使用的是模拟方法，可以计算多项式的任意值。而巴贝奇使用的是差分法，计算的是对应于等间距数值的数表。

图 135 西班牙 1983 年发行纪念托里斯的邮票，面值 50 比塞塔，图中有尼亚加拉漩涡空中缆车



(a) 1920 年托里斯的儿子(Gonzalo Torres Quevedo)改造的下棋机器：用电磁控制代替机械臂



（b）1951 年，托里斯的儿子向维纳（右）演示下棋机

图 136

图 137 托里斯的代数机

29 数学教育相关涂鸦

图 138 开学第一天纪念（2008 年 9 月 1 日，乌克兰、吉尔吉斯斯坦、白俄罗斯、波兰、立陶宛、法国、拉脱维亚、哈萨克斯坦、俄罗斯）

图 139 教师节纪念（2011 年 9 月 10 日，土耳其、中国、台湾、香港、波兰）

图 140 教师节纪念（2013 年 1 月 16 日，泰国）

谷歌涂鸦中有不少以教育为背景的纪念涂鸦，其中一些有数学内容。

自 2005 年至本文完稿，除了 2007 年外，在一些地区或国家出现过纪念教师节的涂鸦（2005 年有两个涂鸦）；自 2007 年到 2011 年，每年也都出现有纪念开学第一天的涂鸦。这些纪念涂鸦中，有几个涂鸦中出现了直尺、圆等数学相关元素。

女孩节和妇女节也是谷歌涂鸦常常出现的主题。例如日本传统的女儿节就有谷歌涂鸦纪念。有意思的是有着现代涵义的德国女孩节。

2008 年 4 月 23 日，谷歌德国以涂鸦纪念德国女孩节（“Mädchen-Zukunftstag”，字面意义为女孩 - 未来日），主图为一位扎着马尾辫小女孩在一面白板上用蓝色笔演算数学，有积分公式等数学内容。2009 年 4 月 23 日的德国谷歌也纪

念了同一个节日，只是这一次采用了机器人元素。

德国的女孩节自 2001 年开始成为德国全国性的年度节日，一般为 4 月的第四个星期四。它由德国联邦教育部、德国工会联合会和一些私营公司发起。其目的，一方面是为呼唤社会及企业负责人关注青年女工的学习、就业及生存状况，尽可能地为她们提供适合的工作岗位；另一方面也是为了培养女孩对多种职业的兴趣，特别是那些由男性占主导的科学、技术等领域，而不是理发师、花匠或秘书等传统的女性职业，以促进工作上的性别平等。“女孩节”这一概念来自于美国“带子女上班日（Take Our Daughters and Sons to Work Day）活动”，这一天中子女可以观摩父母的工作情形。

德国女孩节在德国很受重视，现任总理默克尔每逢女孩节都会发表演讲，参与女孩节活动等。一些公司、大学实验室也都会组织相应活动，学校积极组织学生参与，电视台等媒体都会报道。

有意思的是，德国女孩节的同一天也是德国的男生节。其目的也是促进男生对传统上为女性占多数的职业产生兴趣。

德国女孩节、男生节有专门的主页，分别为：http://www.girls-day.de、http://www.boys-day.de。

图 141 日本女孩节纪念（2010 年 3 月 3 日，日本）

图 142 德国女孩节纪念（2008 年 4 月 23 日，德国）

图 143 德国女孩节纪念（2009 年 4 月 23 日，德国）

图 144 2012 年 4 月 25 日德国总理默克尔在女孩节前夕邀请 25 位女孩到总理府作客并共同参与活动

30 附录一：查尔斯•巴贝奇简介

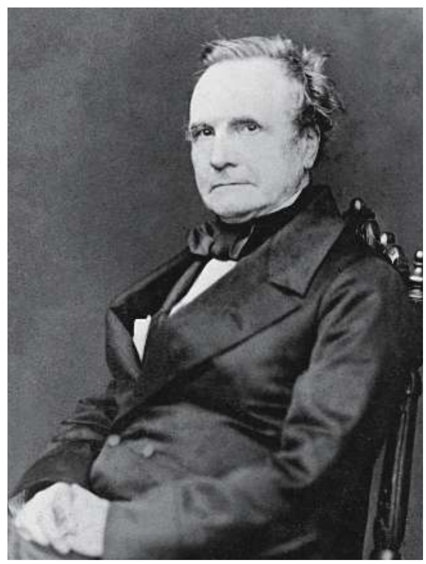


图 145 查尔斯•巴贝奇

前面介绍艾达以及托里斯时，我们都提到了巴贝奇（Charles Babbage, 1791-1871）设计的差分机和分析机；同时，本系列“中”部分里介绍的，图灵的图灵机也与巴贝奇的分析机有关。这里，巴贝奇都是以“计算机之父”的身份出现的。实际上，巴贝奇是一位达•芬奇式的人，才华横溢，在计算机领域之外，他的成就还涉及数学、保险、政治经济学、哲学、密码学与机械工程等等；而他的发明，大至分析机，小到格林威治时间信号（整点报时的六声哔哔声）。然而他生前及死后很长时间却被大多数人看做是一个怪人，妄想造出用于计算的机器。他的经历丰富而又传奇，很值得我们去了解。

查尔斯•巴贝奇在 1791 年 12 月 6 日出生于英国伦敦

的沃尔沃思(Walworth)。他的父亲本杰明•巴贝奇(Benjamin Babbage)是一位银行家，在伦敦工作。100 多年后另一位也常被称为“计算机之父”的冯•诺依曼同样有着一位作银行家的父亲。富有的家境不但使巴贝奇获得了良好的教育，也使他后来得以继承丰厚的遗产用于支持自己的研究。

巴贝奇在 8、9 岁的时候曾发高烧。已经失去两个儿子的父母将他送到德文郡（Devon）乡下修养，并在爱范顿(Alphington)选择了一个学校供他读书。这所学校“教英语、拉丁语和希腊语以及商业和海事服务方面的必要技能”。他在爱范顿时,从其它男孩那里听到各种“魔鬼”出没的传闻。他通过相当系统的实验对此进行了否定。这体现了巴贝奇从小就具有强烈的怀疑精神以及用科学方法进行探索的能力。

当身体恢复得差不多时，巴贝奇搬到伦敦北部的恩菲尔德（Entfield）一个有三十名学生的小学校学习。这个学校的图书馆有三百多卷从各个学科精选的图书，巴贝奇很喜欢。他在其自传《一个哲学家的生命历程》[7] 中写道：

> “我从这个图书馆获益极大。我提到它是因为我认为每个学校有这样一个图书馆是很重要的。”

这个图书馆也激发了巴贝奇对数学的兴趣。特别，巴贝奇还认真学习了约翰•瓦德（John Ward）的《年轻数学家导引》(*The Young Mathematician's Guide*: *Being a Plain and Easy Introduction to the Mathematicks ...With an Appendix of Practical Gauging*, 1771 年)，巴贝奇描述道：

> “(学校图书馆的）书中有一本代数学著作，是瓦德的年轻数学家导引。我偏爱数学课程，因此这本书书吸引了我特别的注意。在这个学校学习 12 个月之后，我向一位好学的同学提出，我们每天早上三点起床，在教室中点火，工作到五点或五点半。我们不间断地花了几个月一起完成了这件事情。”

巴贝奇对发明与创造的浓厚兴趣在其幼年时期也有体现。他从小就喜欢探索事物背后的原因。巴贝奇在其自传中回忆过一些细节。得到新的玩具时，巴贝奇总会问：“妈妈，这里面是什么东西？”如果妈妈的回答不满意，他就拆卸玩具看个究竟。巴贝奇小时还曾绑两木板在脚底，试图发明可以在水面行走的工具，因而差点淹死！他的这种“童心”，对未知的好奇在他的一生中都有体现。例如，到剧院后，当别人沉醉于莫扎特的音乐时，他则绕到后台了解舞台相关的机械设备是如何运作的。

巴贝奇在恩菲尔德学习了几年之后曾到剑桥附近接受过几年私人指导。期间他学习了许多著作。巴贝奇在其自传中列举了一些他读过的书，其中有意大利女数学家玛利亚•阿涅西（Maria Gaetana Agnesi, 1718-1799）的分析教程，英

图 146 1991 年英国发行纪念巴贝奇的邮票

国曾任卢卡斯讲席教授（这是牛顿及其老师巴罗曾经担任过的职位）的数学家罗伯特•伍德豪斯（Robert Woodhouse, 1773-1827）的《分析学原理》(*Principles of Analytical Calculation*）以及法国数学家拉格朗日（Joseph Lagrange, 1736-1813）的《解析函数论》(*Théorie des Fonctions Analytiques*）等。特别是，他还以高价购买了法国数学家席维斯•拉克鲁克斯（Sylvestre François Lacroix）的《微分学与积分学》(*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Chez Courcier, Paris, 1797-1798)。当时因为拿破仑的战争而使得法国书籍贵且不易得到。

在 1810 年，19 岁的巴贝奇进入剑桥三一学院学习。他期待剑桥有胜任的教师能给他学习过程中碰到的问题加以指导。但不久，他就对剑桥的数学教学异常失望。巴贝奇已经熟稔牛顿的点，莱布尼兹的 *d* 以及拉格朗日的撇 [8]。因此他对剑桥的单调教学不满足。他曾以数学难点向教师请教，有的教师以考试不考为由拒绝回答，转而建议巴贝奇考虑更基础的问题；还有的教师不但对巴贝奇所问的问题不懂，还试图隐瞒自己的无知。

这也难怪这些教师。在巴贝奇所处时代，英国的数学已经开始衰落：牛顿、斯特林和棣莫弗等名家都已分别去世、退休和离职。而欧洲大陆的数学则群雄并起，有着拉格朗日、勒让德、拉普拉斯、欧拉、伯努利和高斯等大家。然而，由

[7] 即前文提到的 *Passages From the Life of a Philosopher*，1864 年。后文提到巴贝奇的自传均指此书。

[8] 例如，函数 $y=f(x)$ 关于 x 的一、二阶导数，牛顿的记号为 $\dot{y}, \ddot{y}$；莱布尼兹的记号为 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$；拉格朗日的记号为 f', f''。

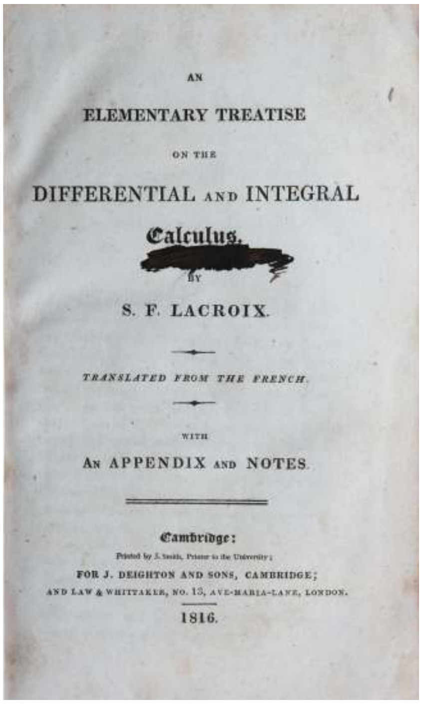

AN
ELEMENTARY TREATISE
ON THE
DIFFERENTIAL AND INTEGRAL
Calculus.
[redacted]
S. F. LACROIX.
TRANSLATED FROM THE FRENCH.
WITH
AN APPENDIX AND NOTES.
Cambridge:
Printed by J. Smith, Printer to the University;
FOR J. DEIGHTON AND SONS, CAMBRIDGE;
AND LAW & WHITTAKER, NO. 13, AVE-MARIA-LANE, LONDON.
1816.

图 147 巴贝奇等 1816 年翻译出版的拉克鲁克斯微积分著作

于牛顿 - 莱布尼兹优先权之争引起的分裂，英国数学囿于牛顿的影响，固步自封，并不向欧洲大陆的数学学习以跟上发展。

没有教师的指导，巴贝奇便转向图书馆，阅读圣彼得堡、柏林与巴黎等地科学院的论文。巴贝奇还在剑桥结识了许多志同道合的朋友。1812 年，巴贝奇与乔治 • 皮科克（George Peacock, 1791-1858）和约翰 • 赫歇尔（John Herschel, 1792-1871）成立“分析学会（Analytical Society）”，其目的是推广莱布尼兹的微积分（分析学）来对抗牛顿的微积分体系。巴贝奇的前辈伍德豪斯在其著作中实际上已经开始向大陆学习，但没有产生大的影响。

这个学会的成立，标志着英国数学和科学变革的开始。这场变革延续至英国数学家哈代对分析学的坚持。分析学会的一个主要动作是在 1816 年从法文翻译出版拉克鲁克斯的《微分学与积分学》（英文译著的书名为 *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*）。这本书是当时最好的阐述微积分的教材。他们还在剑桥著名的数学考试（Tripos，世界大学考试之母）中，引入欧洲大陆的数学，规定要使用莱布尼兹的记号，否则即判不及格。

这场变革激起了英国许多数学家对符号运算和代数的热情。他们中有布尔代数的发明人乔治 • 布尔（George Boole, 1815-1864），得到过形式逻辑中著名的德 • 摩根定理的也有前述艾达的老师德 • 摩根。德 • 摩根还受此影响，学习法国数学，于 1838 年写了一本概率论方面的著作（*An Essay on Probabilities*）。

18 世纪，不但数学，英国的科学也整体衰落。1830 年，巴贝奇出版《科学衰落及其原因的反思》（*Reflections on the Decline of Science and some of its Causes*）。书中，他对英国科学的衰落进行了讨论，涉及英国院士选举等现实问题，希望改革英国皇家协会，促进科学的进步。正是在这本书的影响下，英国在 1831 年成立了英国科学促进会（British Association for the Advancement of Science，简写为 BAAS）。

巴贝奇因为在数学方面的成就在 1816 年被选为皇家学会院士（Fellow of Society，简称为 FRS）。1828 年，巴贝奇的朋友替他申请到了剑桥大学“卢卡斯”数学教授 。起初，身在国外的巴贝奇想写信拒绝，但被说服接受。然而，从任职“卢卡斯”教授开始到 1839 年巴贝奇因希望专心设计差分机而辞职的 11 年间，巴贝奇没在剑桥讲过一次课。

巴贝奇等成立的分析学会后来变成剑桥哲学学会，迄今仍在。巴贝奇还参与创立了几个其它著名的学会，如伦敦统计学会与皇家天文学会。伦敦统计学会原是 BAAS 下设的一个临时部门。1833 年，社会统计学先驱凯特勒[9]来参加 BAAS 的第三次会议。但凯特勒一到，即发现 BAAS 下没有统计学组。于是巴贝奇建议设立一个临时的统计学组。在此基础上，1834 年，他宣布成立伦敦统计学会（现伦敦皇家统计学会）。

巴贝奇喜欢搜集、整理数据，他认为一切数据都是有用的。他的一个计划就是制作“物理常数”（“自然常数”）表，编辑各学科中可用数字表示的事实成书。例如，他会测量猪的心跳，小牛的呼吸频率，并将之归于哺乳动物类常数。巴贝奇对数字的偏爱有时显得特别奇怪，他不但感兴趣于动物一天的食量，还记录牛或骆驼一天能犁多少地。

但恰是因为巴贝奇对数据的认真分析，使得他成为运筹学的先驱。他在政治经济学以及邮政改革方面的成就是两个著名的例子。

1832 年，巴贝奇出版《论机器和制造业的经济》（*On the Economy of Machinery and Manufactures*）。这是一本马克思常引用的政治经济学著作。在这本书中，他对专业分工、劳资关系、科学分析等作了系统的论述。例如，他发现专业分工可使生产率提高，这个事实现在被称为巴贝奇原理。作为例子，巴贝奇用他的方法分析了印刷行业，揭露了行业利润是如何产生的（但这却得罪了出版商，导致出版商拒绝出版他的著作）。

[9] 阿道夫 • 凯特勒（Adolphe Quetelet, 1796-1874）。凯特勒对人类性状使用正态曲线，也用分析的角度来讨论犯罪。因此他的工作是统计思想在社会学上的早期使用。

图 148　印有维多利亚女王头像的“黑便士”邮票（1840 年 5 月 1 日在英国正式发行，6 日投入使用）

图 149　19 世纪用数学表（图片来自美国山景城计算机博物馆）

巴贝奇还分析了英国的邮政业，是“均一邮资制”的创始人。1840 年以前，有邮政业务的国家一般实行“递进邮资制”，按照邮件递送的距离以及信纸张数由收件人支付高昂的费用。巴贝奇经过分析，发现邮件的收集、盖戳、分拣、投递费用远大于邮件的运送费。于是建议不论邮件寄递远近，均采用相同邮资，并由寄件人付费。

基于巴贝奇的论述，英国人罗兰 • 希尔（Rowland Hill, 1795-1879）力倡改革，促使英国议会通过了著名的“一便士邮资法”，并从 1840 年月 1 月 10 日在英国实行“均一邮资制”：不论远近，信函每盎斯均收费一便士，由寄件人付费，并贴上预付费标签。这就导致了英国邮局在 1840 年发布了世界上第一枚邮票——著名的“黑便士”邮票，这是“均一邮资制”以邮票面值形式的首次表现。

巴贝奇所处时代已有如对数表等各种数表被广泛用于天文计算、航海等各种目的。计算能力是一些人的谋生手段，现在我们用来指计算机的英文词汇“computer”最早是指这样一些人，只是到后来才逐渐变为进行计算以及完成更多任务的机器。但人工计算、抄写、校对、排版和印刷等不但任务艰巨，同时不可避免地存在各种失误。有失误就有代价，航海表中的错误，对于海员是生死攸关的事情。巴贝奇对数字严格要求，见到数表中的种种错误后，还写信给出版商进行严厉的批评。后来他想到数表制作应该由机器来完成，从计算到结果输出，全部都自动化，这样人工失误就可以得到避免。这样的思想，与现在谷歌研发自动驾驶汽车，避免人的参与来预防交通事故类似。

值得一提的是，巴贝奇还将他的这种用机器来代替人工计算的思想用于他在 1837 年发表的自然神学论著《布里奇沃特论著第九编》（*The Ninth Bridgewater Treatise*）中。粗略地说，在这本书中，巴贝奇将世界比作一台机器，将上帝比作一个程序员，奇迹乃是源于上帝设计的复杂程序，而非即兴创作。

巴贝奇自己就对机械与发明很感兴趣，还亲自设计过火车头前的排障器以及火车动力检测车（Dynamometer car，用于测量牵引力、功率以及最高速度等）。对数字与机械的双重爱好和对它们的掌控，使得巴贝奇有了设计机器用以计算的兴趣和能力。巴贝奇在其自传中说自己大约在 1812-1813 年想到了数表的制作可以用机器来完成。他在其自传中有过生动叙述：

> 我坐在分析学会的房间里，在剑桥，我的头前倾在桌面迷糊着，一部对数表在我面前平躺着。另一位会员进来见我半睡着，叫我，“巴贝奇，你好啊，梦见什么了呢？”我一边指着对数表，一边回答说：“我在想这些数表或许可以用机器来计算。”

巴贝奇在一开始做了一个小的模型，可以进行二次多项式的计算，能精确到六位小数。1823 年，他获得英国政府 1 700 英镑的资助，着手制造差分机一号（Difference Engine No. 1，差分机也常被翻译为差分引擎），这是一台可以进行 20 位数字计算的机器。

差分机是利用有限差分的原理来计算多项式的一系列值。它通过齿轮转动来做加减法，为避免抄写错误还有输出终端将结果打印成书。差分原理使得计算可以循环并避免乘除法运算。

让我们考虑一个简单的例子：计算 $f(x) = x^2 + 3$ 在等间距数值 1、2、3、4、5 等处的值。假设已经知道 f 在 1、2、3、4 处的初始值 4、7、12、19。这几个数值第一次差分（即后一个数值减去前一个数值）为 3、5、7，第二次差分为 2、2（3、5、7 这三个数值的后一个数值减去前一个）。通过所得二次

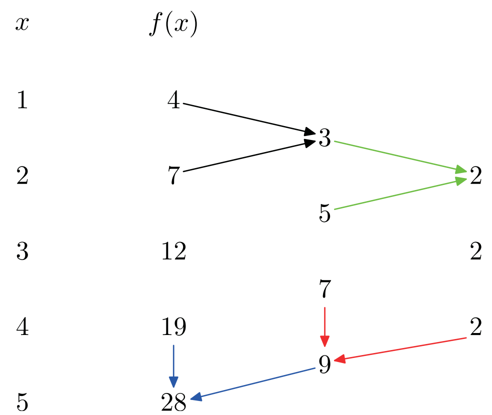


图 150 差分原理

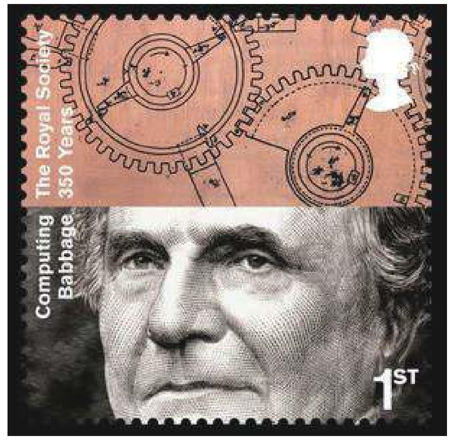


图 153 2010 年英国发行纪念巴贝奇齿轮的邮票

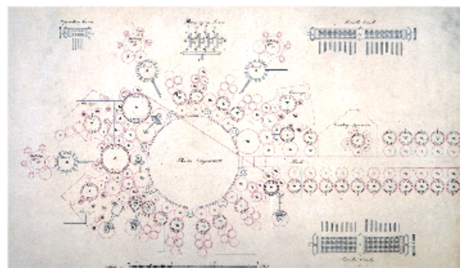


图 154 巴贝奇设计分析机所绘 250 幅图片之一

差分值相同，可以判断不要再继续做差分了（一般地，n 阶多项式的 n 次差分为常数）。反过去做加法，由 $2+7=9$，$9+19=28$ 可以得到 $f(5)=28$。其它数值如 $f(6)$ 可以依次类推。

早在 17 世纪，就出现了采用齿轮传动装置进行工作的计算器。1642 年，法国数学家帕斯卡制造了最早可进行加、减运算的计算器（例如，做加法时，一个转过十位的齿轮会带动相连的另一个齿轮转过一位）；1672 年左右，德国数学家莱布尼兹制成了可进行加、减、乘、除运算的计算器。但巴贝奇处的工业时代，蒸汽机和各种机械装置被广泛运用，人们对于用机械的力量掌握世界充满信心——只要想想英国在巴贝奇去世 40 年后造出了超级巨轮泰坦尼克号就足够了。巴贝奇的设计已经不再是只进行加减乘除计算的小型机器了。

巴贝奇雇佣当时最优秀的天才工匠约瑟夫 • 克莱蒙（Joseph Clement，1779-1844）来帮忙制造那些精细的零件。但差分机一号非常复杂，若完工，需要 25 000 个零件，重

图 151 帕斯卡发明的计算器

图 152 莱布尼兹发明的计算器

15 吨。到 1833 年，差分机只完成设计的七分之一。精密零件制造起来的困难，加之巴贝奇不断地修改设计方案，导致巴贝奇与克莱蒙关系紧张，最后克莱蒙辞职，雇员被解散，随之，英国政府也停止了资助。

1834 年，巴贝奇在制造差分机一号的基础上产生了更加雄伟的计划：设计一个更加通用的计算机。这就是巴贝奇的“分析机”（Analytical Engine，也翻译为分析引擎）。它由蒸汽驱动，由无数齿轮和杠杆组成，有一台机车那么大。为此，巴贝奇写了数千页的文档，还画了 250 幅图来说明这台机器的构造。

最令我们赞叹的是分析机的核心思想已经和现代计算机的逻辑原则基本无二。

现代计算机由五大部件组成：控制器、运算器、存储器、输入设备和输出设备；控制器、运算器和存储器统称为中央处理器，即常说的 CPU。通过输入设备，指令序列和原始数据先被送进存储器，经过控制器译码后，控制着运算器操作数据运算，运算结果送回存储器，最后由输出设备显示或打印。

分析机的“中央处理器”由三大部件组成：

1.“仓库”（Store）：这是分析机的“寄存器”，由齿轮组成，

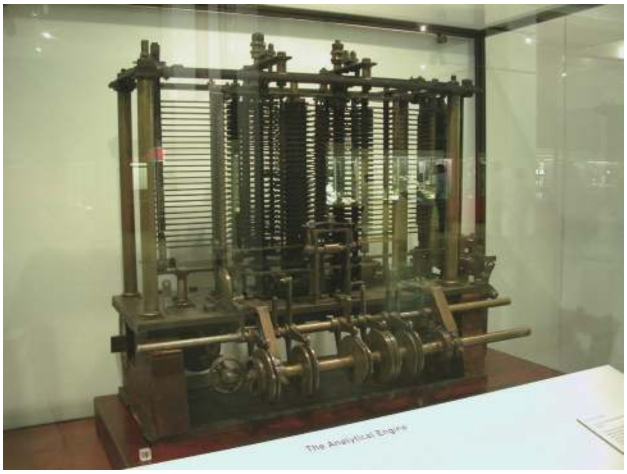


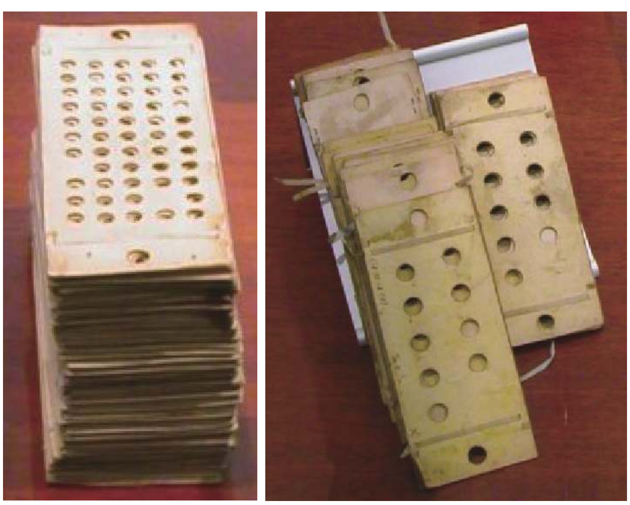
图 155 巴贝奇 1871 年建造的分析机实验模型（伦敦科学博物馆藏）

每个齿轮可贮存 10 个数，齿轮组成的阵列共能够储存 1000 个 50 位数；

2. “作坊”（Mill）：这是分析机的“运算器”，利用齿轮间的啮合、旋转、平移等方式进行各种数字运算。

3. 第三部分是分析机的“控制器”，用穿孔卡（Punch Card）来控制运算操作的顺序。穿孔卡片利用卡片上的“有孔”与“无孔”来存储信息。

这里的一个创新是将穿孔卡片用于计算机，其想法来自于当时广泛运用于生产的杰卡德（Joseph Marie Jacquard, 1752-1834）提花机，这种提花机用穿孔卡片自动控制提花机编制布匹上的图案。类似的思想在很多场合可以看到，比如手摇钢琴中的乐曲信息即存贮在穿孔纸带中。



(a) (b)

图 156 分析机使用的两种穿孔卡

图 157 艺人表演手摇钢琴与其中的穿孔纸带（作者 2013 年 5 月 19 日摄于比勒费尔德）

由此可见，巴贝奇的分析机已是通用机，有了程序控制的初步思想。现在人们已经证明，分析机是图灵完备的，即它具有等同于通用图灵机的能力（可模拟通用图灵机）。什么是通用图灵机呢？先得从图灵机说起。

图灵机是英国数学家阿兰 • 图灵在 1936 年提出，我们之前已经通过谷歌图灵机游戏对它有了直观的认识，因此不难理解它的抽象叙述了。图灵机由以下几个部分组成：

1. 一条纸带（Tape）：它被划分为连续的小方格，可向两端无限延伸。每个方格可以是空白，也可以存储一个来自有限字符表中的任意一个符号；

2. 一个控制器（Table）：它具有有限个状态以及指令序列，可以控制纸带的左右移动以及读写头的操作；

3. 一个读写头（Head）：它与控制器可进行通信，能读出当前所指方格中的符号，接受控制器的指令，使得该读写头按指令相对于纸带做左右移动，并且也可以写入一个符号。

所谓通用图灵机是一台可以模拟任意其它图灵机的图灵机，它能完成人类所能完成的任意复杂程序和计算过程。

图灵关于图灵机的工作以及他和同事在布莱切利庄园建造密码破译机很有可能受到巴贝奇的影响。

在分析机之后，巴贝奇 1847-1849 年间重新设计了差分机，被称为差分机二号，其零件数只有差分机一号的三分之一。差分机二号有八个立轴，每个立轴有 31 个带数字的

齿轮。七个立轴中的每个立轴对应七阶差分中的某一阶，最后一个立轴用于显示最终结果。所以，差分机二号可以处理七阶多项式的值，精度至 31 位数字。

除了部分样品，巴贝奇生前都未能真正制造出来差分机和分析机。虽然如此，但受到巴贝奇的影响，瑞典人舒兹父子（Per Georg Scheutz，1785-1873 与儿子 Edvard Scheutz）在 1837 年发明了舒兹计算引擎。该机器的改进版还在 1859 年、1860 年分别售给英、美政府，用于制作对数表。

巴贝奇未获成功的原因是多方面的，有复杂设计带来的技术挑战，以及缺乏资助等表面原因，也有管理等方面的不足。巴贝奇严格挑剔、不善合作的个性也是他失败的一个原因。

一个一定程度上能说明他的性格的例子是他向当时的桂冠诗人丁尼生男爵（Alfred Tennyson, 1809-1892）写信挑错的故事。

巴贝奇对丁尼生在 1842 年的诗歌《罪恶的幻觉》（The Vision of Sin）中的诗句

每一瞬间，一人去世（Every moment dies a man），
每一瞬间，一人降生（Every moment one is born）。

批评道："如果这是正确的，则世界人口会保持不变。但事实是，出生率比死亡率稍高。我建议您的诗歌再版时，将它修改为

每一瞬间，一人去世（Every moment dies a man），
每一瞬间，一又十六分之一的人降生（And one and a sixteenth is born）。

巴贝奇还指出"严格说，精确的数字是 1.167，但我想对于诗歌，考虑到押韵，$1\frac{1}{16}$ 是足够精确了。"

巴贝奇对丁尼生诗句的批评，或许只是丁尼生自己一人不高兴而已。但巴贝奇对公共滋扰的反对却招致了很大的麻烦。其自传第 XXVI 章的标题即是"街头滋扰（Street Nuisances）"。

巴贝奇一向不喜欢街头"暴民"。他曾发挥自己善于统计的特长，到一家玻璃厂计算过破碎玻璃板，发表文章，研究玻璃板破碎起因的相对频率表：464 块破碎的窗玻璃中，有 14 起是醉汉、女人以及男孩导致的。

1864 年，他写了一篇《街头滋扰之观察》（*Observations of Street Nuisances*）的文章，记录了 80 天中发生的 165 起扰民事件。他还发起反滚铁圈运动。他批评滚铁圈的孩子在马腿下面滚铁圈，常导致骑马者摔下马来。巴贝奇不喜欢音乐，尤其讨厌街头音乐，认为这大大降低了自己的工作效率。他在其自传中，仔细列举了各种制造噪声的器具以及主体。

巴贝奇写信给《泰晤士报》抱怨，并且成功让立法者立法禁止街头滋扰，即所谓的"巴贝奇（Babbage's act）"法案。这使得巴贝奇成了被嘲弄的对象。有的邻居故意雇人在他的窗外演奏音乐，每当巴贝奇外出，一大帮小孩子尾随他，诅咒他，而大人也远跟着。巴贝奇的窗户被打碎，房间则被丢入死猫以及其它恶心的东西。然而，历史证明巴贝奇是对的，他被视为研究噪声污染的先驱。

巴贝奇未能亲眼见到自己殚精竭虑的设计的实现，又遭讥笑，很受打击，成了一个孤独厌世的悲苦老人，将他人都看做是笨蛋和窃贼。巴贝奇因此而以"数学泰蒙（mathematical Timon）"闻名。泰蒙是莎士比亚的戏剧《雅典的泰蒙》（*Timon of Athens*）中的主人公，挥霍金钱，嫉恨人类。从泰蒙死后留给自己墓志铭中也能读出巴贝奇的伤心[10]：

这里躺着的是可怜人的尸体一具，
莫问我的姓名；瘟疫毁灭你们这些坏东西！
我泰蒙睡在这里；生时人人厌恶；
走过去，尽你骂；但莫停留你的脚步。

孤独的巴贝奇将自己对差分机和分析机的想法写入其自传中。书中巴贝奇万般无奈地说："如果我有精力和途径来做更好的工作，我是不会来写自传的。"

虽然巴贝奇厌世，但对自己的设计充满信心，他曾说过，如果分析机得以建成，人们会看到它对未来科学进程将产生巨大影响。巴贝奇在给友人的信中曾说，我生活在一个没能力估计这个影响的国度。

但巴贝奇同时代的瑞典人乔治•舒兹（Georg Scheut）追随巴贝奇的思想制造过计算用机器，深知巴贝奇的伟大，他说："他（巴贝奇）的真实价值终将被人们认识到，即他是人类的恩人，最高贵、最具天赋的英格兰之子之一。"

1990 年，美国科幻小说家威廉•吉布森（William Gibson）和布鲁斯•斯特林（Bruce Sterling）在他们开"蒸汽朋克"小说流派之先河的著名科幻小说《差分机》[11] 中假想巴贝奇成功地制造出了用蒸汽机作为动力的差分机之后，历史发生的改变[12]：拜伦没有死在希腊，而是成了工业激进党的领袖，高居首相之位；济慈不是写诗的，改行当了"影像程式设计师"；工业激进党把持了英国政坛，在他们的操

[10] 英文原文为："Here lies a wretched corpse of wretched soul bereft: Seek not my name: a plague consume you wicked caitiffs left! Here lie I, Timon, who alive, all living men did hate, Pass by, and curse thy fill, but pass and stay not here thy gait." 译文来自梁实秋译《雅典的泰蒙》，莎士比亚全集 29，中国广播电视出版社，远东图书公司，2002 年。

[11] *The Difference Engine*，有中译：《差分机》，雒城译，新星出版社，2013 年。

[12] 引自萧星寒为雒城译《差分机》写的序言《科技对历史的反叛》。

控下，美国没有统一，分作四个国家相互鏖战；蒸汽设备入侵到人们生活的每一个角落，污染与反科技的卢德运动也因此来得比真实的历史更为猛烈……。

1861 年，巴贝奇说："我从未过过快乐的一天。若能换取 500 年后的三天，我可以痛快地放弃余生！"其实，不用等待 500 年，不到一个半世纪，我们就见证了计算机给人类生产和生活带来的巨大变革；不到一个世纪，我们就见到了与巴贝奇相似的思想出现了。

1985 年，伦敦科学博物馆根据该馆所存巴贝奇的设计资料着手制造差分机二号。1991 年，巴贝奇诞辰 200 周年之际，差分机的计算部分被制造出来了。在得知此消息后，微软前首席技术官（CTO）内森 • 麦沃尔德（Nathan Myhrvold）出资支持伦敦科学博物馆制造印刷部分。这样，2002 年第一台完整的差分机二号得以建成。该制造只利用维多利亚时代的材料与技术水平，一方面证明了巴贝奇设计的成功，也平息了多年来关于巴贝奇时代是否有足够的能力真正制造差分机这一争论。

2008 年，在伦敦博物馆的差分机二号被复制。这属于麦沃尔德所有，现在美国加州山景市的"计算机博物馆[13]"展出。

更进一步，一个被称为 Plan 28[14] 的建造计划，正募集资金，希望到巴贝奇逝世 150 周年，也就是 2021 年时，能将分析机实物制造出来。

参考资料：

1. C. Babbage, *Passages from the life of a philosopher* (London, 1864)。
2. A. Hyman, *Charles Babbage : pioneer of the computer* (Oxford, 1982)。
3. http://walden-family.com/pioneers/pdfs/B/Babbage.pdf。

图 158 美国计算机博物馆正在运行的差分机二号

31 附录二：金庸小说中的幻方

介绍纪念拉马努金的涂鸦时，我们谈到了幻方。很多读者应该对幻方并不陌生，既是因为中华传统文化中的著名的洛书与幻方有密切的联系，也是因为金庸武侠小说名著《射雕英雄传》中对幻方有过精彩的描述。笔者最早知道幻方就是通过阅读这部小说。

《射雕英雄传》第二十九回"黑沼隐女"中集中了不少数学（术数）内容，其中金庸着笔最多的是幻方。我们下面主要以"黑沼隐女"一节中的幻方内容为线索来简要介绍幻方（也可看做前文介绍海亚姆时引用金庸小说中历史典故和诗歌的对照）。"黑沼隐女"中一些其它如数列求和、高次方程求解等问题，则与中国元朝数学家朱世杰的著作《四元玉鉴》有密切联系，我们另文叙述。

金庸小说中有关幻方的内容主要出自杨辉在 1275 年编辑的上、下两卷《续古摘奇算法》[15] 之卷上。这是世界上最早系统研究幻方的著作。欧洲最早的幻方出现于德国画家阿尔布莱希特 • 杜勒（Albrecht Dürer, 1471-1528）在 1514 年所作的铜版画《忧郁 I》（*Melencolia I*）中，其上有一个神秘的四阶幻方。如果将这个幻方的第二、

續古摘奇算法
宋 楊 輝 撰
今有木不知長短引繩度之餘繩四尺五寸屈
繩量之不足一尺問幾何
荅曰六尺五寸
術曰置餘繩四尺五寸加不足一尺共五尺
五寸倍之得一丈一尺減餘四尺五寸即得
術曰倍少數倍一尺爲二尺併多數得木長合問
有餘四尺五寸乃是一木長外餘數也再以
半繩量欠一尺乃二木中各欠一尺也倍欠

图 159 《杨辉算法》（为包括《续古摘奇算法》在内杨辉所著的几部数学著作的总称）的书影和《续古摘奇算法》的一页。

[13] 参 http://www.computerhistory.org/babbage/。

[14] 详情可参考其主页 http://plan28.org

[15] 可参考郭熙汉著《<杨辉算法>导读》，1996 年，湖北教育出版社。在线阅读可参考 http://book.xuexi365.com/ebook/detail_11105089.html。

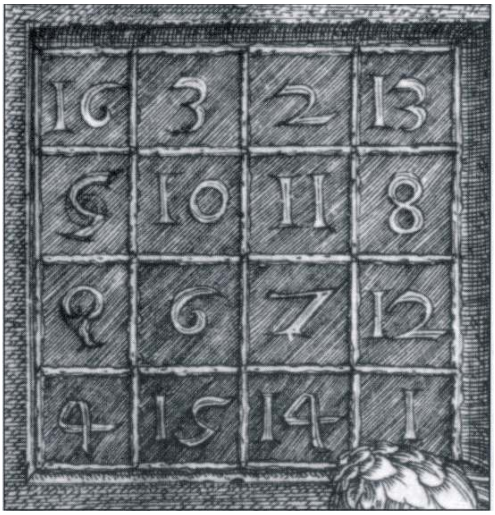


图 160 杜勒名画《忧郁 I》中的四阶幻方(各行中的数字依次为:16, 3, 2, 13 ; 5 ,10, 11, 8; 9, 6, 7, 12 ; 4, 15, 14, 1)

第三列对调，并顺时针旋转 90 度，所得即为杨辉著作中的阴图（参图 166）。

杨辉，字谦光，南宋末年钱塘（今杭州）人。不少读者熟悉的“杨辉三角”就是杨辉在其著作《详解九章算法》中所记录的北宋数学家贾宪的发现。杨辉因“刘碧涧、丘虚谷携诸家算法奇题及旧刊遗忘之文，求成为集”而编辑《续古摘奇算法》。卷上除了论述纵横图(即幻方)，还介绍了剪管术求解著名的“物不知数”题(也出现在“黑沼隐女”一节中)；卷下收集了我们熟知的“鸡兔同笼”等问题。

图 161 1983 年版《射雕英雄传之华山论剑》第 5 集中剧照 : 黄蓉解答瑛姑的九宫难题

话说郭靖带身负重伤的黄蓉去寻“南帝”段皇爷医治。路遇“神算子”瑛姑。“情痴”瑛姑为入桃花岛拯救老顽童已研习术数十余载。但黄蓉受其父黄药师的影响，耳濡目染，记住了不少。因为黄蓉轻易解答了瑛姑提出的“数学难题”：如计算 55 225 的平方根，34 012 224 的立方根等，瑛姑便出了一道自己的“独创难题”：“将一至九这九个数字排成三列，不论纵横斜角，每三数相加都是十五，如何排法？”

九宫之法是桃花岛阵图的根基，难不倒黄蓉 :

“九宫之义，法以灵龟，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”

图 162 洛书九宫图(三阶幻方)

黄蓉所述即中国文化史上著名的洛书九宫图。《尚书•洪范》中记载 :“天乃锡禹洪范九畴”。汉孔安国注曰 :“天与禹洛出书。神龟负文而出，列于背，有数至于九，禹遂因而第之，以成九类，常道所以次序。”也就是说，相传大禹时，有神龟浮于洛水，背驮“洛书”(即洛龟背上的裂纹)，大禹据此得到九种治理天下的方法（九畴），划天下为九州。

与洛书常常并提的是河图。《尚书•顾命》孔安国传:“伏羲王天下，龙马出河，遂则其以画八卦，谓之河图。”这里指的是，传说上古伏羲氏时，黄河中浮出龙马，背负“河图”(即龙马背上有规则的图案)，伏羲依此而演成八卦并发展而为《周易》。

河图洛书分别对应九畴与八卦，所以《易•系辞上》有“河出图，洛出书，圣人则之”之说。两者结合，也有所谓的“九宫八卦图”。河图洛书在数学上也有很大影响，明代程大位（1533-1606）所著《算法统宗》中开篇

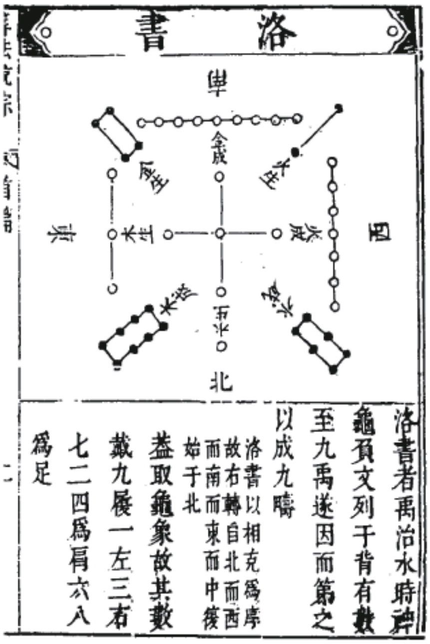


图 163《算法统宗》中的洛书

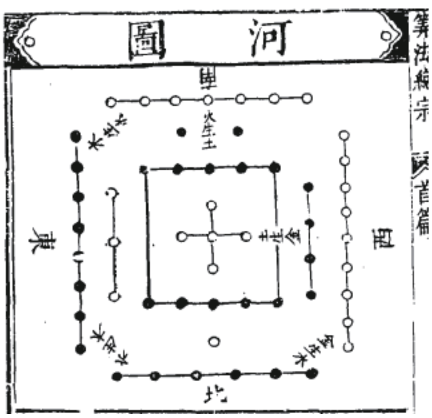


图 164《算法统宗》中的河图

一	二十	二一	四十	四一	六十	六一	八十	八一	一百
九九	八二	七九	六二	五九	四二	三九	二二	十九	二
三	十八	二三	三八	四三	五八	六三	七八	八三	九八
九七	八四	七七	六四	五七	四四	三七	二四	十七	四
五	十六	二五	三六	四五	五六	六五	七六	八五	九六
九五	八六	七五	六六	五五	四六	三五	二六	十五	六
十四	七	三四	二七	五四	四七	七四	六七	九四	八七
八八	九三	六八	七三	四八	五三	二八	三三	八	十三
十二	九	三二	二九	五二	四九	七二	六九	九二	八九
九一	九十	七一	七十	五一	五十	三一	三十	十一	十

图 165 杨辉著《续古摘奇算法》中百子图

即是河图与洛书。

黄蓉口中的“九宫之义，法以灵龟”即指九宫图和洛书的关系。她所叙述的九宫图口诀在北周（第六世纪）数学家甄鸾注东汉徐岳撰《数术记遗》“九宫算五行参数有如循环”一段时有此记载。更早，大约成书于东汉中期（公元前一世纪）的《大戴礼记》中的《明堂第六十七篇》中就记载有：“明堂者，古有之也。凡九室二九四，七五三，六一八。”

黄蓉甚至进一步教瑛姑，还有更高阶的幻方：“不但九宫，即使四四图，五五图，以至百子图，亦不足为奇。”这里提及四四图、五五图和百子图等分别指四阶幻方、五阶幻方和十阶幻方。实际上，杨辉在《续古摘奇算法》中给出了从三阶到十阶幻方的例子。不过《续古摘奇算法》中的百子图横和、列和均为 505，但顺、反对角线之和分别为 470、521，因此不是严格的幻方。清张潮有《更定百子图》，使得横和、列和与对角线之和都为 505。

黄蓉还举例说明如何构造幻方：

> “就说四四图罢，以十六子依次作四行排列，先以四角对换，一换十六，四换十三，后以内四角对换，六换十一，七换十。这般横直上下斜角相加，皆是三十四。”

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

4	9	5	16
14	10	6	2
15	11	7	3
1	12	8	13

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

图 166 金庸小说中所提四阶幻方构造说明（从左到右三图操作分别为 1. 将 1 到 16 共 16 个数字从大到小依次作四行排列；2. 外四角对换，即 1 和 16 对换，4 和 13 对换；3. 内四角对换，即 6 和 11 对换，7 和 10 对换。）

这个幻方构造方法出自杨辉的《续古摘奇算法》，原书称依此所得之四四图为阴图。与之相对应的是我们称之为阳图的另一个四阶幻方。

杨辉书中的连环图也被金庸引入小说中。黄蓉在介绍完四四图的构造，接着道：“那九宫每宫又可化为一个八卦，

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

图 167《续古摘奇算法》中的花十六图（阳图）

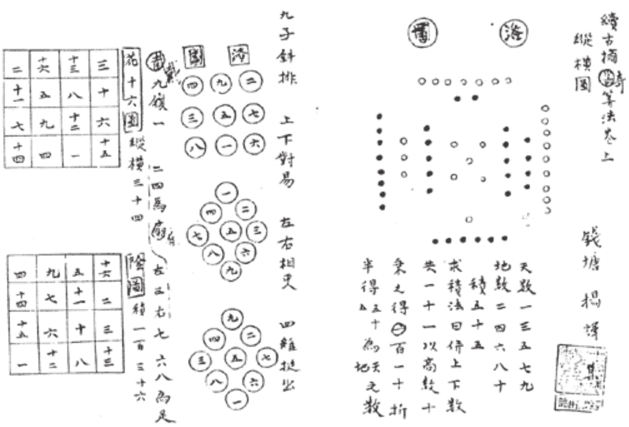


图 168《续古摘奇算法》中有关纵横图的页面

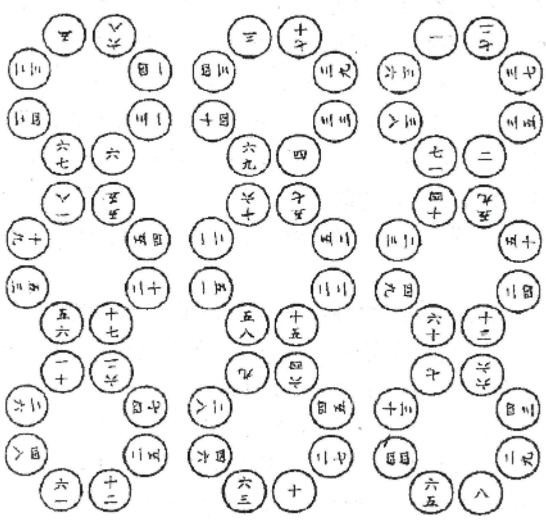


图 168 杨辉著《续古摘奇算法》连环图

八九七十二数，以从一至七十二之数，环绕九宫成圈，每圈八字，交界之处又有四圈，一共一十三圈，每圈数字相加，均为二百九十二。这洛书之图变化神妙如此，谅你也不知晓。”

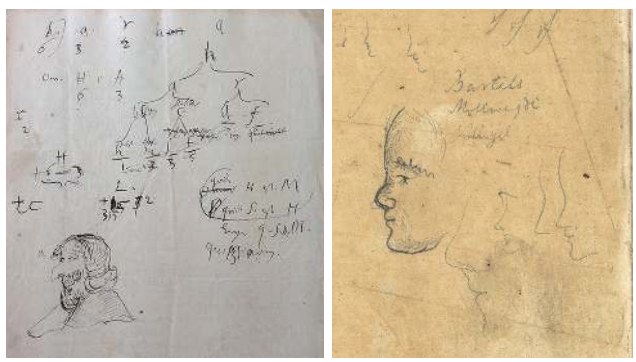
这个连环图确实甚是奇妙。难怪小说中，当黄蓉举手之间，将七十二数的九宫八卦图在沙上画了出来之后，“瑛姑瞧得目瞪口呆，颤巍巍的站起身来，问道：‘姑娘是谁？’”

32 后记

按上部分中的介绍，全文所叙涂鸦只涉及谷歌在 2012 年底前发布的涂鸦。2013 年也有不少数学相关涂鸦出现，例如我们见到了纪念哥白尼、欧拉、塞尔维亚数学家米哈伊洛 • 佩特罗维奇 • 阿拉斯（Mihailo Petrović Alas, 1868-1943）以及前文中提到过的穆斯林数学家图西等的涂鸦，这里就不叙述了。

本系列原计只写一篇，后来发现两篇都不够，不得不变为上、中、下三部分。期待读者也如我一样，不但领略了多姿多彩的谷歌涂鸦，也了解到了一些意料之外的故事。

说了那么多谷歌设计的涂鸦，我们就以莱布尼兹与高斯这两位德国最著名的数学家分别在他们笔记本上留下的涂鸦来结束本文吧。



(a) 莱布尼兹画的涂鸦　　(b) 高斯画的涂鸦

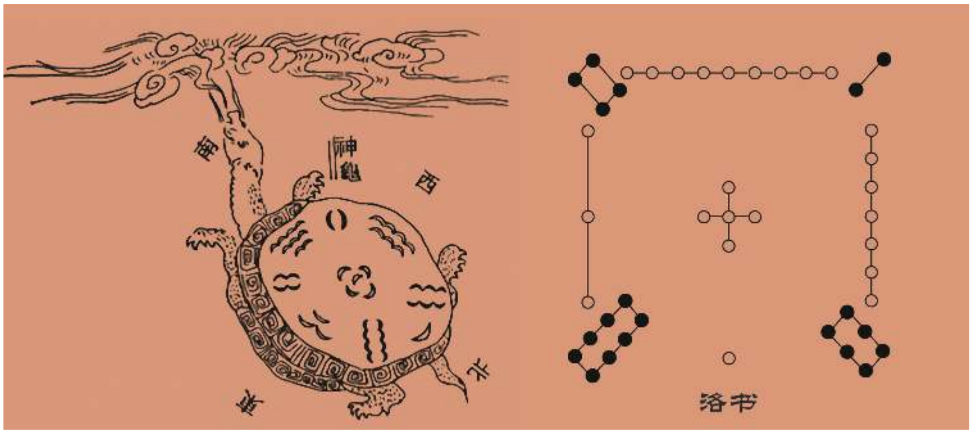
图 169 数学家笔记中的涂鸦

德国比勒费尔德和知屋

2013 年 8 月 6 日

数学与文化交融的奇迹 幻方

方开泰　郑妍珣



幻方（magic square）也称为纵横图，就是一个 $n\times n$ 的方阵，按照一定的排列布局，填入 1 到 n^2 的连续正整数，使得方阵各行、各列、两条对角线上的数字之和均相等。这个和数被称之为“幻方常数”（magic constant）或“幻和”（magic sum）。对于任意一个 n 阶幻方，其幻方常数 S 和阶数 n 的关系式是 $S=n(n^2+1)/2$。以一个 3 阶幻方为例，见图 1。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1　3 阶幻方

对于这个 3 阶幻方，各行、各列、两条对角线上 3 个数字之和都等于 15。更一般地，将 n^2 不同的数排成 n 行 n 列并符合行和、列和、对角线和相等的方阵也称为幻方。

“幻方”，对于很多人来说看似陌生，殊不知它早已和我们悄悄地接触过了。

小时候，我们常常沉浸在中国神话故事里，一读到“大禹治水”，就会幻想着自己以后也能成为像大禹一样的治水英雄。传说在公元前 2200 年左右，江河泛滥，洪水滔天，给远古的先民们带来了巨大的灾难。就在此时，灵龟呈洛书，大禹借助“洛书”完成了治水大业，造福了千千万万的华夏子孙。而这“洛书”也就是人类发现的世界上第一个幻方。“洛书”图案，用数字符号翻译出来，就是在 3×3 的方阵中填入了从 1 到 9 这 9 个连续整数，且每行、每列、两条对角线上的 3 个数字之和都等于 15。它不仅产生了深

图 2　灵龟呈洛书

图 3 射雕英雄传之黑沼隐女

刻的易理思想，而且推动了组合数学的发展。静静地看着这个名为“洛书”的幻方，那承载在龟背上的数学，隐隐透着一股神秘感，散发着奇异的美丽。

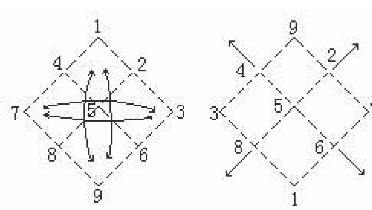
源自幻方的神秘色彩，有着经久不衰的美丽。中国古代南宋杰出数学家杨辉，最早编造出了各式纵横图，从此世界数学史上多了一串串属于幻方的足迹。随着近代组合数学的发展，纵横图一次又一次地展示着它强大的生命力。十八世纪美国最伟大的科学家和发明家富兰克林，创造出一个变化多端的 8 阶幻方，被誉为世界最著名幻方之一，其特殊的性质至今仍有待发现及研究。之后，幻方更是成为全世界瞩目的用以与外星人沟通信息的搭载物，随同旅行者 1 号和 2 号宇宙飞船，开始了人类赋予它寻找外星人的使命。幻方不管走过多久、走到哪里，古代或是现代，东方或是西方，地球上或是宇宙外，总能让人眼前一亮，为这样一个数学与文化交融的奇迹所折服。

金庸先生的武侠小说《射雕英雄传》对幻方更是情有独钟。书中的黄蓉聪明绝顶，曾经在黑沼的小屋中，以寥寥几句话道破了难倒瑛姑十几年的算术题。瑛姑问道：“将一至九这九个数字排成三列，不论纵横斜角，每三字相加都是十五，如何排法？”黄蓉给出了答案:“九宫之义，法以灵龟，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”紧接着，她又说道:“不但九宫，即使四四图，五五图，以至百子图，亦不足为奇。”举手之间，黄蓉又将七十二数的九宫八卦图在沙上画了出来。其实“九宫图”就是一个最小的 3 阶幻方，“四四图”、“五五图”以至“百子图”分别指的就是 4 阶、5 阶以至 10 阶的幻方，而“九宫八卦图”是幻方的一种变形。它们变化万千，像谜一样，暗藏规律、却不全为人所知晓。

“幻方”的背后，藏着一个等待人类去探索的世界。于是，全球东西方各行各业的人不知不觉地聚到了一起，研究幻方，经历着无数次“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的感觉，试图揭开幻方神秘的面纱。

1. 幻方的魅力

在我们中国，这个有着“幻方故乡”之誉的大地上，哺育着一群“幻方迷”。著名的南宋数学家杨辉是从数学角度对幻方进行研究的第一人。他在《续古摘奇算法》中记录了 3 阶幻方洛书的构造方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，思维挺出；戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足”（如图 4）。另外，他列出了“四四图”到“百子图”（杨辉所认为的“百子图”并非 10 阶幻方，后被清初的张潮发现并加以修正，得到真正的 10 阶幻方，称为“更定百子图”），并且对其中 4 阶至 8 阶幻方分别给出阴、阳两图。如何区分幻方的阴和阳，至今尚是一个谜，他如何构造出这些幻方，后人还在猜测。宋代丁易东提出了把 3 阶幻方洛书变化为 6 阶幻圆太衍五十图的方法。明朝的王文素专门研究数字排列组合的纵横图，在他所著的中国



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 4 3 阶幻方构造

第一部珠算书《算学宝鉴》中记载了多种较为复杂的纵横图，除洛书均数图、花十六图是源于杨辉所造的图外，其他均是创新，如连环图、璎珞图、三同六变图等。杨辉、王文素二人的贡献对后来幻方在电子科学上的应用影响非常大。之后的程大位及清朝的保其寿、方中通、张潮分别在他们的著作《算法统宗》、《碧奈山房集》、《数度衍》、《心斋杂俎》中增补了若干种纵横图、研究幻方及其变形，甚至提到了立体幻方。

1956 年，我国古代数学史专家李俨曾对西安元代安西王府旧址掘出的铸有阳文阿拉伯数码幻方的铁板进行了考证，确认其为 6 阶“阿拉伯幻方”，是阿拉伯数字传入我国最早的物证。1996 年上海新博物馆开放，馆中陈列着一块在陆家嘴出土的明代宝玉。玉挂的正面写着：“万物非主，惟有真宰，默罕默德，为其使者。”另一面就是一个四阶幻方（如图 5）。古人认为，奇妙的幻方蕴含着宇宙的法则。一直以来，我国许多学者抱着“探知宇宙法则”的坚定信心，为幻方的研究、发展贡献自己一份力量，1998 年 5 月 5 日中国幻方研究者协会成立。专家、学者们围绕幻方进行研究，不断地攀登一个又一个的幻方高峰。2006 年我国广东汕头大学陈钦梧、陈沐天二人解决了关于幻方的百年历史难题，前后分别成功构造出 13、14、15 阶平方幻方（参图 8（d）及其说明）。紧接着，潘凤雏、高源等中国幻方研究工作者相继攻克了其他阶平方幻方。福州苏茂挺突破性地构造出世界上首个完美平方幻方，向世界宣告了完美平方幻方的存在。

神秘的幻方，也吸引了国外学者们，像著名的数学家费马（Pierre de Fermat）、欧拉（Leonhard Euler）、汉密尔顿（William Hamilton）、霍纳（William Horner）、富兰克林（Benjamin Franklin）、计算机先驱查尔斯•巴贝奇（Charles Babbage）等。第一个 4 阶平方数幻方在大数学家欧拉的手中诞生；霍纳创造出了 8 阶、9 阶的双重幻方（参图 9 及其说明），即幻方各线和、平方和、积都相等；富兰克林创建了一个除具有一般幻方的基本性质外还另有其他特性的 8 阶幻方，被誉为开天辟地的杰作。一个叫费夫曼（G. Pfeffermann）的法国人最早构造出第一个 9 阶平方幻方，随后法国数学家加斯顿•塔里（Gaston Tarry）构造出第一个 16 阶平方幻方，美国幻方专家亨特（J. A. H. Hunter）编出了一个 128 阶三次幻方（参图 10 及其说明），十几年后，加拿大多伦多大学考克斯特（Harold Scott MacDonald Coxeter）教授知晓了一个 64 阶三次幻方。就这样，西方也刮起了一股构造幻方的风暴。一时间出现了由德国人（H. C. Agrippa）阿古利巴（Heinrich Cornelius Agrippa）发明并以太阳系七大行星命名的 3 至 9 阶幻方，由法国人卢贝尔（De La Loubere）所写的欧洲最早论及幻方的著作出版了，更有德国画家杜勒（Albrecht Dürer）把幻方融入了他所创造的版画作品《忧郁》，（如图 6）而刻在十一世纪印度卡杰拉霍（Khajuraho）耆那教神庙石碑上的四阶幻方则被当地人奉为神明的启示，常出现护身符上用于辟邪。

图 5　明代幻方宝玉

图 6　杜勒作品《忧郁》

在中国，有着“幻方大世界”的幻方学术交流网站。同样的，在英国、德国、日本等国家也有着围绕着幻方而成立的学术交流网站。一群来自东西方的幻方迷们，从不同的研究角度出发，有的凭借着电脑强大的计算能力构造出更奇特的幻方，有的试着用线性代数等数学理论去钻研幻方性质，有的埋头苦干、千方百计实现幻方的广泛应用。

2. 多种神奇幻方

旅行者到达一个目的地，可以选择不同路线、不同交通工具。而这一路欣赏到的风景也会有所不同。对于幻方的研究也一样，幻方迷们从不同的点出发，在头脑风暴中，探索、发掘出幻方方方面面的风采。首先让我们来感受一下幻方迷们为幻方奋斗的热情，看看他们如何在没有路的情况下走出了通向幻方的条条大路吧。

(1)定阶幻方的个数

天文数字 人们从最小的一般 3 阶幻方入手，不断挑战更高阶幻方的构造。

弗兰尼克尔（Bernard Frenicle de Bessy）【1】在 1693 年得出结论，认为 4 阶幻方总共有 880 个基本形式，通过旋转与镜面反射，总共有 7040 个幻方。而对于 5 阶幻方总数的估计，理查德•许洛泼尔（Richard Schroeppel）利用计算机编程运算得出结论，认为 5 阶幻方的基本形式有 275305224 个，即 2 亿 7 千 5 百多万个。对 6 阶幻方，皮恩(K. Pinn）和维茨考夫斯基（C. Wieczerkowski）利用蒙特卡洛模拟和统计学方法，得出一个大概的数值估计，其数量在 1.774310×10^{19} 至 1.776610×10^{19} 之间。由此可见，其他阶幻方的多少将是一个多么难以置信的庞大数字。

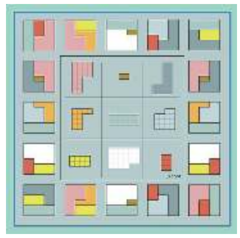
(2)幻方万花筒

推陈出新 幻方迷们通过改变幻方的构成因素，构造出新的形象。

他们第一眼就瞄准了幻方中的数字，想着如果这些数字不再是从 1 到 n^2 的连续正整数，幻方会是个什么样子？图 7（a）则是一个由 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22 的 9 个不连续的正整数构成的幻方。随后，素数幻方、

18	2	16
10	12	14
8	22	6

（a）



（b）

图 7 几何幻方

带有负数的幻方、带有分数的幻方也产生了。甚至有时，当数字由几何图案代替，几何幻方也出现了(如图 7(b))。它由九块积木组成。这些积木所含的小方格数恰好分别是 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22，每行每列和两对角线上的方格总数都是 36，而且每条线上的三块积木正好也都能拼成一个 6×6 的矩形。

人们并不满足于幻方这点小小的改变，他们又提出了另外的想法：如果幻方常数不再单指幻和，而是幻积、幻差、幻商等，又会是怎样的呢？所谓的幻积，也就是幻方中各行、各列、两条对角线的数字乘积。而幻差、幻商的定义相对复杂一点，直接举例说明会容易些（如图 8）。图（a）是一个幻积为 216 的 3 阶幻方，而图（b）、(c）分别是幻差为 5，和幻商为 6 的两个 3 阶幻方。图（ b）的

12	1	18
9	6	4
2	36	3

(a)

2	1	4
3	5	7
6	9	8

(b)

3	1	2
9	6	4
18	36	12

(c)

147	1	2562
2982	1533	1886
2426	2058	2163

(d)

图 8 幻积、幻差、幻商、二次幻方

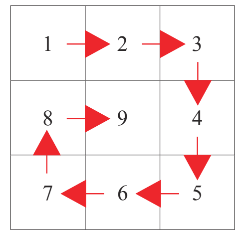
幻方满足每行、每列、两条对角线上，先求出第二个数减去第一个数的差，再用第三个数减去已求得的前两个数的差，均得到相等的常数 5。类似地，图（c）的幻方满足每行、每列、两条对角线上，先求出第二个数除以第一个数的商，再用第三个数除以已求得的前两个数的商，均得到相等的常数 6。

之后，人们又提出了平方幻和（或二次方幻和）等更为刁难人的概念。图 8（d）中的三阶幻方满足各行、各列、两条对角线的数字平方后再相加均相等，等于 147994009，这个数也就是它的平方幻和。更为奇妙的还有双重幻方，同时具有相等的幻和、相等的幻积。图 9 就是霍纳当时构造的八阶双重幻方，幻和为 840，幻积为 2058068231856000。最让人震惊的要属由中国学者高志源和潘凤雏创造的 12 阶三次幻方，见图 10，这个幻方同时具有幻和 870，平方幻和 83810，立方幻和 9082800。

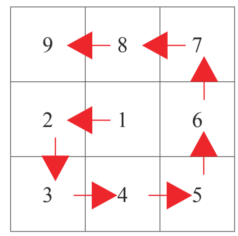
精益求精 幻方迷们构造一个又一个美轮美奂、独具魅力的幻方让我们叹为观止。

将 1 至 9 的九个自然数填入 3×3 的方阵中，使其每行、每列、两条对角线上的 3 个数字之和都不相等，并且相邻的两个数在方阵中的位置也相邻，并把这个方阵被称为反幻方。美国当代科普作家加德纳发现了符合条件的唯一两个反幻方（如图 11），仔细看还会发现它们的数字排列酷似螺旋，一个由外向内转，另一个由内向外转。这种自外向内再自内向外的螺旋美感，不禁让我们联想起一首宋代文学家苏轼的回文诗《题织锦图回文》：“春晚落花余碧草，夜凉低月半梧桐。人随雁远边城暮，雨映疏帘绣阁空。”倒读之后是“空阁绣帘疏映雨，暮城边远雁随人。桐梧半月低凉夜，草碧余花落晚春。”这样的回环往复，别有一番风味。

还有其他别出心裁的幻方，如同心幻方、复合幻方、部分重叠幻方。图 12 呈现的就是由弗兰尼克尔创造的一个 9 阶的同心幻方，幻和是 369。在这个 9 阶的同心幻方中，套着另外 3 个幻方，分别是 7 阶、5 阶、3 阶的，且幻方中心位置上的数字皆是 41。图 13 是一个 9 阶的复合幻方，即这个 9 阶幻方中 9 个 3×3 的小方阵也是幻方。图 14 是一个 9 阶的部分重叠幻方，其中包括 2 个 4 阶的幻方，2 个部分重叠的 5 阶幻方。



（a）



（b）

图 11 反幻方

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
58	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

图 9

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
117	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	81	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

图 10

23	81	79	78	77	13	12	11	2
76	28	65	62	61	26	27	18	6
75	23	36	53	51	35	30	59	7
74	24	50	40	45	38	32	58	8
9	25	33	39	41	43	49	57	73
10	60	34	44	37	42	48	22	72
14	63	52	29	31	47	46	19	68
15	64	17	20	21	56	55	54	67
80	1	3	4	5	69	70	71	66

图 12　同心幻方

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

图 13　复合幻方

75	53	11	25	14	65	48	42	36
10	26	74	54	49	43	32	15	66
71	57	7	29	33	16	67	50	39
8	28	72	56	68	46	40	34	17
52	69	13	30	41	35	18	64	47
12	27	38	51	77	80	20	3	61
37	59	76	9	24	4	60	81	19
73	6	23	45	58	79	21	2	62
31	44	55	70	5	1	63	78	22

图 14　部分重叠幻方

幻方群组　人们将有机联系的几个幻方放在一起研究，于是，镜子幻方、勾股幻方等脱颖而出。图 15 就是一个镜子幻方，这对幻方上的数字刚好是个位数和十位数的互换，幻和都是等于 242，看起来就像“我”和镜子中的我。图 16 是一个勾股幻方，由三个幻方 A、B、C 组成，且这三 个幻方的对应位置上

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

（a）

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

（b）

图 15　镜子幻方

24	3	18
9	15	21
12	27	6

A

32	4	24
12	20	2
16	36	8

B

40	5	30
15	25	35
20	45	10

C

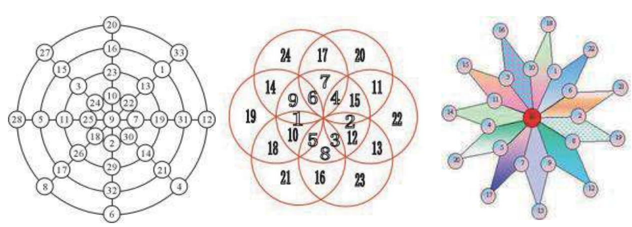
图 16　勾股幻方（$a^2+b^2=c^2$）

的数字组成勾股数，比如 $15^2+20^2=25^2$，$12^2+16^2=20^2$。

幻方变形　善于打破框框条条的幻方迷们在幻方变形上下功夫，创造出其他形状的幻方，如幻圆、幻环、幻星、蜂窝幻方等等。

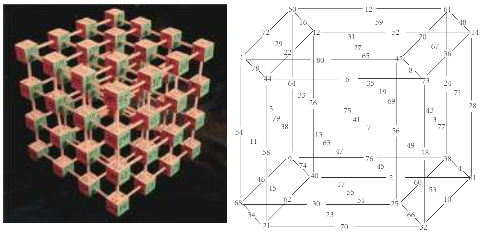
幻圆是将自然数排列在多个同心圆或多个连环图上，使各圆周上数字之和相等，几条直径上的数字之和也相等（如图 17（a））。

幻环是指若干圆以某种方式相交，在其分割出的空间中分布自然数，使其各个圆中的若干数之和相等（如图 17（b））。



（a）　（b）　（c）

图 17　幻圆、菊花幻环、幻星



（a）　　　　　　（b）

图 18 多维幻方

幻星是在星形几何图案的顶点和交点处填入数字，使其每条边上的若干数字之和相等（如图 17（c））。

多维幻方 勇于探索的幻方迷们还在多维空间上构造幻方，表现出很强的立体感和对称性，如图 18（a）所示。图 18（b）是浑天幻方投影到 2 维平面上的示意图，这个 3 阶 4 维幻方是数学家约翰 • 亨德利克斯（John Robert Hendricks）创造的，由 8 个 3×3×3 的小立方体组成，幻和为 123。

（3）幻方构造百花齐放

人们已发现了许多构造幻方的方法，从最初摸索幻方中数字填写的步骤，到在原有幻方的基本形式上进行旋转、镜面反射得到该幻方的其他可能形式，再到借助电脑高效率的编程运算产生幻方、研究幻方。其实，构造任意阶的一般幻方，并非难事，小学生也可以学会。但是有更多的幻方至今为止人们还没能构造出来，像 100 阶以内的平方幻方还有 14 项空白记录：67、69、71、73、74、79、82、83、86、87、89、93、94、97 阶的平方幻方还无人构造出来。

一般情况下，幻方的构造方法会按照奇数阶、双偶数（n 可为 4 整除）阶、单偶数（n 可为 2 整除，但不能为 4 整除）阶幻方来划分归类。适用于奇数阶幻方构造的方法有连续摆数法及其推广改进、阶梯法、奇偶数分开菱形法等，适用于双偶数阶幻方构造的方法有对称法、对角线法、比例放大法等，而适用于单偶数阶幻方构造的方法有拉伊尔法、斯特雷奇法、LUX 法等【1】。有没有一种统一的方法可以构造任意阶的幻方呢？ 17 世纪法国数学家弗兰尼克尔发明了镶边法，先构成 $n-2$ 阶的幻方，把每个方格中的数加上一个整数，再给它四周镶上一条边，填入余下的数字则可以得到幻方。还有其他一些幻方构造方法如相乘法、相加法，利用两个低阶幻方来产生一个高阶幻方。通过对得到的幻方进行旋转或者镜面反射的变换，还可以得到有着不同数字排列组合的同阶幻方。

除了以上构造幻方方法，通过拉丁方构造幻方也颇为人注意。拉丁方在试验设计上的应用非常广泛，因此与拉丁方有着千丝万缕联系的幻方自然而然地也被人们所关注，大家都在想着怎么把有着优越平衡性的幻方应用到实际生活中。所谓的 n 阶拉丁方（ Latin square）是指一个 $n \times n$ 的方阵，恰有 n 种不同的元素，且每一种不同的元素在每一行或每一列中只出现一次。如果构成 n 阶拉丁方中的元素取的是 n 进制数中的 n 个数，那么它很容易可以转换为 n 阶幻方。假设将 4 个拉丁字母 A、B、C、D 排列成 4 行 4 列，使这 4 个字母在其每行每列有且只有一次出现，这个方阵就是一个 4 阶拉丁方（如图 19（a）。如果把这个 4 阶拉丁方顺时针旋转 90°，就得到另一个 4 阶拉丁方（如图 19（b））。

B	D	A	C
C	A	D	B
D	B	C	A
A	C	B	D

（a）

A	D	C	B
C	B	A	D
B	C	D	A
D	A	B	C

（b）

BA	DD	AC	CB
CC	AB	DA	BD
DB	BC	CD	AA
AD	CA	BB	DC

（c）

10	33	02	21
22	01	30	13
31	12	23	00
03	20	11	32

（d）

4	15	2	9
10	1	12	7
13	6	11	0
3	8	5	14

（e）

5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1
4	9	6	15

（f）

图 19 用拉丁方构造幻方

再把这两个拉丁方叠放在一起，则得到下面这个可以用来构造幻方的方阵（如图 19（c））。首先把 A、B、C、D 相应换成 0,1,2,3，得到一个数字方阵（如图 19（d））。然后，把数字方阵中的每个数字看作 4 进制数，将它们转换为 10 进制数（如图 19（e）），最后将这个 10 进制数方阵里的每个数字都加上 1，可得一个 4 阶幻方（如图 19（f））。

（4）幻方，美的化身

幻方有着很好的性质：均衡对称，给人一种无限接近完美的感觉。“九宫图”，就是一个有着很好对称性的幻方（如图 20）。

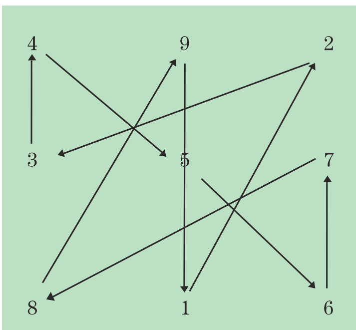


图 20 “九宫图”的连线图

如何衡量幻方的均衡对称性？这个问题十分值得研究。如果我们可以知道对幻方均衡对称性起到决定性作用的因素，那么我们就可以确定哪个幻方性质最优，在应用中发挥的作用最显著，而不必在数不清数目的幻方中挣扎不休。互补数字对连线图可以帮助我们从外在图形上判断幻方平衡对称性的好坏。另一方面，从线性代数的角度出发，特征值、特征向量也是研究幻方内在性质的重要反映。

杜德尼（ H. E. Dudeney）曾经详细地研究了 4 阶幻方的分类和每类幻方可能有的数量。根据互补数字对（互补的两数字之和等于幻和的一半）的分布情况，他最终把 4 阶幻方细分成 12 类（如图 21）。其中，第一种类型的 4 阶幻方无论是上下，还是左右，都具有对称性（如图 22）。

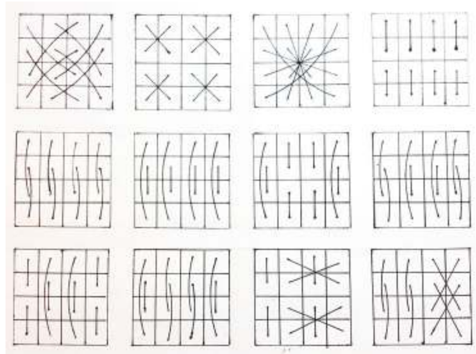


图 21 4 阶幻方根据互补数字对的分类

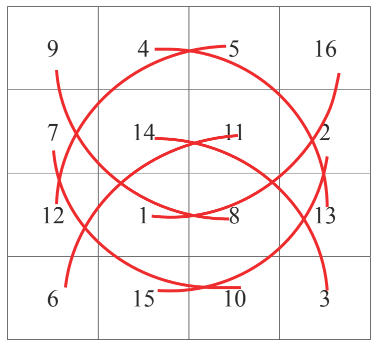


图 22 第一类 4 阶幻方互补数字对分布图

而幻方的特征值和特征向量也呈现出特殊的规律。就以杨辉在他所著的《续古摘奇算法》中给出的 4 阶的幻方阴、阳图为例，不难求出这两个阴、阳图的特征值和特征向量（如图 23）。这两个幻方有两个特征值是相同的，即 34（幻和）和 0。阴图有两个虚

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

（a）阴图

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

（b）阳图

图 23 杨辉构造的 4 阶幻方阴阳图

数特征值，而阳图有两个实数特征值。有关特征值在幻方分类中的作用仍是一个未解决的问题。

3. 幻方的神奇应用

幻方，在冷兵器时代，早就被应用在排兵布阵上。据史书记载，三国时期，诸葛

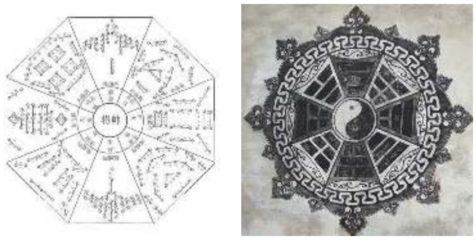


图 24　八卦阵

亮曾经垒石做八卦阵，对抗魏国军队。在中国四大文学著作之一的《三国演义》中，这个八卦阵被描述成一种进入之后就会飞沙走石、天地变色的神奇阵法。其实，这个对蜀国至关重要的八卦阵是诸葛亮按照五行相生相克原理和九宫八卦方位布成的作战阵图（如图 24）。而我们所熟知的三阶幻方“洛书”，便是这九宫八卦图的起源。

有着“万园之园”称号的圆明园与幻方有着某种关联。在清朝内务府满文文档中曾记载：雍正二年，山东德平县知县张钟子等勘察圆明园风水。张钟子曾著有《论圆明园》

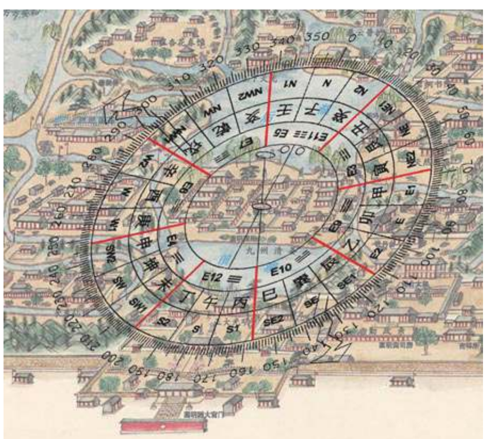


图 25　圆明园布局图

图 26　澳门回归百子图

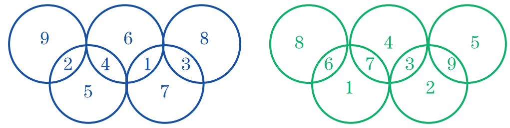


图 27　奥运徽章幻五环

图 28　包中祥设计的“完美幻方”

一文，提到：圆明园的布局师从“洛书”。原来，在圆明园后湖区，有一片由九组建筑组成的园林建筑群叫“九州清晏”，与“洛书”有着异曲同工之妙（如图 25）。

1999 年 12 月 20 日，中国政府恢复对澳门行使主权，澳门回到了祖国的怀抱。由中国幻方研究者协会会员沈文基先生设计的“澳门回归百子图”在珠海市板障山立碑，该百子图将澳门回归的日期放在幻方中央，就连登山的台阶也是精心设计为 1999 个台阶（如图 26）。

2001 年 7 月 13 日，北京申奥成功，举国欢腾。昆明理工大学的杨高石教授为此设计了奥运徽章幻五环（如图 27）。为了纪念 2008 年 8 月 8 日的北京奥运，包中祥老人花了 3 年时间编制了一个独一无二的立体六

面的“完美幻方”(如图 28)。这个“完美幻方”由 96 个数字组成，每个幻方的四行四列的和是 2008，每行的个位数字和为 8，每列的个位数字的和是 8，这样组成了一个十分奇妙的数字方阵，到处呈现出一个 2008.8.8 的数字系列。而它的每个田字格中的四个数的和是 2008，每个等腰梯形、长方形、菱形上四个格中的四个数的和是 2008，8 条对角线和 8 条直线的四个数的和是 2008，这里也告诉人们一个数字系列：2008.8.8。

20 世纪 70 年代左右，美国的一本益智杂志 *Math Puzzles and Logic Problems* 上出现了一个填数字游戏，这类游戏后来传到日本后便起了“数独”这个名字。数独是根据 9×9 盘面上已知数字，推理填出剩余空格的数字，要求每行、每列、每个 3×3 的九宫格内的数字均包含 1 至 9，且不重复。但喜欢玩数独的人可能不知道数独其实是幻方在近代以来的一个分支，也就是说，幻方推动了数独的发展。

有一个曾经风靡欧美大陆的游戏也与幻方息息相关。1878 年，美国科学魔术大师萨姆 • 洛伊德（Sam Loyd）设计出了著名的“14-15”智力玩具（boss puzzle），它在法国还有着另外一个名字“Jeu de Taquin”，译为给人类带来灾难的根源。这个玩具的原始布局如图 29(a) 所示，谁能通过滑动其中的数字片，使错位的 14 和 15 两个数字回复正常次序，将获得 1000 美元的奖励。实际上，这是一个没有赢家的游戏，无人能获得这 1000 美元奖金，因为洛伊德所要求的终局根本不可能达到。但却有一个有趣的发现，就是从原始初局出发，可以得到“畸形”幻方终局（图 29（b））。图 29(c) 的幻方终局需要移动的步数为 50：12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 2, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2,1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3。

（a）

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

（b）

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

（c）

图 29 “14-15”智力玩具

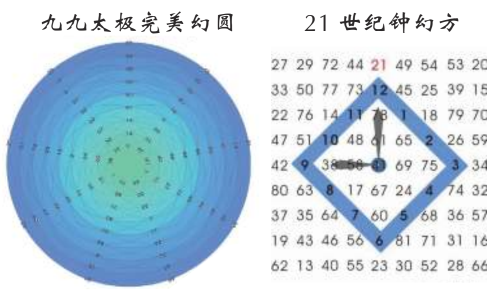


图 30

各种奇思妙想的幻方还有很多很多，如 21 世纪幻方钟，九九太极完美幻方等等（如图 30）。值得一提的是，1997 年，幻方随同美国先后发射的旅行者 1 号和 2 号宇宙飞船奔向宇宙，作为人类的使者去寻找外星人。当时，美国宇航局向全世界公开征集将随同旅行者 1 号和 2 号飞船出发、用以尝试与外星人交流的搭载物。这些千挑万选的搭载物都是绘有代表人类文明图案的金属片。其中，代表人类在数学上取得的成就的搭载物有两件，一个是勾股数，另一个便是 4 阶幻方。

著名数学家王梓坤先生在所著的《科学发现纵横谈》中指出，目前幻方在程式设计、组合分析、实验设计、人工智慧、图论、博弈论等方面受到了重视。其实不仅如此，幻方还被应用在工艺美术、海上漂浮建筑设计、电子回路原理、位置解析学、算法的改进、密码设计、图像安全处理等方面。很多幻方研究工作者都对幻方的应用有着一份期待，相信当幻方的性质得到充分的挖掘时，幻方

应用将取得革命性发展。

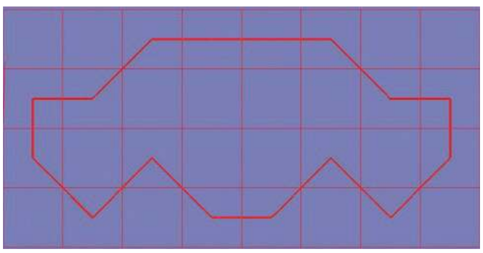
借助幻方，人们还设计出美丽的工艺装饰品，如“幻方吉形”、“魔法花砖”。

“幻方吉形”由梁海声设计，曾获 2005 中国国际品牌与设计大奖赛优秀创意入围奖。它的灵感就来自于最有视觉美感的 4 阶幻方。它在 2 个 4 阶幻方的基础上，沿着从 1 至 16 的走向，勾勒出一个循环、对称的图形，其形状既像中国传统的长命锁，又像元宝，又像飞碟，很容易被想象成为 UFO。它对称、平衡、和谐、顺通，具有循环的价值观，与保护自然环境的可持续发展思想吻合，现在与“幻方吉形”相关的产品已在日本销售。“幻方吉形”及其具体设计流程如图 31。

“魔法花砖”是由戴夫•哈珀（Dave Harper）结合二进制数转换和映射，对幻方进行变化而得到的平铺图案（如图 32（a））。有一个 4 阶的泛对角线幻方，即满足各行、各列、2 条对角线、8 条泛对角线上数字之和

1	2	15	16	1	2	15	16
13	14	3	4	13	14	3	4
12	7	10	5	12	7	10	5
8	11	6	9	8	11	6	9

		15	16	1	2		
13	14					3	4
12		10			7		5
	11		9	8		6	



（a）“幻方吉形”设计流程图

（b）工艺产品“幻方吉形”

图 31　幻方吉形

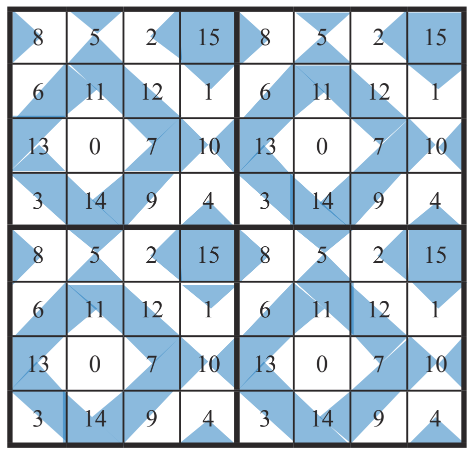


图 32（a）魔法花砖

8	5	2	15
6	11	12	1
13	0	7	10
3	14	9	4

图 32（b）4 阶泛对角线幻方

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

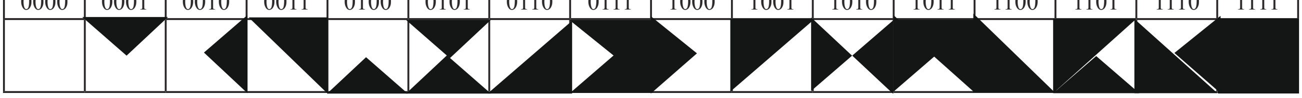
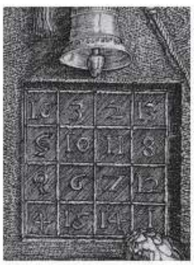


图 32（c）戴夫哈珀映射方案

均等于幻和 30（如图 32（b））。戴夫哈珀设计了一个映射方案，方案中写明 0 至 15 这 16 个数对应的二进制数和映射图案（如图 32（c）），白色部分代表 0，黑色部分代表 1。

幻方，可用于密码编辑、图像加密。

让我们一起来了解杜勒的作品《忧郁》中的 4 阶幻方和富兰克林 8 阶幻方如何应用于密码编辑。德国画家杜勒的经典作品《忧郁》（如图 6）构图元素十分丰富。其中，屋墙上刻着的四阶幻方是数学史上著名的“杜勒幻方”（如图 33（a）），最下一行中间两格标着 1514，是杜勒母亲去世的年份。如何用“杜勒幻方”解密呢？有这样一张密码表（如图 33（b））和一幅需要破解的密码图（如图 33（c）），首先按照密码表将相应的字母代入，得到一个英文字母方阵（如图 33（d）），将方阵中的英文字母和“杜勒幻方”中的数字相互匹配，按照 1 至 16 的顺序依次写成一行，可得到密码译文 JeovaSanctusUnus，翻译成英文是 IssacusNeutonuus，即 Issac Newton（艾塞克 • 牛顿）。



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 33（a）“杜勒幻方”

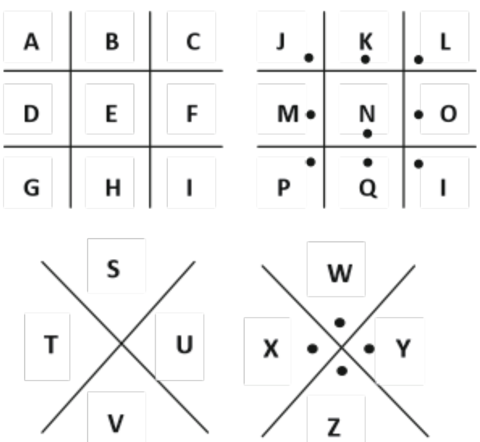


图 33（b）密码表

图 33（c）密码图

S	O	E	U
A	T	U	N
C	S	A	S
V	U	N	J

图 33（d）英文字母方阵

富兰克林八阶幻方（如图 34）在密码应用上也发挥着作用。在这个八阶幻方中，幻和是 260，64 个数字是从 1 顺序增加至 64；每半行、半列上各数和为 130；幻方角上的四个数与最中心四个数和等于幻和 260 = 52 + 45 + 16 + 17 + 54 + 43 + 10 + 23；另外，从 16 到 10，再从 23 到 17 所成折线“∧”上八个数字之和也为 260；且平行这种折线的诸折线“∧”上的八个数字和也为 260。

富兰克林八阶幻方可用于密码编辑。在丹布朗的《失落的秘符》中，幻方的用途就是变混沌为秩序，即把字填在格子里，然后根据幻方里从 1-64 的数字顺序重新排列，将无序的字符变为有序连贯的句子从而破解。如图 34 所示（左图为书中的乱序密码，中图为富兰克林八阶幻方，右图为顺序排列后的密码）。

网络的诞生，拉近了人们的距离。随时随地我们都可以与异地的家人朋友分享自己近期的生活状况，写写博客、配上几张照片，图文并茂。因此，每天都有着海量的数字图像在拥挤的网络之中来回传送。为了保护图像所有者的合法权益，防止信息泄露，我们会对图像进行加密。幻方排列，具有周期性，便于编码解码，成为数字图像加密的经典方法之一。

图像置乱法是隐藏图像信息较为理想的

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

图 34 富兰克林八阶幻方的密码应用

加密方法，它根据幻方中的自然数序号元素对图像像素位置进行相应移动的变换。首先，我们对需要加密的图像划分成一个 $n \times n$ 矩阵，把这个矩阵上的 n^2 个像素块（灰度值）与选定的 n 阶幻方 M 中自然数序号元素一一对应。然后，对选定的 n 阶幻方 M 进行变换。将 M 中序号元素 k 移至序号元素为 $k+1$ 的位置，$k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$，再将 M 中序号元素 n 移至序号元素为 1 的位置，形成一个新的 $n \times n$ 矩阵 M。随着 M 中序号元素位置的移动，与之对应的图像像素块也按着相同的路径移动。如果将上述的幻方变换进行多次迭代，就可以得到加密好的图像。当幻方变换迭代达到一个周期，即 n^2 次时，我们则解码成功，重新获得原来的图像。图 35（a）是一个 4 阶幻方变换迭代情况举例。图 35（b）是用一个 128 阶的幻方对某图像加密解密的效果图。

类似幻方变换的周期性图像置换方法还有阿诺德（Arnold）变换、FASS 曲线等。除此之外，还有非周期性的图像置换法，如混沌变换、傅立叶变换、卷积变换等。往往，人们还会把好几种图像置换法相结合，像阿诺德变换与幻方变换，幻方变换与数字全息图加密法，使图像加密变得更简单，安全性更高。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

（a - 1）

加密前图像

128 阶幻方

15	1	2	12
4	10	9	7
8	6	5	11
3	13	14	16

（a - 2）

1 次迭代后的矩阵

加密后图像

幻方变换迭代 10 次

8	10	11	5
13	3	2	16
1	15	14	4
12	6	7	9

（a - 3）

8 次迭代后的矩阵

解密后图像

幻方变换迭代 128^2 次

（b）

图 35　基于幻方变换的图像加密

4. 幻方未解之谜

目前，幻方还有一些未解之谜。哲学家，希望参悟幻方蕴含的易学思想、宇宙法则；数学家，迷上剖析幻方数字排列组合的奥妙；艺术家，试图融合幻方图案到艺术设计中，创造更加梦幻的作品；科学家，渴望幻方的完美性质能帮助人类实现许许多多不可思议的梦想，“海市蜃楼”、“与外星人同在”成为可能。我们深信，未来的某一天，这个世界会因幻方而精彩。

有关幻方的文献浩如烟海，我们仅仅列举如下的 15 个文献，供读者参考。

参考文献

1. 吴鹤龄 . 2008. 幻方与素数：娱乐数学两大经典名题 . 北京：科学出版社
2. 欧阳录 . 2004. 幻方与幻立方的当代理论 . 湖南：湖南教育出版社
3. 岑湛标 . 2010. 幻方传说 . 广东：中山大学出版社
4. 詹森 . 2012. 你亦可以造幻方 . 北京：科学出版社
5. 舒文中 . 1991. 幻方 . 广州：广东科技出版社
6. 金丕龄 . 2010. 幻方的智慧 . 上海：上海交通大学出版社
7. 万瑾琳，杨澜 . 2010. 幻方探秘 . 武汉：中国地质大学出版社
8. 方志，方金生 . 2008. 幻方游戏 . 湖北：湖北科学技术出版社
9. 马丁•加德纳（美）. 2012.《科学美国人》趣味数学集锦：迷宫与幻方 . 上海：上海科技教育出版社
10. 西摩 S. 巴洛克（美），圣地亚哥 A. 塔瓦雷斯（美）. 2013. 幻方世界：在数独出现之前 . 北京：现代出版社
11. Clifford A. Pickover (2003), The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars. New Jersey: Princeton University Press.
12. W. S. Andrews, Magic Squares and Cubes (2d ed. 1917; reprint, New York: Dover, 1960)
13. 幻方大世界：http://www.zhghf.net/
14. http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html
15. http://www.grogono.com/magic/

作者简介：

方开泰，著名统计学家，香港浸会大学荣休教授，北京师范大学—香港浸会大学联合国际学院教授，中国科学院应用数学研究所研究员。

作者简介：

郑妍珣，美国乔治城大学生物统计系硕士研究生，2013 年毕业于北京师范大学—香港浸会大学联合国际学院统计系。

虚数的意义

阮一峰

有人在问答网站 Stack Exchange 提问：

“我一直觉得虚数(imaginary number)很难懂。中学老师说，虚数就是－1 的平方根。

$$i=\sqrt{-1}$$

可是，什么数的平方等于－1 呢？对－1 求平方根，计算器直接显示出错！

直到今天，我也没有搞懂。谁能解释，虚数到底是什么？它有什么用？”

很多人在问题下面给出了自己的解释，还推荐了微软公司工程师 Kalid Azad 写的一篇非常棒的文章《虚数的图解》[1]。我读后恍然大悟，发现虚数原来这么简单，一点也不奇怪和难懂！

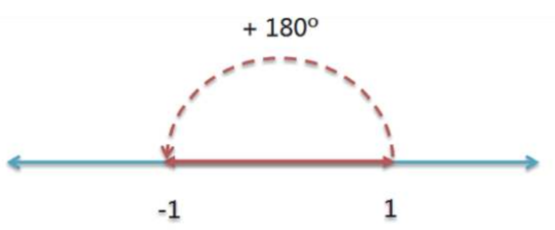
下面，我在 Azad 文章的基础上，用自己的语言解释虚数的含义。

[1] Kalid Azad, A Visual, Intuitive Guide to Imaginary Numbers, http://betterexplained.com/articles/a-visual-intuitive-guide-to-imaginary-numbers/ , 2007.

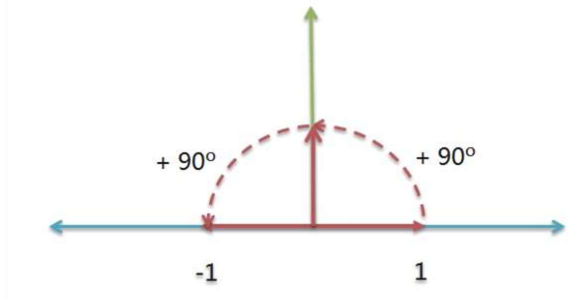
1 什么是虚数?

首先，假设有一根数轴，上面有两个反向的点：＋1 和－1。

这根数轴的正向部分，可以绕原点旋转。显然，逆时针旋转 180 度，＋1 就会变成－1。



这相当于两次逆时针旋转 90 度。



因此，我们可以得到下面的关系式：

$$(+1)\times(\text{逆时针旋转 90 度})\times(\text{逆时针旋转 90 度})=-1$$

有人可能会问，为什么这里要用乘法？其实，这里的乘法运算符只是代表连续进行的某种操作。

接下来，把 +1 消去，这个式子就变为：

$$(\text{逆时针旋转 90 度})^2=-1$$

将“逆时针旋转 90 度”记为 i：

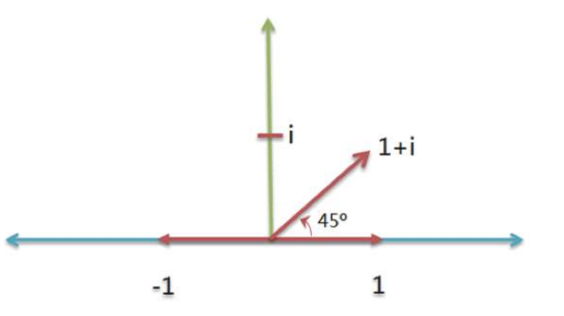
$$i^2=-1$$

这个式子很眼熟，它就是虚数的定义公式。

所以，我们知道了，虚数 i 就是逆时针旋转 90 度，i 不是一个数，而是一个旋转量。

2 复数的定义

既然 i 表示旋转量，我们就可以用 i 表示任何实数的旋转状态。



将实数轴看作横轴，虚数轴看作纵轴，就构成了一个二维平面。旋转到某一个角度的任何正实数，必然唯一对应这个平面中的某个点。

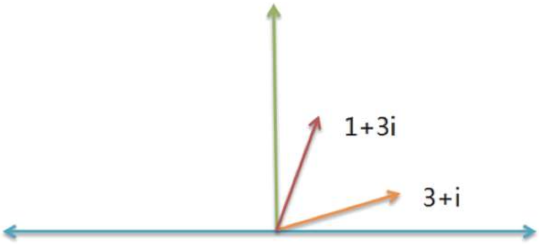
只要确定横坐标和纵坐标，比如 $(1, i)$，就可以确定某个实数的旋转量（45 度）。

数学家用一种特殊的方法，表示这个二维坐标：用 + 号把横坐标和纵坐标连接起来。比如，把 $(1, i)$ 表示成 $1+i$。这种表示方法就叫做复数（complex number），其中 1 称为实数部，i 称为虚数部。

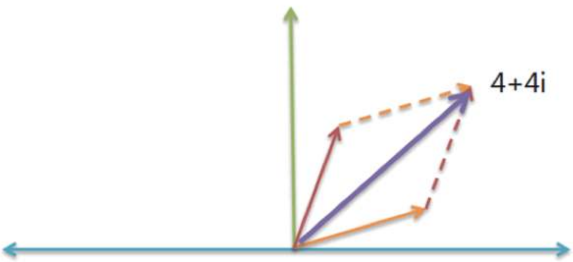
为什么要把二维坐标表示成这样呢？下一节告诉你原因。

3 虚数的作用：加法

虚数的引入，大大方便了涉及到旋转的计算。



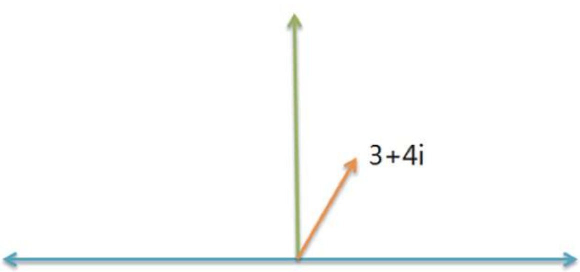
比如，物理学需要计算“力的合成”。假定一个力是 $3+i$，另一个力是 $1+3i$，请问它们的合成力是多少？



根据“平行四边形法则”，你马上得到，合成力就是 $(3+i)+(1+3i)=4+4i$。这就是虚数加法的物理意义。

4 虚数的作用：乘法

如果涉及到旋转角度的改变，处理起来更方便。



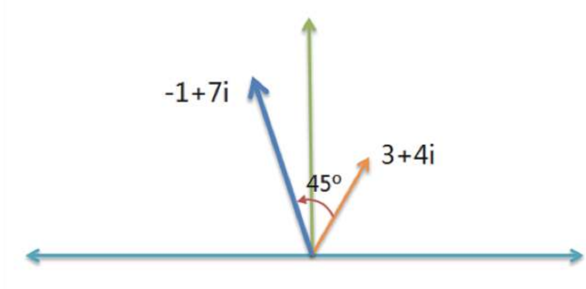
比如，一条船的航向是 $3+4i$。

如果该船的航向，逆时针增加 45 度，请问新航向是多少？

45 度的航向就是 $1+i$。计算新航向，只要把这两个航向 $3+4i$ 与 $1+i$ 相乘就可以了（原因在下一节解释）：

$$(3+4i)\times(1+i)=-1+7i$$

所以，该船的新航向是 $-1+7i$。



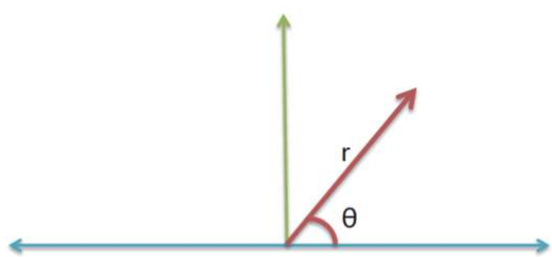
如果航向逆时针增加 90 度，就更简单了。因为 90 度的航向就是 i，所以新航向等于：

$$(3+4i)\times i=-4+3i$$

这就是虚数乘法的物理意义：改变旋转角度。

5 虚数乘法的数学证明

为什么一个复数改变旋转角度，只要做乘法就可以了？
下面就是它的数学证明，实际上很简单。



任何复数 $a+bi$，都可以改写成旋转半径 r 与横轴夹角 θ 的形式。
假定现有两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$，可以将它们改写如下：

$$a+bi=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$c+di=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$$

这两个复数相乘，$(a+bi)(c+di)$ 就相当于

$$r_1r_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

展开后面的乘式，得到

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$

根据三角函数公式，上面的式子就等于

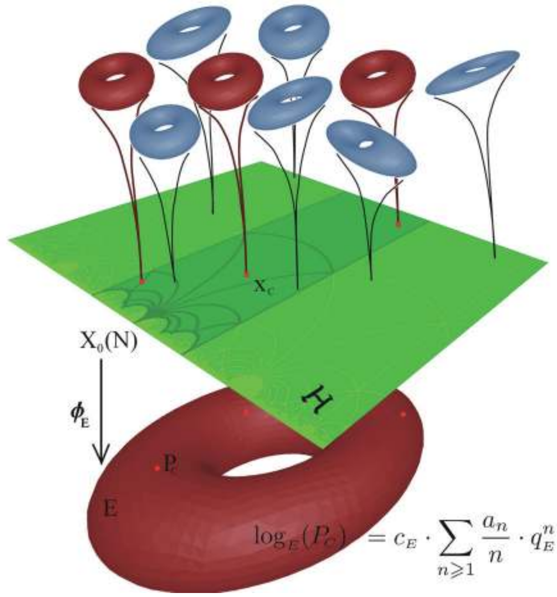
$$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

所以，

$$(a+bi)(c+di)=r_1r_2(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))$$

这就证明了，两个复数相乘，就等于旋转半径相乘、旋转角度相加。

作者简介：阮一峰，70 年代生，上海财经大学经济学博士，现在上海某高校任教。



浅说椭圆曲线

陆 俊

一、费马先生的金蛋：椭圆曲线

在所有律师里面数学最好的是谁？毫无疑问是法国的费马（Pierre de Fermat）—— 一位充满传奇色彩的业余数学家。 他在数学领域做了许多重要的开创性工作，足以媲美任何同时代的数学家。至今，我们还常常能在数学课本中见到他的名字。

比如说到解析几何，很多人只知道笛卡尔的大名，殊不知费马也是解析几何的创始人。他早就用坐标方法（即方程）去研究几何图形的性质。费马首先指出一次方程。

$$ax+by+c = 0.$$

可以表示直线。接着，他注意到二次方程可以表示圆锥曲线（即椭圆、双曲线和抛物线），并且知道如何用坐标变换研究它们的一般形式，这正是中学时代经常折磨我们的玩意儿。

费马（1601-1665）

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad （椭圆）$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad （双曲线）$$

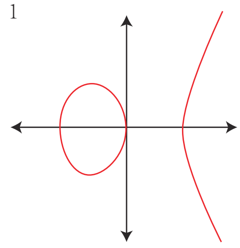
$$y^2 = ax \quad （抛物线）$$

如果你是费马，有了这些发现之后，很自然会去思考三次方程定义的曲线，对不对？费马当然也会这么想。首先，在一个合适的坐标变换后，大多数三次方程可以写成标准形式

$$y^2 = x^3+ax+b,$$

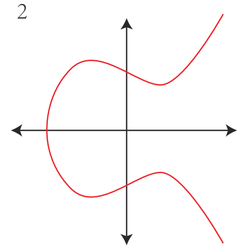
其中系数 a, b 满足 $4a^3+27b^2 \neq 0$，这个方程描绘出来的曲线就叫做**椭圆曲线**。后面我们再介绍不满足这个条件的曲线。下面的两张图都是椭圆曲线

1



$y^2=x^3-x$

2

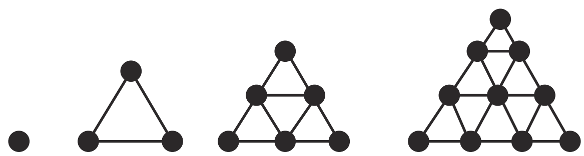


$y^2=x^3-x+1$

费马的许多研究都围绕着椭圆曲线。让我们循着费马的轨迹，一起来欣赏一下这些有趣的工作（有兴趣的读者可以参看加藤和也等人写的《数论 I: Fermat 的梦想和类域论》）。

(A) 立方数与三角数

所谓三角数，就是下面这类等边三角形上的格点个数：1，3，6，10，15，……。



你很容易猜出三角数的一般公式是 $n(n+1)/2$.

费马叙述了以下几个有趣的结果：

(1) 除了 1 之外，任何三角数都不可能是立方数。用方程的语言，就是说

$$\frac{y(y+1)}{2}=x^3$$

除了 $(x, y) = (1,1)$ 之外没有其他正整数解。上面这个方程描绘的曲线是椭圆曲线——当然你需要做一些坐标变换才能变成标准型。

(2) 一个立方数减去 2 不可能是平方数，除非是以下特例：$5^2 = 3^3 - 2$. 写成方程的话，就是

$$y^2 = x^3 - 2$$

仅有一组正整数解 $(x, y) = (3, 5)$。这方程描绘的曲线当然还是椭圆曲线。

(3) 一个立方数减去 4 不可能是平方数，除非是以下特例：$2^2 = 2^3 - 4$, $11^2 = 5^3 - 4$。也就是说方程

$$y^2 = x^3 - 4$$

仅有两个整数解 $(x, y) = (2, 2)$ 和 $(5, 11)$。上面的方程仍然描绘了椭圆曲线。

(B) 直角三角形与同余数

所谓的同余数，来自于以下经典的数学问题。

（同余数问题）给定正整数 n, 是否存在直角三角形，使得三条边都是有理数，并且面积恰好是 n? 如果存在这样的三角形，就称 n 是同余数。

费马在丢番图《数论》的空白处做的批注中叙述了这样的结果：

$n = 1, 2$ 不可能是同余数。

同余数问题由来已久，至今仍未彻底解决。 目前我们已知的最前面的同余数是

5, 6, 7, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 34, 37, 38, 39,41, 45, 46,47

同余数问题等价于求解正有理数 (a, b, c) 满足：

$$a^2+b^2=c^2,\quad n=\frac{ab}{2}.$$

如果我们令

$$x=\frac{n(a+c)}{b},\quad y=\frac{2n^2(a+b)}{b^2},$$

则得

$$y^2 = x^3 - n^2x.$$

这个方程再一次向我们呈现了椭圆曲线！显然 $(x, y) = (0, 0)$, $(n, 0)$，$(-n, 0)$ 是它的有理数解。正整数 n 是否是同余数，取决于上面的方程还有没有其他有理数解。

费马的另一个结论说：

> 假如 n 是同余数，那么上面的椭圆曲线方程应该还有无限多个有理数解。

例如，因为 5 是同余数，所以椭圆曲线方程 $y^2=x^3-25x$ 就有无限多个有理数解。

一般说来，判断一条椭圆曲线的方程是否有无限多个有理数解，是一个困难的问题。这个问题涉及到数学上最著名的猜想之一 —— BSD 猜想。这个重要的猜想曾作为千禧年七大数学猜想为世人所知，吸引了许多数学家为之奋斗。它将数学中很多深刻的理论分支都联系在一起。如果能解决它，那么数学的发展必将会飞跃一大步。

(C) 费马大定理

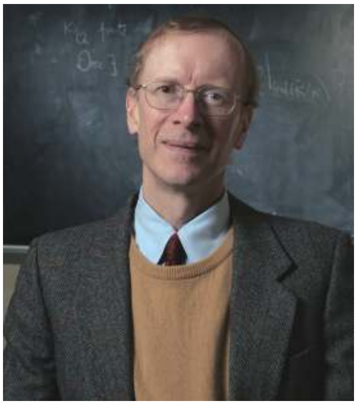
费马曾经在丢番图的书的批注中提出如下的“结论”（称为费马猜想、费马的最后定理、费马大定理）：

以下方程

$$X^n + Y^n = Z^n\ (n>2),\quad XYZ \neq 0$$

没有整数解 (X, Y, Z).

费马自己证明了 $n = 4$ 的情形，并声称找到了一种巧妙的方法能够解决一般情形。但是他并没有告诉人们一般情形



怀尔斯（1953-）

证明是怎样的。此后的几百年，有许许多多优秀的数学家致力于证明这个结论，但他们的努力都失败了。直到 1995 年前后，才由数学家怀尔斯（Andrew Wiles）彻底解决。

虽然许多人证明费马猜想的努力都未获成功，但是他们的工作却在很大程度上促进了各个数学分支的发展，极大地丰富了数学世界的内容。因此有人把费马猜想比喻作“一只会生金蛋的鸡”，实在是非常地准确。

如今回过头来看，我们不得不问：对于如此之难的数学问题，为何费马会声称自己找到了证明？到底是费马跟我们开了玩笑，还是上帝跟费马开了玩笑？这里不做探讨了。我们想要告诉大家的是，费马猜想和椭圆曲线的关系是极为密切的。从某个方面说，椭圆曲线是不折不扣的“金蛋”！

让我们来看几个具体的例子。

例 1：$X^3 + Y^3 = Z^3$.

这个特殊情形由高斯和欧拉分别解决。欧拉的证明极为繁琐，相比之下高斯的方法不但简洁，而且极富启发性。我们这里不打算介绍证明，有兴趣的读者可以参看 H. 德里《100 个著名初等数学问题》一书。

让我们做这样的初等变换：

$$x = \frac{12Z}{X+Y}, \quad y = \frac{36(X-Y)}{X+Y}.$$

将上式代入费马方程即得

$$y^3 = x^3 - 432.$$

瞧，这又是椭圆曲线！因为我们现在已经知道原来的方程没有非平凡解(所谓平凡解，就是允许 X, Y, Z 其中一个数是零)，所以这相当于说上面的椭圆曲线方程只有显然的有理数解 (12,36) 和 (12,-36).

例 2：$X^4 + Y^4 = Z^4$.

费马利用无穷递降法证明其无平凡解。它也可以通过以下初等变换变成椭圆曲线：

$$x = \frac{2(Y^2+Z^2)}{X^2}, \quad y = \frac{4Y(Y^2+Z^2)}{X^3}.$$

代入原方程即得一条椭圆曲线

$$y^2 = x^3 - 4x.$$

它仅有 (0,0), (2,0) 和 (-2,0) 三个有理数解。我们也可以用另一种方法得到椭圆曲线。令 $x = Z^2/Y^2$, $y = X^2Z/Y^3$, 这就得到新的椭圆曲线

$$y^2 = x^3 - x.$$

例 3：$X^n + Y^n = Z^n$, n 是素数（所谓素数，就是指不能分解成两个更小的正整数的乘积的正整数）。

假设 $(X, Y, Z) = (a, b, c)$ 是一组非平凡解。此时人们构造了椭圆曲线 (它不是标准方程)

$$y^2 = x(x+a^n)(x-b^n).$$

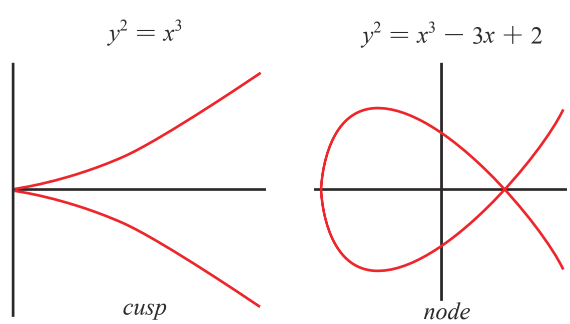
这条椭圆曲线称作弗雷曲线（Frey Curve）。里贝特（Kenneth Alan Ribet）于 1986 年证明该曲线不能是模曲线（这里我们不解释此概念）。而另一方面怀尔斯于 1995 年证明谷山 - 志村猜想（Taniyama–Shimura conjecture），即任何椭圆曲线都是模曲线，这就等于证明费马方程无非平凡解。

如果 n 是大于 4 的合数，上面的几类例子可以很容易地推出：此时的费马方程也无非平凡解。限于篇幅，我们不再详细介绍。有兴趣的读者可以参看辛格所著的《费马大定理》或其他相关的科普书籍。

二、退化的椭圆曲线

上面我们定义的椭圆曲线方程 $y^2 = x^3+ax+b$ 要求系数满足 $4a^3+27b^2 \neq 0$.

那么假如 $4a^3+27b^2 = 0$, 我们会得到什么样的三次方程的曲线呢？



(1) 带结点的有理曲线（a, b 不全为零）此时图形如上图图右。

大家可以看到，曲线上有一个自交点。 在这个交点附近看曲线类似于一个十字架，因此我们称之为结点 (node)。这里“有理曲线”一词可以粗略理解为指直线或圆锥曲线的意思。上述曲线图形可以差不多看成是这条有理曲线打了一个结——后面我们会解释这一点。

(2) 带尖点的有理曲线 ($a=b=0$) 此时图形示意图如上图左。

这条曲线有一个尖锐的点，称作尖点 (cusp)。顾名思义，这条曲线就好比是有理曲线上捏出一个尖点。

除了以上两种曲线，我们还把以下几类曲线都统称为退化的椭圆曲线：

(3) 三条直线的并集（即三条一次曲线的并集），

(4) 一条圆锥曲线和一条直线的并集（即一条二次曲线和一条一次曲线的并集）。

从这个泛化概念上看，我们可以把直线和圆锥曲线也看作是椭圆曲线的一个部分。因此，可以预见，圆锥曲线的很多美妙性质应该都来自于椭圆曲线。事实正是如此。

三、名不副实：为什么叫“椭圆曲线”?

椭圆曲线的图形和椭圆显然没什么关系（见前面的图）那为什么我们要称之为“椭圆曲线”呢？

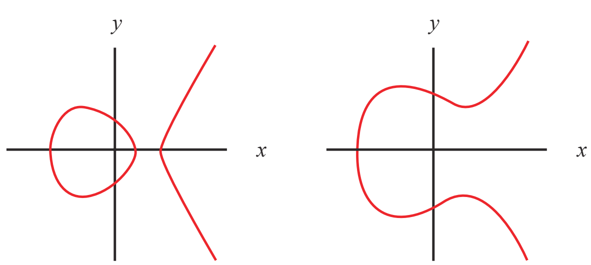
原来，当初人们想用微积分计算椭圆的周长（圆的周长大家都会求）。通过一定的积分技巧，最终要求出以下类型的积分：

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{x^3+ax+b}}$$

其中分母的函数项 $y=\sqrt{x^3+ax+b}$ 两边平方一下恰好就是椭圆曲线的方程。这就是为什么椭圆曲线的名字里包含“椭圆”二字。顺便说一下，上述积分是无法用初等函数的表达式计算出来的；而其本质原因和椭圆曲线的几何性质密切相关。

四、海底冰山：椭圆曲线隐藏的部分

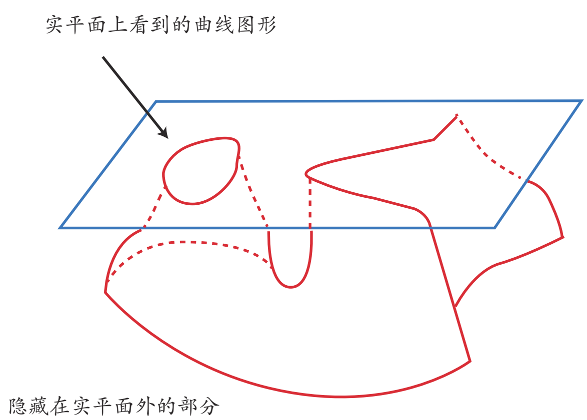
回顾一下，椭圆曲线的两个例子



从第一张图，我们可以看到椭圆曲线的图形似乎可以分离成两个不相交的分支，第二张图则只有一个分支。是否还有许多其他的类型呢？确实如此。牛顿曾经对椭圆曲线做了很细致的分类，将它们分成了数十种类型。

为什么直线和圆锥曲线只有区区几种类型，而椭圆曲线种类一下子增加很多呢？让我们先想象一个情景：在宽阔的海平面上露出一处礁石。如果海平面降低的话，礁石就会变大，可能会形成一座小山；如果海平面继续下降，本来的一座小山可能会变成许多座互不相连的小山；随着海平面下降，小山们变成了一座座小岛，有些本来不相连的岛甚至可能会连接起来。假如我们抽干所有的水，那么你会发现所有的岛其实只不过是同一块陆地的不同部分。

其实我们要解释的问题和上述比喻完全一样。 因为通常考虑的曲线上的点 (x, y) 都是实数点，即 x, y 是实数。假如我们允许 x, y 取复数，那么椭圆曲线上就多出了许许多多复数点。想象一下，实数坐标平面好比我们的海平面，包括全部复数点和实数点的椭圆曲线好比是陆地，其中露在海平面上的部分只是实数点（见以下示意图）。



这样一来，你看到的椭圆曲线实图形其实只是整个椭圆曲线中的很少一部分，大部分都隐藏在实坐标平面背后。海面上的岛屿千差万别，但实际上无非是同一块陆地的不同部分。这就是我们所要的答案——有点类似于“盲人摸象”的典故。

上面的讨论告诉我们，如果仅考虑实数情形的话，我们其实损失掉了很多有用的几何信息。仅考虑实数平面图形显然是一个不必要的思维枷锁。因此我们完全可以放弃掉这一假设，即允许 x, y 取复数。这样一来我们得到的椭圆曲线要比原来的丰富了许多！当然，为了以后画图方便，人们仍然习惯于用实数平面的图形作为椭圆曲线的示意图——上一节的几张图都是这样。以后我们谈到椭圆曲线就默认它是在复数坐标上的。

接下去的问题就来了：这样的椭圆曲线的图形到底是什么呢？它当然不再是我们前面看到的实曲线的样子了。事实上，它是四维空间里的一个环面！所谓环面，就是指如下的救生圈：

首先我们说明，为什么它是四维空间里的。因为此时 x 和 y 是复数，所以我们可以写成实虚部表达式

$$x=s+t\sqrt{-1},\quad y=u+v\sqrt{-1},$$

这样，原来的复坐标 (x, y) 就可以替换成四维空间坐标 (s, t, u, v)。因此椭圆曲线上点的轨迹肯定在这四维空间里。那么为什么它是曲面而不是曲线呢？这是因为将 x, y 的实虚部表达式代入方程

$$y^2=x^3+ax+b,$$

整理后方程可以写成实部和虚部两部分

$$U(s,t,u,v)+V(s,t,u,v)\sqrt{-1}=0.$$

这相当于说，s, t, u, v 要满足两个方程

$$U=V=0.$$

四个变量满足两个方程，这就意味着其中有两个变量是独立的，它们可以表达出剩下的两个变量。从几何上说，这就是指椭圆曲线的图形是个曲面。

至于为什么它是环面，这可不是三言两语能说清楚的。它涉及到复变函数和拓扑学的一些简单技巧，我们这里不再详细解释了。有兴趣的读者可以参看伏•巴尔佳斯基写的一本极有趣味的科普书——《拓扑学奇趣》。

尽管扩充到复数域上的椭圆曲线是环面，但是我们仍然称呼它为“曲线”，毕竟它在实数坐标平面上的图形仍然是曲线——示意图仍以实图形为标准。我们也可以把它想象成是复数坐标下的“曲线”，即复一维图形。

五、举一反三：退化的椭圆曲线是什么图形

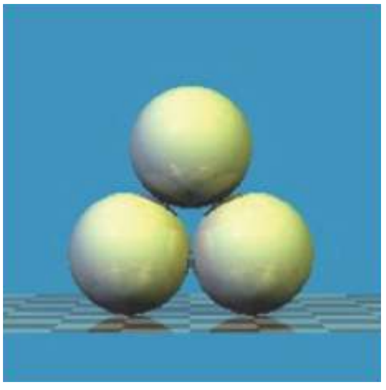
好奇的读者可能会问：按照上面的办法，我们也能够把直线和圆锥曲线扩充到复数情形，那么它们是四维空间中的什么图形呢？答案是：它们都是球面。（作者按：它们是球面的原因来自于所谓的球极投影，以后将撰文介绍，这里不再详细解释了）

既然如此，直线和圆锥曲线岂不是一样了？事实正是如此！我们平时之所以看着它们觉得不一样，除了上面说的原因之外，还有一个原因，就是我们没有把曲线上的无穷远处的点放进曲线——射影几何中这样的无穷远点都是作为通常的点来看待的。一旦我们把这些所谓的“虚无飘渺”的无穷远处的点加进去，你就会发现它们完全是一样的。事实上，上一节的讨论中，我们也默认了这一点。

很显然，球面和环面有着本质的差别，环面中间有一个洞眼而球面却没有——这种洞眼数学上叫做亏格。因此椭圆曲线要比圆锥曲线及直线复杂得多。前面我们讲的椭圆周长积分——实际上可以看成环面上的积分。这里插一句，我们古典的数学分析实际上都是在平直的空间上（直线、平面……）建立微积分的理论。 因此我们当然也可以在弯曲的空间（环面）上建立微积分。

聪明的读者一定也会想到，退化的椭圆曲线扩充到复数情形，又是什么图形呢？比如

(1) 三条直线的并集（如图）



因为每条直线相当于球面，所以三条直线相当于三个球。

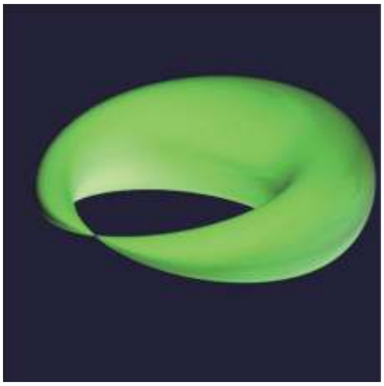
又因为我们把无穷远处的点考虑进来了，因此任何两条直线都要相交，这样就得到上图的样子。（作者按：其实还有三条直线交于一点的情形，这里我们没有画出来）

为什么我们说这样的图形是退化的椭圆曲线呢？我们将上面的三个球相切点替换成很细小的管子，将这三个球内部连通起来，

然后对这个容器内充气，这就膨胀成一个环面咯！

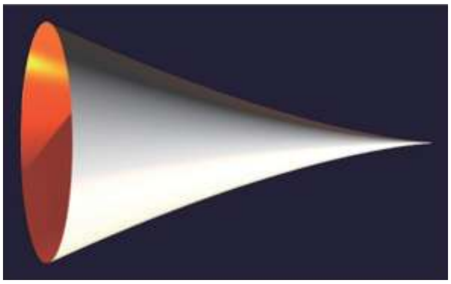
你把这个过程倒过来放，就是我们通常说的退化了：从环面退化成三个球。

(2) 带结点的有理曲线



这看上去就像香蕉，只不过两头接在一起——接触点就是我们说的结点。显然，当你弹开这个结点，并对香蕉充气，就得到球面了——也就是有理曲线。

(3) 带尖点的有理曲线（下图为尖点附近的局部图）



六、遗传基因：椭圆曲线的 j 不变量

前面我们给的椭圆曲线方程，是所谓的魏尔斯特拉斯标准方程（这就类似于椭圆、双曲线、抛物线的标准方程）$y^2 = x^3+ax+b$。

如果一条椭圆曲线能够在坐标变换下，变成另一条椭圆曲线（即方程在坐标变换下可以从一个变到另一个），我们就认为这两条椭圆曲线是相同的——这就类似于平面几何中两个三角形相似。

一个有趣的问题是：我们如何能够从方程直接判断出两条椭圆曲线是否相同呢？答案出乎意料地简单。为此我们引进一个数值，这个数值就好比椭圆曲线的基因，它完全确定了椭圆曲线的性状。

考虑椭圆曲线 E 的魏尔斯特拉斯标准方程如上，我们定义该椭圆曲线的 j- 不变量

$$j(E)=\frac{4a^3}{4a^3+27b^2}.$$

因为椭圆曲线的定义中就要求上述分母 $4a^3+27b^2 \neq 0$, 所以上面式子是有意义的。

我们现在给出上述问题的回答：

> 两条椭圆曲线相同的充分必要条件就是它们的 j 不变量相等。

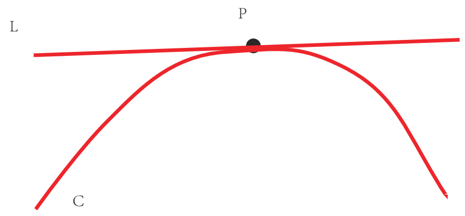
有了这个结论，你可以轻松判断任何两个椭圆曲线是否相同，不妨找几个例子试试吧。

七、椭圆曲线的拐点

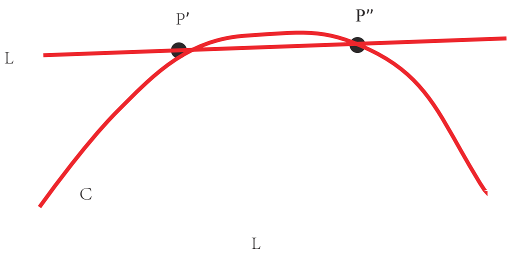
在古典解析几何中，人们关心曲线上每个点的切线，比如圆的切线等等。我们首先想要知道如何说明切线和曲线相

切的密切程度。这里有个很简单的直观方法。

考虑下图曲线 C 在点 p 处的切线 L



现在我们稍稍扰动一下切线 L，此时 L 不再和 C 相切，而是相交若干个交点，这些交点当然彼此靠得很近（见下面的示意图）。这些交点的个数，我们称之为切线与 C 在 p 处的相切数。这个数值是和 L 的扰动方式没有关系的（比如下图的相切数是 2）。



因此切点好比是这样的一些交点彼此趋近最终重合到一起得到的。具体言之，假设 p 处的相切数是 n, 我们有时就说切线 L 与 C 在 p 处的切点是由 n 个重合点构成的。

一条曲线上的大部分点的相切数都是 2，但是有一部分点的相切数至少是 3。这样的点我们称其为**拐点**。

> 椭圆曲线上有且仅有 9 个拐点！并且这些拐点相切数恰好都是 3。

还有更有趣的结论：

> 存在 12 条直线过这 9 个拐点，并且每条直线经过其中 3 个拐点。

此外，任何两个拐点的连线必定经过第三个拐点。

请注意：圆锥曲线不存在拐点。

八、椭圆曲线的交点

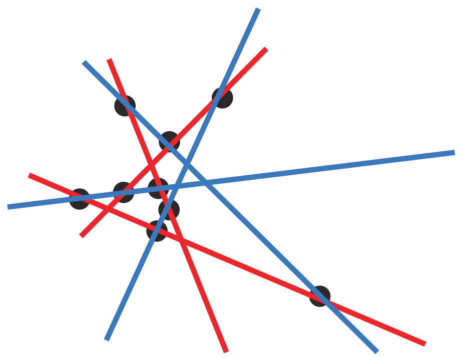
上面所有的讨论都集中在一条椭圆曲线上。现在让我们考虑两条椭圆曲线 E, E'。我们问 E 和 E' 一共有多少个交点？（切点作为重合点来重复计算）

在平面几何中，两条直线相交一个点（平行线相交在无穷远点）。两条圆锥曲线相交四个点（在复数坐标意义下）。

> 两条椭圆曲线 E 和 E' 总共相交 9 个点！

请注意，这个结论是和椭圆曲线的形状、位置完全无关的。

我们可以用一种直观的方式来说明这件看似神奇的事。前面我们说到，椭圆曲线——也就是环面——可以退化成三条直线的并集——也就是三个两两相切的球。现在让我们想象一下 E 和 E' 分别慢慢地各自退化成 3 条直线（示意图中的蓝线和红线分别表示 E, E' 的退化直线）。



在这个退化过程中，交点个数是不变的——因为你可以假设退化的地方没有碰到交点。这样一来，为了计算 E 和 E' 的交点个数，我们只需要数一数上图中蓝线和红线的交点个数就行了。

这个证明很有启发性。假如你想考虑任何两条曲线（方程次数可以超过三）的交点个数，用类似方法很容易得到一个优美的答案——这就是著名的贝祖定理（Bézout's theorem）。有兴趣的读者可以自己试着寻找一下答案是什么。

这里我们罗列几条这样的结论：

> (1) 一条椭圆曲线和一条圆锥曲线相交 6 个点。
> (2) 一条椭圆曲线和一条直线相交 3 个点。特别地，这就是为什么椭圆曲线拐点处的切线有相切数 3。

再来一个更神奇的结论——夏莱定理（Chasles' theorem）

> 假设第三条椭圆曲线经过椭圆曲线 E 和 E' 的其中 8 个交点，那么它必定也穿过剩下的第九个点！

这个定理异常地彪悍，因为它能推出许许多多平面射影几何中有关共点共线的著名定理。

我们下一节再来展示它的这一系列应用。

证明夏莱定理可没上面的贝祖定理那么简单了——尽管证明也是初等的。事实上，这个定理只不过是诺特定理（Noether's theorem）的一个特殊情形而已。这里的诺特可不是女数学家艾米•诺特（Emmy Noether)，而是她的父亲，代数几何古典学派的重要奠基人之一 ——马克思•诺特（Max Noether）。

马克思•诺特（1844-1921）

艾米•诺特（1882-1935）

这里请允许我再多说两句：一条曲线是否通过另外两条曲线的交点这类性质称作凯莱 - 巴卡洛克性质（Cayley-Bacharach Theorem）性质，这种性质在平面几何中就是我们说的共点共线问题。这些性质背后隐藏着很深刻的数学背景，和许多重要的数学理论密切关联。

九、夏莱定理的威力

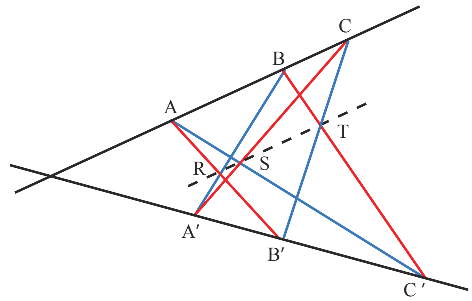
其实夏莱定理很少在平面几何中被提及。这是因为平面几何主要关心直线和圆锥曲线的问题，不会涉及椭圆曲线。但是我们知道，椭圆曲线可以退化到直线和圆锥曲线。这种退化不会影响上一节的所有结论，因此我们可以将这个定理改头换面与射影几何对偶原则配合，由此演变出许多著名的平面几何定理。这里试举几例。

巴布斯定理（Pappus's theorem）

设 A, B, C 三点共线，A', B', C' 也三点共线。考虑以下各交点

$$R=\overline{BA'}\cap\overline{B'A},\ S=\overline{AC'}\cap\overline{A'C},$$
$$T=\overline{CB'}\cap\overline{C'B},$$

则 R, S, T 三点共线。



事实上，我们只需要将夏莱定理直接应用到如下 3 条退化三次曲线上 (它们各自由 3 条直线构成) 即得出结论：

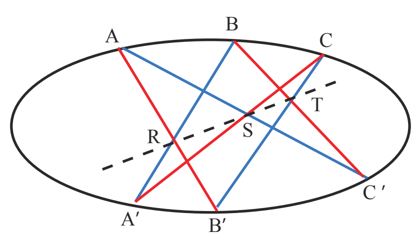
$$C=\overline{CA'}+\overline{AB'}+\overline{BC'},\ D=\overline{BA'}+\overline{AC'}+\overline{CB'},$$
$$H=\overline{AC}+\overline{A'C'}+\overline{RS}.$$

帕斯卡定理（Pascal's theorem）

设 A, B, C 及 A', B', C' 在同一椭圆 W 上。考虑以下个交点

$$R=\overline{BA'}\cap\overline{B'A},\ S=\overline{AC'}\cap\overline{A'C},$$
$$T=\overline{CB'}\cap\overline{C'B},$$

则 R, S, T 三点共线。



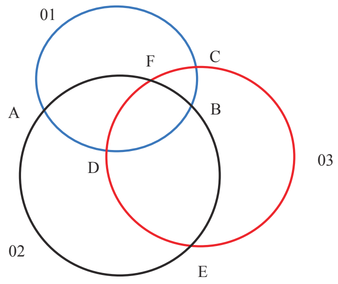
同样地，我们考虑 3 条退化的椭圆曲线：

$$C=\overline{CA'}+\overline{AB'}+\overline{BC'},\ D=\overline{BA'}+\overline{AC'}+\overline{CB'},$$
$$H=W+\overline{RS},$$

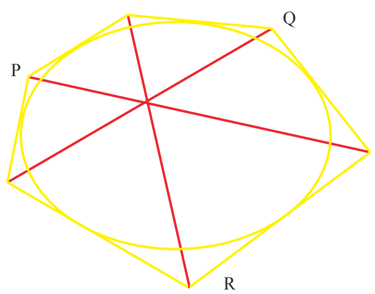
并应用夏莱定理即可证明该结论。

三弦共点定理

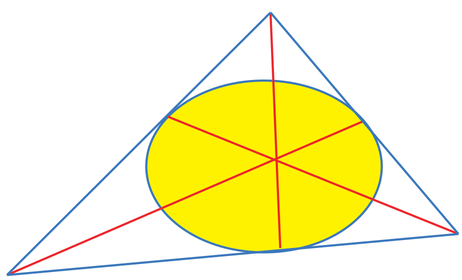
设三个圆 O_i（$i=1,2,3$）两两相交，彼此之间的公共弦分别记为 $\overline{AB}, \overline{CD}, \overline{EF}$，那么这三条弦必交于一点。



布列安桑定理（Brianchon's theorem）椭圆的外切六边形的三条对角线共点。

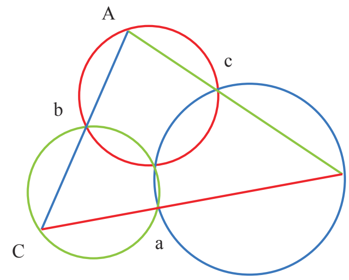


以下是它的退化情形（将顶角 P, Q, R 退化成 180 度）



密克定理（Miquel's theorem）

三角形 ABC 三边各取一点 a, b, c，分别作圆 Abc, Bac, Cab，则这三个圆相交于一点。这个点称作密克点。）



十、结束语

我们这篇文章就写到这里。这些有趣的性质只不过刚刚揭开了椭圆曲线的冰山一角。它们只是整个椭圆曲线理论中的序曲罢了。将来有机会，我将继续介绍椭圆曲线的其他有趣内容。我在这里首先感谢谈胜利教授曾经提供的椭圆曲线演讲稿和硕士生基础课《代数几何基础》讲义草稿——许多图片和素材都取自于它们。其次要感谢洪渊老师、梁科老师和顾琦老师的指点与鼓励。在这里，我还要特别感谢洪渊老师。他在百忙之中抽空与我详细耐心地讨论，提出了很多重要的修改建议，使我对科普写作有了更多的理解和认识。

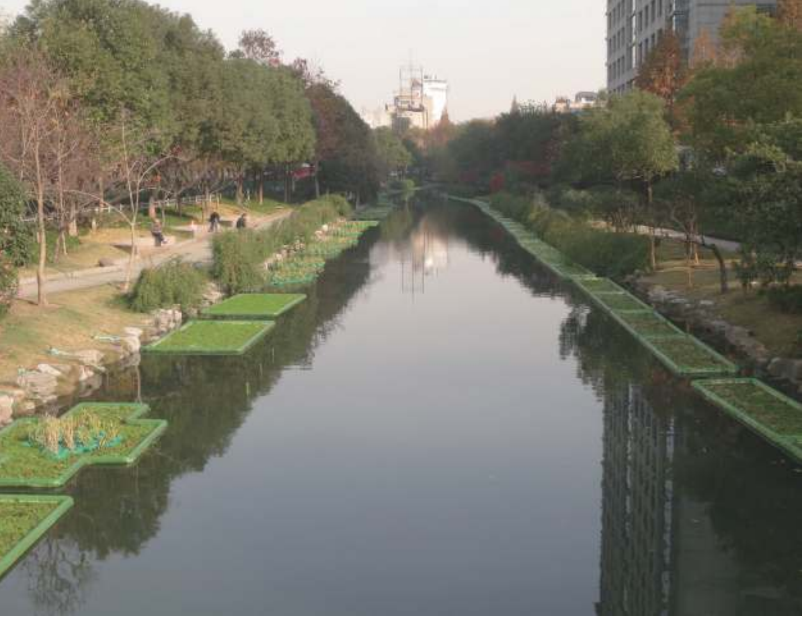
作者简介：陆俊，华东师范大学数学系讲师，代数几何方向，师从谈胜利及陈志杰教授。

Bridge Named After the Mathematician Who Discovered the Chinese Remainder Theorem

跨越千年的数学桥

徐雯雯 俞 宁

照片提供：李佳/蔡天新



左上图：道古桥畔；左下图：重建后的道古桥；右图：道古桥上

正如流经剑桥大学的剑河上有一座传说由著名的大科学家艾萨克•牛顿建造的“数学桥”，中国城市杭州也有一座类似的历史更为悠久的桥——道古桥。

道古桥建于 770 多年前，位于西溪路上，横跨西溪河，靠近浙江大学的西溪校区。当地居民对这座石桥的历史几乎无所知晓，直到浙江大学数学系教授蔡天新揭开了这一段尘封的记忆。

据史料记载，道古桥建于 1237 年至 1241 年间。大约十二年前，因该地区的房屋整修计划被拆。不过，2005 年，一座新的石桥建成于离原址一百来米远的地方，两岸垂柳摇曳。在蔡天新的倡议之下，此新石桥被命名为“道古桥”。

“尽管桥址已移动，历史和故事仍延续下来。”4 月 27 日，蔡天新在道古桥重命名仪式上如是说，为此他做出了努力。

Just as there is a famous bridge built by the great scientist Isaac Newton over the River Cam in Cambridge University called "Mathematical Bridge", the Chinese city of Hangzhou also has its own such bridge, with an even longer history.

The Daogu Bridge is some seven hundred seventy years old and crosses the Xixi River near Zhejiang University's Xixi campus on Xixi Road. The stone bridge's history was known by few modern people, until Cai Tianxin, a mathematics professor from Zhejiang University, uncovered its dust-laden secrets.

According to local historical records, the bridge was built between the years of 1237 and 1241. It was demolished a decade ago during a local building project. However, in 2005 a new stone bridge was built about 100 meters away from the original

上图：秦九韶故里；下图：秦九韶纪念馆，路甬祥题

此桥以南宋（1127-1279）数学家秦九韶（1208-1261）命名，道古是他的字。

秦九韶被认为是13世纪最伟大的数学家之一，发现了世界著名的中国剩余定理，这是古代中国最著名的科学定理。他的声望建立在1247年写就的著作《数书九章》上，该书内容从丢番图分析到军事与测量，涉猎可谓广泛。

除了中国剩余定理，书中还有已知三角形三条边长求面积的秦九韶公式，即海伦公式。德国数学史家莫里茨•康托尔称秦九韶为“最幸运的天才”，美国科学史家乔治•萨顿则认为秦九韶是“他那个时代最伟大的数学家之一”。

秦九韶，祖籍山东，生于普州安岳（今四川安岳）。1219年，他随家人到杭州的西溪河边定居，如今从上海乘坐高铁到那里只需40分钟。那时杭州叫临安，是中国的首都，他的父亲在京城做官。“从孩童时代起，他就被认为是一个

秦九韶塑像，南京北极阁气象博物馆

location over the river, with willow trees swaying on both banks. It is now named Daogu Bridge, as Cai proposed.

"Though the site and bridge are now removed, its history and story remain," says Cai, who contributed to the renaming and attended the renaming ceremony held on the bridge on April 27. Cai says that historical gazetteers reveal that the old Daogu Bridge was named after a mathematician of the Southern Song Dynasty (1127-1279), Qin Jiushao, or spelled Ch'in Chiu-Shao (1208-1261) (Daogu is Qin's courtesy name).

Qin, regarded as one of the greatest mathematicians of the thirteenth century, created the world-renowned Chinese Remainder Theorem, considered the most famous scientific theorem of ancient China. His reputation lies in the Mathematical Treatise in Nine Sections (Shu Shu Jiu Zhang), issued in 1247, which covered matters that ranged from indeterminate analysis to military matters and surveying.

In the treatise, besides the Chinese Remainder Theorem, Qin also included "Qin Jiushao's formula" for finding the area of a triangle with given length of three sides, which is the same as Heron's formula, discovered earlier. No wonder the German mathematical historian M. Cantor praised him as "the luckiest genius,"and American scientific historian George Sarton regarded him as one of the greatest scientists of the time.

Qin was born in Sichuan Province, and his ancestry can be traced back to Shandong. In 1219 he settled near the Xixi River in Hangzhou, a city nowadays only forty minutes away from Shanghai by bullet train, which was then known as Lin'an and was the dynastic capital when his father was assigned as an

上图：道古桥畔合影，前排右一是蔡天新，后排左一是张立新；下图：左起林正炎、唐孝威、沙健、严伟明

天才，不仅在数学上有造诣，且精通天文、工程、音乐，并在多个省份为官。”蔡天新说。

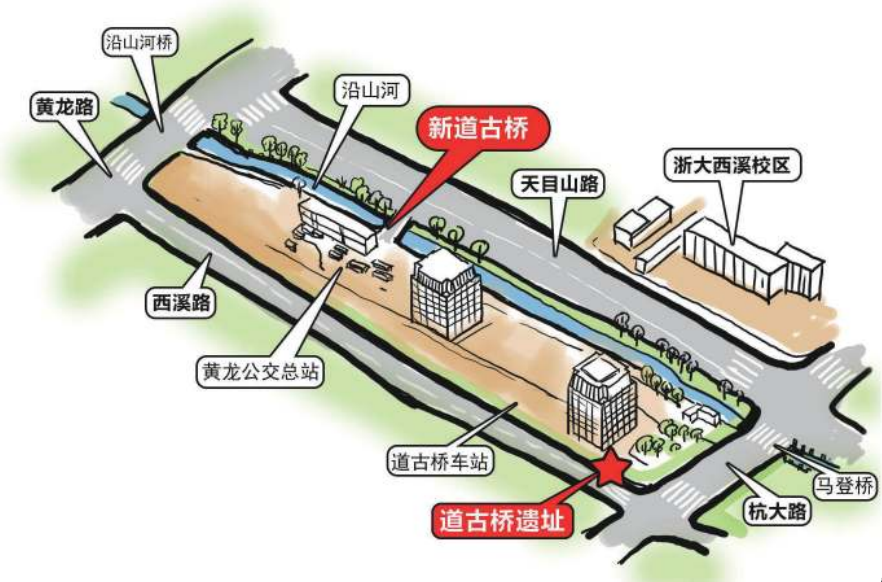
“1238 年，秦九韶丁父忧回到杭州，由于发现交通不便，他决心在西溪河上造桥，以利民众通行。他亲自设计，并得到当地政府的资助。刚开始此桥被称为西溪桥，等到元代北方来的数学家朱世杰游历杭州，才建议将此桥命名为道古桥。”

“此桥之所以被人遗忘，甚至在当时未能以‘道古’命名的一个重要原因，是由于数学家本人身处政治漩涡，其政治对手将其描述成一个行贿者和投毒者。但是，数个世纪以后的清朝，就有多位学者怀疑这些指责，试图为他恢复名誉。今天，关于秦九韶的道德疑问仍无法澄清，而时光已给这个故事蒙上了神秘的面纱。”

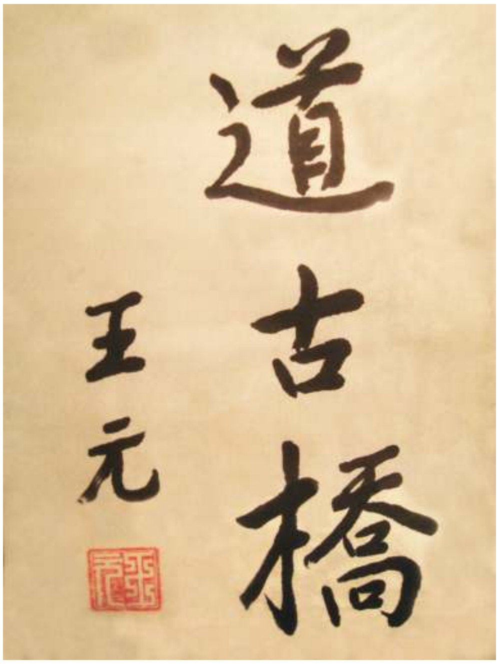
一年前，作为秦九韶的数论同行、《数学文化》杂志的编委，曾在道古桥附近住过 18 年多的蔡天新重游了此地，

official there. "Hailed as a genius since his boyhood, he not only devoted his life to mathematics but also to many other fields, such as astronomy, engineering, and music, and even held a series of bureaucratic positions in several Chinese provinces,"Cai says.

"In 1238, when Qin went back to Hangzhou for his father's funeral, the man found there was no bridge over the Xixi River, a fact which caused inconvenient transportation. As a result, the 'Daogu Bridge' was built under his design as well as financial support from the local government. At the beginning the bridge was called Xixi Bridge for its location and was later altered to Daogu Bridge when Zhu Shijie, another famous mathematician from North China, traveled to Hangzhou in the early Yuan Dynasty (1271-1368) and proposed changing Xixi Bridge into



左图：道古桥地图（梁津铭绘）；右图：道古桥施工中



王元院士为道古桥题写桥名

注意到附近的那座桥与原先的道古桥有些相似，这给了他灵感。在他的努力和当地政府的支持下，举行了一个重新命名的仪式。

桥边新落成一块石碑，刻着“道古桥”三个字，题字的是 83 岁的著名数学家、教育家和科普作家王元院士。反面是一篇碑文，讲述了相关的历史故事。

道古桥所在地虽算不上是风景名胜，但杭州这座城市却是有名的旅游天堂：著名的西湖已列入世界遗产名录，离桥不远的西溪湿地也是游人的必访之地。

Daogu Bridge in honor of Qin Jiushao. "

"One reason that the bridge was forgotten and not even named after Qin is that the mathematician, who went into politics, was later, in articles written by two of his political opponents, described as a person who bribed and poisoned someone. However, centuries later in the Qing Dynasty several scholars doubted these claims and tried to rehabilitate him. Today there remains no certain answer to Qin's political merit, and time has cast a shroud over the convoluted story."

A year ago, Cai, who is also a number theorist like Qin as well as an editor of the Hong Kong-based magazine Mathematical Culture, and who had lived near the bridge for over eighteen years and recently visited the place, was aware that the bridge is in similar surroundings to those of the original Daogu Bridge, which drove him to the idea of renaming the new bridge with the historic name. With Cai's endeavors and support from local government, a naming ceremony was officially held.

Beside the bridge there is a tablet with the inscription "Daogu Bridge", written by eightythree-year-old Wang Yuan, a renowned Chinese mathematician, educator, and popular science writer. On the reverse side of the tablet an article tells the historic story. The site of the bridge is not exactly a scenic attraction, yet the city of Hangzhou is known as a tourist's paradise: the city's West Lake was inscribed on the list of World Heritage Sites, and the Xixi Wetland, which is not far from the bridge, is also a must-visit location.

英文出处：Notices of AMS, 2013.5

《中国数学会通讯》是该刊编辑委员会编辑出版的内部刊物，季刊。主要刊登国内外数学界的重要信息，报道中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章(数学的历史、进展、价值、趣事等)，人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

2013年《中国数学会通讯》全年的总订费为50元(含邮费)。欢迎各省市自治区数学会、学科分会和有关单位以及广大数学工作者、数学爱好者订阅本刊并踊跃投稿。

订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路55号(邮政编码：100190)，中国数学会办公室；或行汇至中国数学会，同时请给中国数学会办公室来信告知(或在汇款单附言中注明)订购份数、收刊单位(或个人)详细地址及邮政编码，以便我们及时准确地投寄本刊。

开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2013年第2期要目：

- 中国数学会学术交流工作委员会，正副理事长、秘书长联席扩大会议纪要
- 在喜马拉雅山巅上行走的人
- 美丽的孪生素数

纪念陈建功先生诞辰120周年系列活动在杭州、上海举行
希尔伯特的书房
美发布《2025年的数学科学》报告
《数学学报》、《中国科学：数学》编委会会议纪要
2013全国数学科普论坛在上海大学隆重召开
2013几何分析研讨会会议纪要
第三届非线性波：理论及其应用国际会议
田园诗三首

《中国数学会通讯》编辑部供稿

法国军人的数学素质

陈关荣

法国在现代数学的卓越成就和领导地位是众所周知的。不过，许多人没有注意到，在法国的历史上，连一些军人的数学素质都非凡优秀。这里仅列举几位大家熟识的人物。

笛卡儿

勒内·笛卡儿（René Descartes, 1596-1650）是西方现代哲学思想的奠基人之一，也是近代欧陆理性主义，即人的推理可以作为知识来源的哲学理论的开拓者，提出了“怀疑一切”的主张。特别是，他以那句“我思故我在”而闻名天下（原文是拉丁文 Cogito ergo sum，英文是 I think, therefore I am）。

笛卡儿于 1616 年获得法学硕士学位，两年后从军，当了一名军官，接着参加了一场战争。战后他到处旅行，走访了欧洲很多国家，途中结识了许多著名科学家，集思广益，加上个人的努力，成为了法国著名的哲学家和伟大的启蒙者，被誉为“法国人的骄傲”甚至是“法兰西民族的神话”。笛卡儿也是一位数学家和物理学家，以几何坐标体系公式化而著名，被尊为“解析几何之父”而写进了数学史册。

洛必达

法国侯爵洛必达（L'Hospital, 1661-1704）是著名瑞士数学家约翰 • 伯努利（John Bernoulli, 1667-1748）的学生。他天资聪颖，15 岁时解决了法国数学家布莱士 • 帕斯卡（Blaise Pascal, 1623-1662）提出的一个摆线难题。洛必达年轻时曾经服役，是骑兵大尉。1696 年，退役后转向于数学研究的洛必达出版了名著《阐明曲线的无穷小分析》。他在书中第 9 章里介绍了导师约翰 • 伯努利两年前写给他的信中告诉他关于“求一分式中当分子分母都趋于零时的极限”问题的解析方法。可能是由于该书是世界上第一本微积分教科书，特别是由于一些人转载文献时不标明原作者和出处的坏习惯所致，后来几乎所有的数学书本中都称该求极限方法为“洛必达法则”，着实为数学史上一大误会。

拿破仑

法兰西帝国第一任皇帝拿破仑（Napoléon Bonaparte, 1769-1821）是用不着他人介绍的军事统帅，但许多人不知道他还是法兰西科学院数学部院士。以他来命名的有“拿破仑三角形”。据说拿破仑的初等数学技巧曾经令他的侯爵、大数学家皮埃尔 - 西蒙 • 拉普拉斯（Pierre-Simon de Laplace, 1749-1827）赞叹不已。当然，拿破仑更为敬仰拉普拉斯的数学造诣和政治能力，曾任命他为内政大臣。

拿破仑外三角形定理说：“以三角形各边为边分别向外侧作等边三角形，则它们的中心构成一个等边三角形。”该等边三角形称为“拿破仑外三角形”，如图 1 所示。

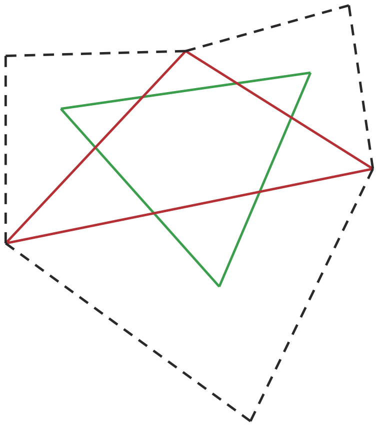


图 1 拿破仑外三角形

与之对应的，有拿破仑内三角形定理：“以三角形各边为边分别向内侧作等边三角形，则它们的中心构成一个等边三角形。”该等边三角形称为“拿破仑内三角形”。

在拿破仑所钻研的平面几何题目中，有的难度相当高。例如，有一个题目是：“不用直尺而只用圆规，将一个给定的圆周等分成四份”。拿破仑自己给出了答案。他的办法是：在以 O 为圆心的圆周上任取一点 A，从它出发以圆之半径 R 顺次截取 B、C、D 三点，也就是 AB ＝ BC

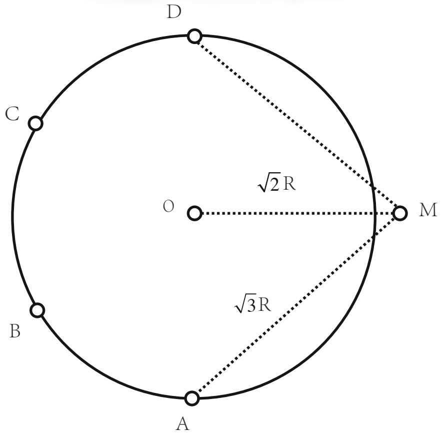


图 2 只用圆规来四等分一个圆

$=$ CD $=$ R。那么，因为圆规六等分该圆周，AD 是圆的直径，且 AC $= \sqrt{3}$ R 为圆内接正三角形的一边。然后，分别以 A 和 D 为圆心，AC $= \sqrt{3}$ R 之长为半径，画两段圆弧，相交于 M 点。再以 OM 为半径，从圆周上任一点出发，顺次截取之，即把圆周分成相等的四份。其道理是，三角形 AOM 为直角三角形，其中一直角边的长度刚好等于圆内接正方形的边长 $\sqrt{2}$ R，如图 2 所示。

戴高乐

查尔斯•戴高乐（Charles de Gaulle）是法国第五共和国总统。他去世后，家人根据他生前意愿，在其墓前竖立了一块小小碑牌，一面刻着“查尔斯•戴高乐 1890-1970”，另一面则刻着一个洛林双横十字架（Cross of Lorraine），由 13 块相等的小正方格组成，如图 3 所示。

这个洛林十字架是由法国洛林公爵 Godefroy de Boullion 从 1099 年开始采用的家族纹章。戴高乐是在第二次世界大战中、在这个洛林十字架的旗帜下领导“战斗着的法国人”英勇地抗击纳粹德国的英雄将军。这位将军还是第一个提出并且解决了下面一个有趣的有关洛林十字架数学问题的人：“如图 4 所示，在洛林十字架的 A 点处，仅用铅笔、圆规和直尺作一条直线，把十字架严格地划分成面积相等的两部分。”这个标准的初等几何问题并不太容易解答，留给有兴趣的读者去思考。

作者简介：陈关荣，香港城市大学电子工程系讲座教授，IEEE Fellow。

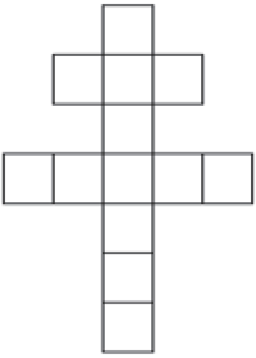


图 3 洛林双横十字架

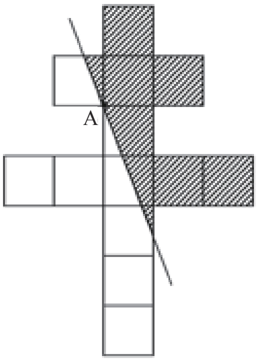


图 4 二等分洛林双横十字架

课题研究与论文写作技巧

韩茂安

我小时候，语文和数学是我成绩最好的两门课，经常受到老师的表扬。但我却很怕写作文，因为不知道写什么，也不知道怎么构思。到了大学就没有机会学习语文了，除了外语课和政治课以外，几乎所有课都是数学课。不管什么课本，都是用文字写出来的，因此，良好的语文功底是有助于学好这些课的。其实，写学术论文、上讲台讲数学课都需要良好的语文功底，这里就不多说了。写学术论文，语文功底虽然重要，但已不是主要的问题了。我们现在做研究写论文一是出于研究兴趣，二是出于事业发展需要。大学生、研究生完成学业，教师晋升职称，申请基金项目等都面临这个问题。我们可以从课题研究与论文写作的过程中得到锻炼、得到快乐，论文发表后我们还为学校的学科发展甚至为丰富科学理论做出了贡献。那么，做研究、写论文有没有技巧可寻呢？其实，任何一门学问都有其技巧可寻的，科学与文学和艺术也有其内在联系的，一篇论文其实就是一个作品，既然是作品，就有其科学价值和美学价值。下面根据个人经历谈谈我的认识和体会。

做研究写论文一般有下列几个阶段。

1. 选题

写论文是选题以后的事，没有选题就没有论文。因此，如何选择研究课题是做研究写论文最先面临的问题。

我们知道，做研究，一定要有研究基础。最必须的研究基础就是我们所感兴趣的研究领域的基本理论和方法。这个基础一般是在我们读大学和研究生的时候打下的。数学专业的大学生要学十几门课程，最重要的是要学好数学分析和高等代数，尽管学好这些课未必会做研究，但学不好这些课是肯定无法从事数学研究的。对研究生而言，主要就是几门基础课和专业课程，其关键就是精读几本书。打基础要读书，而读书不在多而在于精、在于透。读书要有所选择，要读名家的著作，要读新出版的著作。读这些书，能使读者更快地掌握先进知识、进入研究领域，甚至达到研究前沿。

读书的目的是首先学习和掌握研究工具，更重要的是领会如何使用这些工具和培养这样的能力。同样一本书，不同的人学它会有不同的效果。多读几遍必有加倍的收获，多做思考必有更多的领悟。积累到一定程度灵感就自发产生了。

从专著中我们可以寻求研究课题，但更多的研究课题是通过研读论文获取的。因此，在掌握了基本理论之后，就要研读论文。有时候，论文看不懂，那是因为掌握的工具还不够，这时候需要查阅理论工具书。读论文看不懂属于正常现象，只要工具够了，多看几遍就能够看懂了。读论文，不仅了解其主要结果是什么，更重要的是领会作者是怎么获得其结果的，也就是说要好好领会论文的研究方法和思路，这是因为每一种研究方法往往都会适用于一类、一批问题的研究，或许需要经过改进、发展等。所以，读完一篇论文，要就问题的由来、所用方法以及创新之处进行归纳总结和深层次思考，以便发掘潜在的问题。在你总结的时候，你可以思考下列三个问题：

（1）本文的主要创新点是什么？

（2）本文的方法能否用来解决其他问题？

（3）本文的方法和结果能否衍生出新的问题？

你经历这个过程以后，你的科研能力就在不知不觉中得以提高。

读论文，像读书一样，也不在多，而在于精。通过精读几篇内容相关的论文，再加上领悟和思考，新的思想就会自发产生，有时候是意想不到的。于是，你的研究课题就随之而出了。

同一篇论文，不同的人研读，可能有的人会领悟出新的研究课题，而有的人则领悟不出，这跟平时的积累程度和思考问题的方式有密切关系。积累和思考是做研究出成果的两大法宝。

现在有不少研究生的研究课题是导师给的。例如，我跟研究生一起读论文，让他们报告论文，我的领悟能力比他们好一些，更容易发现新的研究课题，就告诉他们什么问题可以做，用什么方法去做。但在做的过程中，可能会遇到我意想不到的困难。

我读研究生时我导师（著名数学家叶彦谦教授）也给过我研究课题，但他给的研究课题是他经过考虑没做出来的问题，因此，我也做不出来。我的硕士论文和博士论文的研究课题都是自己找的，但多半是跟导师给我们读的文献直接相关的。

总之，精读几本书和几篇文章，加以总结和思考，你的研究课题就能呼之欲出了。除此之外，听专家演讲、与学者交流等也能使你受到启发、产生灵感。

2. 解决问题

选题就是发现问题，这是一篇论文形成的最重要的环节，然而，付出劳动最多的可能是写论文的过程，其中核心部分就是解决问题。选题主要取决于积累和思考，而解决问题则取决于专业知识和科研能力。科研能力，一部分是天生的，更多部分是后天培养的。

有很多研究课题，当你想到它时，其研究方法也同时有了。但尽管如此，在推导证明过程中往往需要引进新的技巧，特别是处理疑难环节时。有时，问题如期望的那样比较顺利地得到解决；有时，会费不少周折；也有时，在处理问题时遇到难以解决的困难。在遇到无法解决的困难时，我们可以想法降低难度，绕过障碍，获得能够得到的结果。

有些研究课题，尽管想到了，但不知道用什么方法解决它，这就需要先建立新的理论。这样的研究课题有可能导致新的学科分支出现。

有些研究课题一时难以解决可以先放一放。可能过一段时间会有新的思路出来，可能在阅读别人的文献时发现他的方法可以用来克服你的困难，可能你在公园散步时突然产生灵感，也可能你在与其他专家随意交谈中受到启发。科学难题多的是，古今中外都有。因此，研究课题时遇到困难是完全正常的，甚至做不出来也是可以理解的。但由于数学是逻辑推理的学问，我们在解决问题时不可以想当然，不可以把几何直观当做论证，更不可以出现错误。

有的研究课题需要跟他人合作完成。每个人的能力有限，掌握的理论和方法也有限。你在课题研究中遇到的困难有时需要用到别人擅长的方法才能解决，而你又一时不想或没有精力去掌握别人的方法时，就可以邀请别人加入，共同解决你的难题。

解决一个问题往往会有若干步骤，但很多时候其关键步骤不过是一两个而已，如果你在关键步骤走不通了，不妨去了解一下同类问题是否出现于相关课题，别人又是如何处理的。在 1990 年前后我开始研究平面哈密顿系统同宿轨的扰动分支，这里关键的一步是在一定条件下证明后继函数的根的个数能够用其渐近展开式的某些有限项来决定，由于后继函数在同宿轨附近的展开式十分复杂，我不知道如何处理这一问题。我的研究课题是在研读法国一位著名教授的论文后受启发而产生的，更明确地说，是他的论文成果的进一步深化，因此他的论文有相同的问题需要解决。于是，我又查阅这篇论文，却发现他在这个关键步骤出现了错误（这一点并不影响其主要结果的正确性），在这之前这篇论文我已读过多篇，但却都没有发现这个错误。这更进一步激发了我的研究志气。经过苦思冥想，尝试引入一系列变量变换，用于估计有限展开式和完整的后继函数的高阶导数之间的误差，终于克服了困难。

有时候解决一个问题需要趁热打铁、一气呵成，真正是废寝忘食。在你精力高度集中、脑筋高速运转时灵感更容易萌发，你会进入一种欲罢不能的状态，使你的智力达到最高点，使你能够进行超乎寻常的推理和论证。我有几篇论文就是在这种状态下完成的，现在让我再去重新论证我肯定是做不出来了。

做研究需要不断学习。读书是学习，读论文是学习，而学术交流也是学习。所以，有专家报告，我们要听，有学术会议，我们要参加。通过这些活动，我们可以学到新的方法，了解新的进展。报告听不懂，也没关系，重要的是从中得到激励：别人都在积极做研究，我不做就落后了！参加学术会议是学习的一个重要途径，通过会议你可以了解别人做什么研究，同时别人也了解你在做什么课题。这个平台使大家都受益。

因此，问题是否能够得以解决主要取决于足够的知识积累和超常的科研能力，两者之间在“思考”的作用下不断的交融和撞击所产生的火花就是所谓的创新。

3. 整理成文

你在解决问题的过程中自然会写一个初稿，也可能在不同时期有不同的草稿。这类稿子大概只有你自己能看得懂。因此，就需要添枝加叶补充细节加工成一篇像样的稿子。一篇完整的论文，一般包括以下几个方面。

首先是引言。引言尽管是论文的开头部分，但往往是在你解决问题之后才去写的。引言要围绕着论文的主题展开，主要是相关的结果介绍，有哪些人研究了哪些问题，获得了哪些结果等。有些结果只需提一下，有的结果需要详细一些，与你结果密切相关的还可以以引理或定理的形式具体写出来。这部分内容尽可能全面和客观，既不要故意不引用一些文献，又不要过高地评价一些结果。紧接着，你要介绍本论文研究主题的产生过程和本论文解决的主要问题。

学术论文一般有两种格式，一种是引言和主要结果介绍放在一起作为论文的第一节，其后是主要结果的证明，有时候为了推理清晰，第二节先给出预备知识，引用一些已知结果（包括概念和定理等），或证明一些将要用到的引理。

引用的结果一定要指明出处，否则别人难以确定它是你的结果还是别人的结果。

另一种格式是单独把引言作为第一节，而其后是主要结果及其证明，在证明主要结果之前也可以列出一些预备引理。

论文用哪一种格式来写，这里有个人喜好的成分，也与结果本身有关。我的观点是，如果你的主要结果比较容易说清楚，就可以和引言合在一起，如果这些结果涉及一系列条件，而这些条件是在一些推理后才能明白，就采用第二种格式。

为了突出你的结果，在引言的结束之前还可以说一下你的结果比已有结果有何优越之处，但要注意表达方式。

引言的最后部分往往是简单介绍论文后面几节主要干什么。

写好引言是一件不容易的事情，这需要你对研究课题的研究进展和研究难点有较全面的了解和把握，同时也体现你的文采和文风。每一句话怎么写，先介绍哪一个人的工作，如何介绍他的工作等都需要狠下功夫，甚至咬文嚼字，连标点符号都不放过。写引言花费时间又是很值得的，因为你从中得到锻炼，你的写作能力会上升一个台阶，今后你再写其他论文时你会感到容易一些。

引言一定要好好写，不过它还不是论文的主体。主体乃是主要结果的推理和论证过程。这部分内容其实就是对你在解决问题的过程中形成的初稿进行不断的修改和补充。需要注意的主要是：论证是否正确，推理是否清楚，条理是否分明，表达是否准确，语句是否通顺。概念、引理、定理等如何叙述，证明分几步完成，列举什么样的例子等都需要注意到上述几个方面，这些都涉及研究方法、证明步骤、推理过程等诸多细节。论文是写给别人看的，你需要把自己心里明白的推导让别人看明白，于是，先写什么后写什么，上下如何连贯自如，前后如何结构紧凑，怎么写更清楚易懂是你始终要牢记在心的。

为了配合你的论证，一些解释性的叙述、注解，甚至图表等也是必要的。此外，公式怎么编排更美观也是需要考虑的。

一篇论文从初稿到整理成文至少要三易其稿，写作高手也不例外。写作一篇论文就是完成一件作品，要使它成为一件艺术精品，你要进行多次加工，在加工过程中还要自我欣赏，除了体现你的科研水平以外，还要体现你的写作水平，甚至体现你的人格魅力，使得别人在读你的文章的过程中能够体会到你的用心、欣赏到数学的美妙。

顺便提一下，写论文一定要严守学术道德，切忌因一念之差造成终身悔恨。这样的教训实在太多，我们务必引以为戒。

4. 发表论文

论文写好之后，就是要投稿发表。这里先回忆一下往事。我的硕士学位论文原件是我亲笔在方格纸上手写的（中文），我的博士学位原件则是我用配有色带的英文机械打字机一个字母一个字母的敲出来的。我们那个时候投稿都是在方格纸上手写，垫几页复写纸，两份用于投稿（通过邮局邮寄），一份留存。这个方式几乎一直持续到上个世纪末。也在上个世纪末，电脑和电子打印机开始普及（但需要专门培训才会使用），在高校内复印店、打印店应运而生，杂志投稿开始要求打印稿，学位论文也这样。于是，我们就花钱到这些店打印论文、复印论文（有研究经费的老师可以报销这个费用）。这些店生意好得很，你要打印的论文需要数日才能打完，打完之后要去当场校对、修正（那个时候用磁盘存储，现在早已淘汰了）。不久，喷墨打印机取代了电子打印机。稍后，本世纪初我们才普及使用激光打印机，一直沿用至今。随着英特网的迅速普及，杂志投稿开始流行网上投稿，这也就是近十年的事情。

对论文网上投稿，需要先上杂志网页注册登记，获得用户名和密码。然后，你就可以按要求投稿了。网上操作既快捷又省钱。过几月后，杂志编辑部会寄来审稿意见和主编的电子邮件，告诉你退稿（拒收）、修改再投（有可能录用）或直接录用等决定。如你认为退稿没道理，你是可以申诉的，但往往效果甚微。如果退稿，也别灰心丧气，再改改，改投就是了。如果邀请你修改，你一定要仔细领会审稿人的意见，有道理的，你就照办，无道理的，你要说明缘由。不管审稿人的意见有无道理，善意与否，你都应该表示感谢，这叫文人有雅量嘛。这也没办法，因为你的论文的生杀大权掌握在审稿人手里。论文一旦接受还需要签一个版权协议，之后还可能做一次校对。一旦正式发表，你的论文才真正面世，真正成为一件你可以珍藏的、有知识产权的作品。

作者简介：韩茂安，南京大学博士，长期从事常微分方程与动力系统的研究，现任上海师范大学数学科学研究所所长、数理信息学院副院长。

高德纳的奖励支票与《数学之英文写作》作者的一错一美元

欧阳顺湘

司马迁在《史记 • 吕不韦列传》中记载，秦相国吕不韦效魏信陵君、楚春申君、赵平原君、齐孟尝君“下士喜宾客”之所为，“亦招致士，厚遇之，至食客三千人”，又仿其时辩士著书布天下之风而“使其客人人著所闻”，集论号曰“吕氏春秋”，“布咸阳市门，悬千金其上，延诸侯游士宾客有能增损一字者予千金”。

吕不韦“一字千金”的悬赏是使所编书籍完善的好办法，更是作品的最佳广告，看起来很美丽，但如此的财大气粗，大概也只能是他这样“大贾人”出身、权倾朝野的相国才做得到的。几年前，清史专家、央视《百家讲坛》的主讲人阎崇年就深陷悬赏门。他校注的《康熙顺天府志》出版后，有媒体记者根据与他的访谈以“阎崇年新书求错一字千元”为题进行报道，还有的记者称此为“京城学界正气”、“勇敢之举”。然而一位较真的古汉语副教授见后，竟给此书挑出了几百处错误。但由于阎崇年不认可新闻报道里的奖励声明，拒付巨额奖金，副教授愤而将阎崇年告上法庭，索要赔偿，闹得满城风雨。

学术界把悬赏纠错这件事情做得最具智慧与文化，成为经典佳话的，当属斯坦福大学的计算机程序设计艺术名誉教授高德纳（Donald Ervin Knuth，唐纳德 • 克努特，高德纳为其中文名，1938-）。

高德纳的一种奖励是针对在他的所有出版物中发现错误或提出建议的人：提供一个有价值的建议，按照价值大小，给予 16 美分或 32 美分等金额的奖励；发现一个新的错误，则奖励 2.56 美元。为什么是 2.56 美元呢？高德纳解释说，因为“256 美分是十六进制的一美元（256 pennies is one hexadecimal dollar）”。读者想想 $1\times16\times16+0\times16+0\times1=256$ 就可以明白其中的道理了。同样，16 美分是十六进制的 10 美分。

图 1 高德纳

高德纳也奖励在他的排版系统 TeX 和字体设计程序 METAFONT 中发现错误者。这两个软件是高德纳在 1977 年见到出版社给自己的《计算机程序设计艺术》（*The Art of Computer Programming*，缩写为 TAOCP）第 2 卷第 2 版的作品毛样时，发现不美观而动手开发出来的。高德纳为此还暂时中断了他写作七卷 TAOCP 的计划，花了 10 年左右的时间。基于 TeX 的各种版本排版系统，如 LaTeX 等，被数

学界的学术出版物广泛使用。METAFONT 也影响很广，例如一个常用的制作矢量图的软件 MetaPost 即是基于它。

很有意思的是，高德纳分别以圆周率 π 和自然常数 e 作为程序 TeX 和 METAFONT 终极版本号：

* TeX 的版本号用圆周率 π 的十进制近似序列来表示，每一个改进版的版本号更趋近 π。目前 TeX 的稳定版本号为 3.1415926。
* METAFONT 的版本号用自然常数 e 的十进制近似序列表示，每一个改进版的版本号更逼近 e。目前 METAFONT 的稳定版本号为 2.718281。

图 2 高德纳的 2.56 美元奖励支票

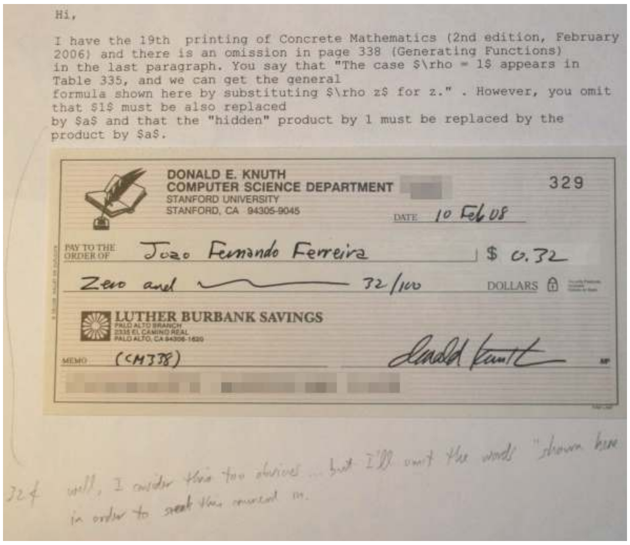


图 3 高德纳奖给建议提出者的 0.32 美元支票

对于这两个程序中的错误发现者，他的奖励方式极具诱惑力：在第一年中，每个新发现的错误奖励 2.56 美元，第二年则将奖励翻倍为 5.12 美元，依次逐年将奖金翻倍，直至 327.68 美元。这样的奖励也有道理，因为隐藏越深的错误越难发现，从而也更有价值。

高德纳对他程序中错误发现者的奖励方式也使我们想起“棋盘上的麦粒”这个著名的数学传说：印度舍罕王打算奖赏呈献给他象棋游戏的宰相西萨•班•达依尔，便要他提要求。宰相对国王说:“陛下，我只要一棋盘麦粒，在棋盘的第 1 个小格里，赏给我 1 粒麦子，在第 2 个小格给 2 粒，第 3 小格给 4 粒，……。”结果很清楚，国王没法满足丞相这个看起来很谦卑的要求。高德纳不会像那个国王一样不设上限。但如此高的奖金也反映了作者的自信。按高德纳在 2001 年的一个答问中所说，自从 1994 年或 1995 年之后，还没有人发现过这两个程序有错误。确实，这两个程序一直很稳定。

如果要将“棋盘上的麦粒”的故事进一步类比，则可以说高德纳像计算机王国的国王：麻省理工学院的《科技创业》（*Technology Review*）杂志就说高德纳的奖励是计算机王国中最有价值的奖励。

根据我自己有限的阅读体验，高德纳书写的很好。他的悬赏纠错体现的是他追求完美的一贯态度，没有半点为自己的书做广告的嫌疑，反而可以看作是他在鼓励读者认真读书。我在大学一、二年级，在还不知道高德纳是如此的大名鼎鼎的时候，在图书馆见到一本他的《计算机程序设计艺术》，就被吸引，记得参加义务劳动期间还摩挲此书，偷空阅读，有努力看完的冲动。但遗憾的是，此后从没翻过。但高德纳讲解 TeX 系统排版的

The TeXbook，我较认真地学习过一部分。书中介绍的盒子 (box) 与胶水（glue）等基本理念对理解 TeX 的排版规则以及使用技巧（例如 {} 的使用）很有帮助。这本书不是枯燥无味的手册，而是一本从学习者的角度加以阐述的书，其中有例子和习题，习题还按难度分级别，并且告诫读者，不做习题的学得不如做过习题的。一般，学习 LaTeX 不必阅读此书，但如果想更好地理解 TeX 排版，而不是仅仅记住一些规则，此书是很好的参考资料。

高德纳是写作高手，他甚至在斯坦福大学教过一门关于数学写作的课程，出版过小说，同时也是程序设计大师，在 1974 年获得过图灵奖，所以要找出他的错误委实不容易。但他的作品非常多，其中不免有些失误。根据其主页（参 http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/books.html）显示，高纳德已出版了 24 部著作，其中有的是多卷本，如 5 卷《计算机与排版》（*Computers & Typesetting*）以及已经出版了的 4 卷 TAOCP。所以他是名副其实的著作等身，有足够的作品供人们去挖掘各种或大或小的问题（在前述网页上，在每本书所对应的网页有勘误表）。

高德纳一般以支票的方式给获奖者发放奖金。据美国国家公共广播电台 (NPR) 对高德纳的一个采访（http://www.npr.org/templates/story/story.php?storyId=4532247），到 2005 年 3 月为止，他已签署了总值两万多美元的支票。这不是一笔小数目。然而，实际上很多人，即使支票金额很大，也没去兑现支票。高德纳在其 2008 年的“最近新闻”（见 http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/news08.html）中举例说，自 2006 年起至他当时，一共签署了 275 张支票，但只有 9 张被兑现。有人还说，找到错误的是聪明人，但要真的去兑现高纳德的支票就是十足的笨蛋了。这是因为能够得到计算机巨擘高德纳的奖励支票，是很大的鼓励与荣誉，支票的收藏价值远大于其面值。人们甚或还可以将支票裱起挂家里墙上，或在网络上晒晒，吹吹牛。事实上，用搜索引擎可以轻易找到不少津津乐道此事的。图 3 就是一位名叫 João Ferreira 的大学讲师在网络上晒出来的一张支票以及他与高德纳的来往信息。这种吹牛毕竟是能力的反映，并无不可——总比晒名包名车炫富强吧？甚至可以将此“上纲上线”到国力比较：高德纳曾说，他支付给德国人的支票最多。

在 2008 年之前大约 40 年间，高德纳都是通过三个真实的支票账户给获奖者支付奖金。但在 2008 年，因为安全问题，高德纳决定停止签署真实的支票（参见高德纳在 2008 年写的“最近新闻”）。他这样做的一个原因也是拜先前得到支票者到处炫耀所赐，因为这样往往导致高德纳的有关信息泄露。高德纳说自己并没有权利阻止别人去吹牛，经过痛苦的考虑，不得不做了一个艰难的决定。然而，这被证明是一个更有文化创意的做法。

高德纳在 2008 年成立了一家名叫 Bank of San Serriffe 的虚拟银行，地点也是虚拟的，在虚拟国度 San Serriffe 一个名叫 Caissa Inferiore 的小岛上的 Thirty Point。San Serriffe 是 1977 年 4 月 1 日愚人节，英国老牌报纸《卫报》（*The Guardian*）虚拟出来的一个印度洋上的岛国。为使得故事更真实，公众更易被“愚”，“报道”中使用了当时并不流行的排版术语来描述这个国家的国名、岛屿以及首都等。例如，国名 San Serriffe 与 Sans-serif 谐音，后者表示西文中的无衬线体；岛屿 Caissa Inferiore 的名字来自“小写（Lower Case）”，“Thirty Point（三十点）”中的“点（Point）”，俗称“磅”，是计量字体大小的基本单位（1 英寸＝72 磅）。显然，高德纳的选择与他对字体设计和排版的喜爱有关。这个虚拟岛屿已是著名的文化遗产，而高德纳无疑给这个文化遗产再次增加了资产。

这样，高德纳给获奖者的奖励就是来自这个虚拟银行的虚拟货币（ brownie points)，或说十六进制证书（hexadecimal certificate），即是一张该虚拟银行的支票。支票上的货币表示方式也与以前的表示方法不同，用的是计算机科学里（如在 C 语言等一些程序语言中）常用的十六进制表示法，例如十六进制的一美元和 10 美分分别表示为 0×$1.00，0×$0.10。也就是说，高德纳的奖励主要由以“资”鼓励变为颁发荣誉证书了。当然高德纳也不食言，如果确实有人提出要现金，他也承诺想办法寄送。

因为不去兑现，对高德纳的粉丝来说，两种支票具有相同的收藏价值。高德纳还在自己的主页上为这个“银行”建了一个网页 http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/boss.html，每位自 2006 年 1 月 1 日起，得到过真实银行支票或者虚拟银行支票的获奖者的名字以及“资产”都在这个网页上列了出来。从中见到，到 2013 年 7 月 23 日为止，已经有了 500 多名获奖者，其中最富有的是一位名叫 Udo Wermuth 的人，他的“资产”为 0×$4c4.d8，即 3 125.36 美元。

图 4 虚拟银行 San Serriffe 的支票

图 5 虚拟银行 San Serriffe 的网页

高德纳用计算机科学里常用的“批处理（batch mode）”方式审查错误报告以高效地利用时间来完成 TAOCP 的写作。对于书籍中的错误，有秘书将收到的（蜗牛）信件累积整理给高德纳，而高德纳则只在合适的时间，如每三个月的一天，来集中检阅这些报告。对于和 TeX 与 METAFONT 这两个程序相关的报告，他则要间隔更长的时间才去检查（参考 http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/abcde.html）。他之前分别在 1992，1993，1995，2002，2007 年里检查过这些报告，按照这个习惯，他将在 2013，2020，2028，2037 年里再做同样的事情。这个序列是递增的二阶等差数列（年份之差 1，2，3，4，5，……为等差数列）。这是合理的，因为随着时间的增加，错误应该越来越少，也就只需越来越少的时间来检查了。细心的高德纳，还会把因此而耽误发放的奖金利息按复利计算给补上。

意识到还需要 20 余年的时间才能完成 TAOCP，高德纳在 1993 年提前退休了。而为了专心写作，他早就不再使用邮件，看起来似乎就只是一个深居简出、索然无趣的老头。但“是真名士自风流”，就如上述奖励方式各个细节所彰显的，他在不经意间就谱写了传奇。

花开两朵，各表一枝。几个月前汤涛和丁玖两位教授在高等教育出版社出版了《数学之英文写作》（以下简记为《写作》），“旨在帮助需要从事英文写作与演讲的科研人员和大学生、研究生了解关于科技英语写作的方方面面，尤其是数学文章写作的基本常识和注意事项”。在此之前很久，汤涛教授就已经通过微博宣布过该书将出版的消息。我当时就想，这两位作者真是独具慧眼，因为我知道关于数学写作的英文书其实很多，但遗憾的是，相关的中文资料几乎没有，此书必定很受欢迎。

笔者先天不足，自知英文水平太差，几年前为了写好博士论文，找了不少论述数学写作方面知识和经验的书籍和网络资料，是以知道关于数学写作以及更广泛的科技英文写作也是大有学问焉。我当时还很惊讶地知道 1987 年高德纳在斯坦福大学还教过写作课！读者可以将高德纳教授此课的讲义（*Mathematical Writing*, Donald E. Knuth, Tracy L. Larrabee, and Paul M. Roberts, Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1989）作为《写作》

的补充读物。有兴趣的读者还可以从高德纳的主页上下载此书的扫描版（http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/papers/cs1193.pdf）或观看高德纳教授此课程的视频录像（http://scpd.stanford.edu/knuth/index.jsp）。

我也知道不少人对数学的英文写作很重视。我在北京师范大学读书时，一位教授在他的主页上给了一些对他学生的建议，其中就有写作方面的；另一位教授则曾请秘书帮助组内的研究生人手一本 Steven G. Krantz 的名著 *A Primer of Mathematical Writing: Being a Disquisition on Having Your Ideas Recorded, Typeset, Published, Read & Appreciated*。

根据笔者可怜的撰写、审阅数学文章的经验，部分初学数学论文写作的中国学生确实需要有关数学之英文写作方面的训练和指导。所以，《写作》的出版是如同广告词宣传的“汤涛、丁玖倾力巨献”，也如浙江大学教师 @rainskywalker 在（新浪）微博上说的，作者是以大慈悲之心而写出此书来的，或如鄂维南院士推荐中所述“真没想到汤涛和丁玖能抽出时间来写这样一本书”。

《写作》还没出版时，就有很多人翘首以盼；一出版，便引起了抢购潮。例如，我注意到一位网友在微博上对两位作者说，他一次就买了 100 本！我自己原来还打算给一些朋友进行推荐，但后来发现此书出版的消息是不胫而走，人人皆知，根本无须我的介绍了。

8 月 2 日上午 09:54，丁玖教授 @三九 2011 在新浪微博上评论几天前互动出版社 @china-pub 数理化为该书所做的推广微博时透漏《写作》要加印了。事实上，早就有网友反映书店有时缺货的消息了。丁教授还在微博中提到希望利用重印的机会对此书进行第 N+1 次校订：

> 本书即将加印，拟再从头到尾细读一遍，争取离“零错字”最近，最好零距离。其实，尽管 **@ 数学文化**和我及编辑 **@ 俄罗斯数学**曾对书稿校对 N 次（$N \gg 1$），前天 85 岁高龄的家母指出第 206 页倒数第 1 行的“誓如”为“譬如“之误。这条漏网之鱼已经逍遥得够久了，终于被捉。新学年正在走近，欢迎新研究生们阅读此书。

此前，丁教授在微博中也发布过《写作》中一些宜作修改的地方。这次他特别感谢了其母亲所做的勘误。其实，这不是他的母亲第一次帮忙。两个月前的 6 月 3 日，丁教授就在微博上说他的母亲指出了他新近出版的科普书《智者的困惑——混沌分形漫谈》中的“寥若辰星”实为“寥若晨星”之误。我读后，虽然知道丁教授的母亲是扬州书法家王柳凤先生，但一位母亲在 85 岁高龄仍帮助儿子书中改错，所体现出的读书人传统及爱子之心令我感动。于是，我转发丁老师微博的同时也借用了其中的用词赞叹道：“寥若晨星的母亲！”

8 月 4 日 13:00，有近 16 万 5 千粉丝的新浪名博汤涛教授 @数学文化转发丁教授的此条微博后，围观者众。

关注 @数学文化的，卧虎藏龙，有不少高人深潜，例如，我知道的复旦数学名教授等也是他的粉丝。此外，微博上也是意见纷纭，一个事实总有人从各种意想不到的视角来看。于是，也就不奇怪有人对丁教授的“零错字”不服：书是人写的岂可能“零错字”。巴贝奇的机器，没有人工参与而可以自动计算并打印出来无错误的东西。而且那也只是数学用表，不是流动鲜活的书籍。太完美的事情一般是不可能的。于是新浪微博上的 @Chengqinggg 在当天的 15:15 就转发并提出“赌局”：

> 如果丁教授肯以 1 美元 1 个错误（错别字或逻辑错误）悬赏，俺连夜给您找十处。

话说这位 @Chengqinggg（现已经改名为 @Turing12），我是间接地知道一点的。如果猜测不错，大约是一名校 80 后教授。其实也是因此前他“嚷着”要给网上一篇曾很热闹的文章纠错而被我知道。因为这篇文章传播太广，所以我也帮着改了点错误，因此文章作者告知我，说某某某指出了 60 余处错误，我便猜是他无疑。

图 6　丁玖教授的 2013 年 8 月 4 日的微博

图 7　汤涛教授的 8 月 4 日微博悬赏

所以这位 @Chengqinggg 是来者不善，善者不来，对于挑错应是很有经验和热情的。他的口气很大，不过我相信，全书十处错误虽然连夜找出很是值得怀疑，但钻一下牛角，应是不难，大不了，找几个标点符号的失误，挑挑排版妥否，辩论下中文用词当否，总是可以指出几处错误的。

丁教授很谦虚，想起高德纳那样厉害的写作高手尚且对指出其错误者给以奖励，于是欣然接受读者的批评，当即回应道：

> 看来我先要付给家母 1 美元。当年计算机程序大师高德纳 (Donald Knuth) 如何厉害，公开悬赏找出他程序错误。欢迎阁下帮我们找到错字，汤教授和我定会重谢！

须知两位教授并不差钱，一人在香港拿 HK$，一人在美国挣 US$。现在，不要自己通篇再读一遍来找错误，何乐不为呢？很快，不到两小时，16:59，@数学文化得知后，斩钉截铁地说：

> 1 美元 1 个错误，可以！丁老师记账我出钱。

空口无凭，图 7 可证，也有网可稽 http://www.weibo.com/1892680923/A3ccgq9Xu?mod=weibotime。

所谓一言既出，什么马也难追，而且这个悬赏也不是仅仅针对 @Chengqinggg 一人，否则就不会在微博上广而告知了。就这样，两位作者也无意中被追随了高德纳的做法，他们奖励此书的新错误发现者：一个错误一美元！

悬赏一开，不少人就摩拳擦掌了，留言要“下手”。在阅读一本有兴趣、有需求的书同时，还有可能得到新浪名博 @数学文化汤教授及在美国大学两获教学奖的丁教授的奖励，不乏光荣。

相信《写作》的两位教授是真诚地希望一本关于写作的书成为写作的典范，即使是一个标点符号也不发生错误。读者若碰到值得改进之处，积极地告诉他们，不但是帮了作者，同样也是惠及了将来更多的读者，因为这样我们能读到一本与零错误的距离越来越近的一本书。一本没有价值的书，自是不值得我们浪费宝贵的生命去瞧一眼，而一本好书，诚为读者们的共同财富，值得共同维护珍惜。

写有著名小说《红字》的 19 世纪美国小说家纳撒尼尔 • 霍桑（Nathaniel Hawthorne, 1804-1864）有名言："Easy reading is damn hard writing。"即是说，读者的轻松阅读来自于作者辛勤的写作。如果一篇文章逻辑混乱，材料未经过精心地组织，文字粗糙，遣词造句没做过仔细地推敲，读者读起来自是磕磕碰碰，举步维艰，或味同嚼蜡，食之无味，这是因为 easy writing is damn hard reading。由此推论，如果读者欣赏一本书或文章，觉得写得好，那是因为作者付出了辛勤的劳动。所以，在我看来，读者若觉得一本书不错，无论是提供纠错奖励的《写作》以及高德纳的书，抑或没有奖励，帮助作者使之更加完善，是感谢作者的最好方式，至于获得奖金或者荣誉，那还是次要的。

兹录此事于此，既希望它被传为佳话，也帮着"公证"，使各位找到错误的读者有理由索取奖金！

后记

我在《写作》出版后不久即托我妹帮忙抢购了一本，恰好 8 月 6 日家人按计划从国内回德帮忙带来。

8 月 7 日晚我一拿到书，就迫不及待地连夜读了起来。书确实写得好，很吸引人，以至于把其他事情拖延了。我也承认很久没有这样的读书快意了。也号称读书人，其实很多时候无暇读书，也很难从头到尾老老实实地读一本书了，但这本书我却连书中的中英词汇表也看了看。

此书的介绍中说，"参考了西方学者关于英文数学写作的观点，并揉合了作者自己的观念、认识及经验"，我认为很准确。书中的一些观点我在其他外文资料确也读到过，而且该书的一大特色就是以优美的文字，间以亲身经历，辅之各种似乎随手拈来、却很有看头的典故娓娓道来，充满了人文情怀。

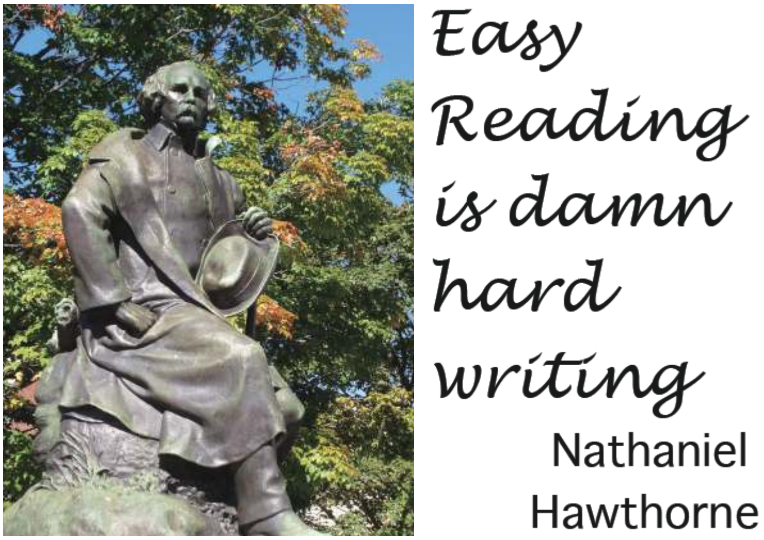


图 8 霍桑关于写作的名言与位于马萨诸塞州塞勒姆的霍桑雕像

我感觉，即使对那些没有数学写作的需求，不必学习数学写作的读者，《写作》也很值得一读。在一定程度上，书中有大量的优美片段是可以独立成篇的。例如，书中有“数学文化”一小节，就可以单独欣赏，了解作为杂志《数学文化》的两位共同主编之一以及编委成员之一的两位作者的高见。

如果读者读过外文中有关写作的书，大抵都能见到许多作者的感慨，或者说是告诫:“写作是一件辛苦事！（Good writing is a hard work!）”还有的说，写作需要，“改，修改，再修改”。这也是《写作》中专门单列了一章介绍如何修改文章的原因。这些观点，相信有写作经验的，尤其是有过写作科技论著经验的人大都会深有感触。任何一个标点、任何一个字符、任何一个短语，都是不能随意乱来的，都需要反复斟酌或推敲、反复核实或查证。文不加点，一挥而就的佳作，偶尔可见，但那是少数天才，或有过辛勤积累的人才能享有的。好的作品，无论是数学写作还是其他形式的，总是千锤百炼地修改后的结果。笔者有两篇研究论文是分别与另两位有成就的教授合写的，一位改完后，另一位还是能提出不少修改意见，甚至包括冠词的使用。而其中一篇，在两位教授改写完之后的校订中，我还发现了一处来自于拉丁语的单词误拼。

很多时候，写作要兼顾的东西太多，不免懈怠或疏忽。所以一本书出现小失误是可以理解的，也正是作品需要修改、写作不容易的证明。但对《写作》，并不是漏洞百出的书，我还是花了些功夫才找出七处被丁教授确认为新发现待要修改之处。有些是出于我的专业，如建议词汇表里维纳过程的英译由 Wiener's process 改为 Wiener process，有一两处是打字输入错误，如“临近学科”应为“邻近学科”。

所以，读《写作》的时候，我是能感觉到此书作者写书的用心的。丁教授说的修改 N 遍，绝非夸大其词。曹雪芹在“批阅十载，增删五次”后流下的“一把辛酸泪”，贾岛在“推敲”完他的“月下门”后所注的“ 二句三年得，一吟双泪流。知音如不赏？归卧故山秋”估计或多或少会使包括《写作》的作者在内的许多著书者们产生共鸣。

在本文的最后，补充说下，虽然《写作》的错误确是难找，而微博上不乏以最终不见兑现的物质奖励为名进行营销者，但根据可观察到的交流来看，@ 数学文化应该是认真的，而读者也是在积极帮助《写作》的作者完善此书。例如，@ 香陵居士就在焦急地等待他预定的《写作》，也想“连夜找十处”，前述的 @Chengqinggg 也拟回国后认真读此书检验自己的校订功底。早在两位教授的悬赏出来不久的 8 月 9 日，@考拉 - 马就贴出了 10 处修改建议（http://www.weibo.com/2411867182/A3Z1Qe2Vp）：

先来《数学之英文写作》的 10 处校正好了，@香陵居士 @数学文化

按 @ 考拉 - 马在其微博上的自我介绍，他是 LuaTeX-ja 的开发者。他提出来的某些勘误就是作者在使用 TeX 排版时未曾注意到的细微处。这自是验证了请读者挑错的好处：不同读者阅读，体验不完全相同，自然能注意到一些被忽视的地方。同样道理，8 月 23 日，一位网名为 zyop 的读者也在善科网上留言，建议改善《写作》中几处数论名词的英译。

注：作者在微博上见到汤教授关于“1 美元 1 个错误”的广告后，8 月 5 日即在善科网上草写了一篇短文，将此“誓言”当做“永久纪念”记录了下来。感谢丁玖教授推荐《数学文化》刊登本文，同时感谢丁玖教授和罗懋康教授提出宝贵的建议。

德国比勒费尔德和知屋

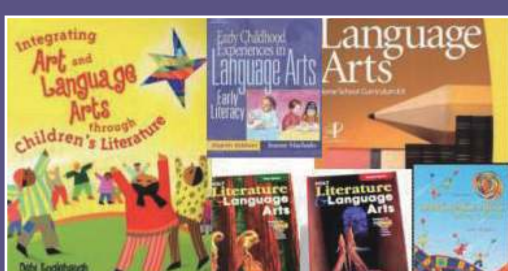
2013 年 8 月 5 日原稿，8 月 23 日补充定稿

把数学写作当作语言艺术的一部分

蒋 迅

《数学之英文写作》

美国一些中文学校的语文课本



美国“Language Arts”课本

刚拿到这本由汤涛教授和丁玖教授合著的图文并茂厚达 298 页的《数学之英文写作》(以下简记为《写作》)时，我有一点不以为然。自己到美国已二十余年，经常游走在中英文之间，似乎没有理由再读这类书。但当翻开第一页前言后，我立即意识到，这是一本难得的好书，是以中文为母语的中外科技工作者的教科书级读物，亦是应该常备案边的工具书。细细读完，禁不住挥毫写下片段感悟，以期更多的读者看到本书，从中受益。

在这里，请允许我做一个基本的假设：《写作》的读者在撰写论文、书籍、报告和申请书等时，已经完全清楚写作的内容和对象，亦即已经满足哈尔莫斯的第一和第二写作原则；可能最为担心的是，能否达到预想的正能量。正如《写作》作者指出：“一个不争的事实是，虽然很多文章的学术质量还可以，但是由于英语水平不足，经常遭到退稿。”请人帮助润色文章是一个快速解决办法，在西方也有人使用，费用有时也不低，但限于理解专业数学写作的职业写手凤毛麟角，很难达到预期效果，而且这毕竟不是上策，也非长久之计，因此提高自身写作水平势在必行。

英语里，语文课是“Language Arts”，这样的表述没有在“语文”这两个汉字里充分表现出来。这不能不说是汉语的一个缺憾。一如作曲家创作一首乐曲和绘画家创作一幅油画，写作同样是一种艺术，数学的写作亦不例外。《写作》正是以此为基点呈现给读者的，不仅引导读者如何把中文的数学结果译为美丽的英文，而且告诉读者数学作品应该具有怎样的结构，如何才能达到这样的结构。我想，这是本书最成功之处。

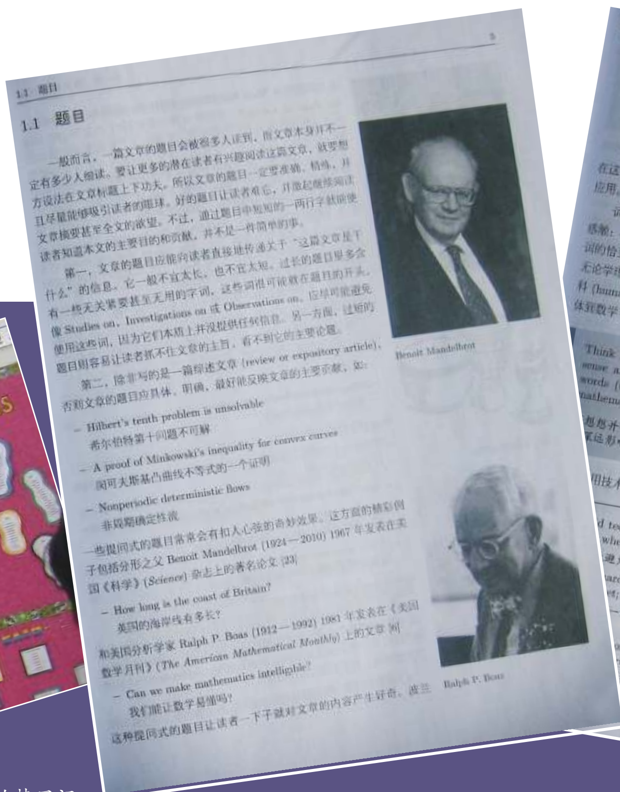
在西方学校里，“Language Arts”课一般是从学生写读书报告开始。第一次写读书报告，可能是老师布置学生们读同一本书，分发给学生一篇带有许多空格的范文，学生只要根据书的内容把空格填上即可大功告成。以后，学生就必须独立找书、写读书报告。俗话说：读书破万卷，下笔如有神。西方对阅读要求很高，

公共图书馆里有大量的儿童读物，到暑假里还会举行读书竞赛。平时，六年级学生每天必须阅读 20 分钟并记录所读图书及进展。所以孩子们就自然而然地接受了写作所必需的基本训练。《写作》里也特别强调了写读书报告和综述文章。我想这可以是学习英文写作的起点吧。

“Language Arts”课从小学就开始对学生进行严格的训练。篇篇作文皆经几易其稿才最终成形。我对这一点印象极为深刻，因为我童年写作文从来都是交一遍作业就完成，不会再修改。老师讲课文也从来都是中心思想和段落大意。“Language Arts”课从第一次概述（outline）开始，学生们要在语法、句子结构、各个段落的写作、开篇结尾、动词副词形容词的使用上一点一点地打磨和锤炼。不但每一段话要有开场白（opening statement），而且每一句的开头（opener）也要细斟慢酌。老师会规定一些禁止使用的词汇（banned words），这当然不是我们平素说的敏感词，而是像“very”、“good”等过于平庸的词，以使文章更具生趣；一些形容词也只允许出现一次。网上有一篇文章：250 Ways to Say “Went”，虽是一个极端的例子（其他的例子还有：“Stuff”、“Things”、“Got”、“Was/Is/Are/Am”等），但却很能说明这个问题。有兴趣的读者还可在“List of tired, boring words”里自我检验一下，有则改之无则加勉。有些英语初学者常因词汇匮乏，只好反复运用这类修饰词，甚至有时在一句话里就频繁使用多次，令人烦腻和倒胃口。当然数学写作有其自身特性，有些词可能会有较高的出现需要，是不可避免的。比如数学论文里的“因为 - 所以”结构。如何用不同的词汇来表达相同的意思堪称一种挑战。我想，中国学生可以边阅读边积累，在阅读英文时，可多留意行文优美的大数学家处理这类文字的方式，能够快速高效地领会语言的真谛。

《写作》很清楚中国学生的上述症候，用心把脉，专门诚意奉上了丰富的短语范例，相信学生读后会大大提升文辞质量。这在第二章里占了大部分篇幅。关于“因为 - 所以”顺便再提一句，我们有时候会用“∵”和“∴”来表示这个结构，但我在英文里从来没有见过，英文中常常是直接用句子来表达，《写作》对这一点也

美国教室里贴的禁用词



《写作》第一章第一节

《写作》第二章

强调过。有些人可能会误认为句子越复杂就越能显示出英文水平，事实并非如此，一句话里从句套从句会让读者疲累，西方人不喜此类结构，老师会要求学生在每一句话里都必须有状语修饰但又不能超过一个从句。我在回忆蒋硕民先生的文章（见《数学文化》第 4 卷第 1 期)里也曾经提到过蒋先生为学生改从句的例子。有这个习惯的读者应该读一下《写作》里“怎样修改文章”一章里的“删减字句”和“突出重点”两节。

《写作》分别讨论了数学文章、书籍及其他文体的写作方法。数学写作的表现形式因数学本身的特点有很大约束，更具难度。也许有些人持有不同观点，认为数学的英文写作正因有所限制或者有固定的写作模式，更易模仿，比起其他的写作要容易得多。其实不然，若想在一定的限制下写出独特的风格可谓难上之难。《写作》特别指出，我们的作品在整体结构和各个细节上都要反复咀嚼，精益求精，在一次次推敲中提高写作水平。我对这一点极其认同，好文章是改出来的，细微之处见功力，此言不虚。如果有共同作者的话，二者互动的效果会尤其明显。

《写作》对数学词句的应用提出了很多平时可能不易想到的注意事项，包括：新词和旧词的使用，作者自造的词汇，主动、被动语态的使用，连词的使用，定冠词和不定冠词的区分，数学证明中的语言表述，长句和短句，数学符号的运用等，通晓这些词汇和句式对于数学作品的美学效果至关重要。我读过之后有相见恨晚的感觉。记得自己以前就自创过名词，喜欢写长句，用被动结构等。从我的阅读范围来看，国内的青年数学工作者在这些方面仍有不少困惑。

《写作》一书里介绍了数本如何写好数学的英文书。如果读者结合这些书籍一起阅读本书会如虎添翼，更有收获。我把这些书籍再汇集如下，也为自己提供一个方便：

* 《怎样写数学》(How to Write Mathematics)
* Handbook of Writing for the Mathematical Sciences
* A Primer of Mathematical Writing
* Scientific Writing，A Reader and Writer's Guide
* A Handbook of Public Speaking for Scientists & Engineers

《写作》提供了大量的实际翻译的例子，作者多年来能注意收集这么多的资料看来至少为写作本书做了不下十年的辛苦准备。读者应该认真比较中英文句子的异同，把其中精彩的翻译部分 highlight 出来，便于以后查找。通读全书，唯一让我不太习惯的是，本书没有使用不同的字体或对边来把它们与主体分开。当一个例子延续达几个段落时多多少少会使读者有所迷惑，不知哪些是例子，哪些已经回到正文。

我认为，国内研究生在完成基本的英语课程后，应该继续上一门数学（或科技）英语写作的课，《写作》就是一本合适的教科书。若果真如此，《写作》的每一章结尾都不妨配备推荐阅读书目，增加一些练习题。虽然《写作》已给出相当多的实例，但读者亲自动手做题和思考将有更深刻的体会。对那些在国内用英语开课的数学老师来说，本书应是“Prerequisite”。

《写作》指出，“索引”（index）是西方书籍的一个环节，而且使用 LaTeX/TeX 可以很容易得到“索引”。但奇怪的是，《写作》本身却没有“索引”。我在评论卢丁的《数学分析原理》中译本(《数学文化》第 1 卷第 2 期）时也曾指出中译本遗漏了原书的索引。其实，据我所知，当初译者已经把原书的索引译出，但不知为什么出版社在排版时却莫名地将其删去。这反映了中国出版业与国际脱轨的事实：国内没有把索引当作书籍的一个必不可少的部分。另外，西方人喜欢用缩写语。说“有限元方法”远不如说“FEM”容易，但计算数学领域之外的学者可能就不知道“FEM”是什么。虽然《写作》一书也提到了必须在第一次使用缩写时提供全称，但是缩写在后文出现时读者往往已忘记，特别是当读者是从中间开始阅读时更会有此困惑。我认为，索引可以解决这个麻烦。

《写作》还有其他一些微不足道的不足之处，比如对“脚注”的使用，对参考文献中“private communication”的使用等没有提及。也许提一句博客微博也更显得有 21 世纪的气息。第 242 页最后一行中的“Men of Mathematics”前面应该是中文的书名《数学家们》，而不是把这个中文书名放在下一页。建议作者在新版时予以考虑。

大多数学工作者是用 LaTeX/TeX 来完成数学作品的。在完成之后不妨把文章放在微软办公软件 WORD 里去浏览一下，因为 WORD 可以指出文字中的拼写和语法错误。还有一些在线的类似网站可以帮助提高文字质量。我们虽不能依赖于软件，但发挥软件的优势也是明智之举。

写作是一门艺术，经营好这门艺术要从小抓起。对于数学学习和工作者，如果没有从小抓起，那就从《写作》这本优秀的参考书开始吧。它就像一片浩瀚曼妙的数学语言星空，相信一定会使读者采撷到满满的期待和意外的惊喜！

HONG KONG
BAPTIST
UNIVERSITY
SHAW TOWER