

# 数学家与音乐

## (上)

蒋迅 王淑红

英国数学家和哲学家罗素说过：“数学不仅拥有真理，而且拥有至高无上的美——一种冷峻严肃的美，就像是一尊雕塑，……这种美没有绘画或音乐那样华丽的装饰，它可以纯洁到崇高的程度，能够达到严格的只有最伟大的艺术才能显示的完美境界。”仅寥寥数语就将数学之美推崇到了无以复加的地步。

音乐家贝多芬说：“音乐是比一切智慧、一切哲学更高的启示，谁能参透我音乐的意义，便能超脱寻常人无以自拔的苦难。”音乐家舒曼说：“对我来说，音乐是灵魂的完美表现。”音乐在他们心中的空灵、智慧和高尚一览无余。

我们不去探究哪一个学科具有王者至尊的地位，只是想说明数学与音乐都是美的化身，一个冷峻，一个空灵，它们在自然中产生，又超乎自然而存在，是美的追求者和实践者，是放达心灵的不同方式。若是将二者有机地结合在一起，定会美不胜收，协奏出智慧通灵交响。

其实历史上有许多数学家具有很好的音乐修养。早在中世纪，西方的学者便接受包括音乐、几何、算术、天文在内的“四艺”训练，音乐被广大学者视为一种高雅修养的体现，也自然而然成为了他们的修养与爱好。至近现代，爱因斯坦认为：“没有早期的音乐教育，我会一事无成。”而尼采则更加“激进”，他断言：“没有音乐，生命是没有价值的。”也许这些观点稍显“武断”，但他们对音乐的情有独钟，视音乐为灵感之源、智慧之根和生命本质的哲思却也赫然纸上。还是数学家更为“中庸”——英国数学家怀特海（Alfred North Whitehead, 1861-1947）言道：“纯粹数学这门科学在近代的发展可以说是人类灵性最富于创造性的产物。另外还有一个可以和它争这一席位的就是音乐。”

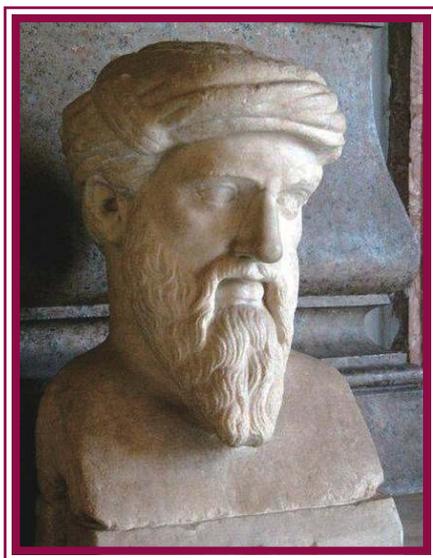
数学与音乐相结合的例子很多，通常是由数学家实现的，许多数学家具有很好的音乐修为或者与音乐有不解之缘。比如毕达哥拉斯、笛卡儿、莱布尼茨、约翰·伯努利、丹尼尔·伯努利、欧拉、达朗贝尔、拉格朗日、弗里德利奇·冯·舒伯特、傅里叶、阿贝尔、鲍耶·亚诺什、狄利克雷、西尔维斯特、艾森斯坦、亥姆霍兹、庞加莱、希尔伯特、埃米·诺特、库朗、阿廷、勒穆瓦纳、伯克霍夫、奈望林纳、狄厄多内、哈斯勒·惠特尼、福克斯、盖尔范德、卡普兰斯基、纳什、恩佛罗、马克西姆·康采维奇等等。我们也看到有音乐家主动向数学靠拢。数学和音乐的相互接近与融合是一种趋势。

这是一个不完全统计，却是一个长长的名单，数学家与音乐的关系即便不是如胶似漆，也绝非一般啦。他们或在音乐中闲庭漫步，或在音乐中放飞数学的想象，或在音乐中如痴如醉。正如李白醉酒写下豪放轻灵的诗行，这些数学家在音乐的熏染和启迪中得到智慧的荣光和精神的慰藉，也在无形中增添一种清雅的气质。下面我们就为读者一一展示数学家与音乐之间的不了情缘和美丽画卷。有些故事可能已经有他人写过。但为了方便读者，我们再简单重复一遍。

## 1 毕达哥拉斯发现音乐和声的原理

数学家与音乐的关系可以追溯到古希腊。古希腊哲学家、数学家和音乐理论家毕达哥拉斯（Pythagoras）生于希腊萨摩斯岛，早年游历埃及，后定居意大利南部城市克罗顿，建立了以其名字命名的学派，史称毕达哥拉斯学派，其成员大多是数学家、天文学家、音乐家，是西方美学史上最早探讨美的本质的学派。著名的勾股定理在西方就是毕达哥拉斯学派首先发现的，称为毕达哥拉斯定理。

毕达哥拉斯学派信奉万物皆数，认为对几何形式和数字关系的沉思能达到精神上的解脱，而音乐是净化、解脱灵魂的工具。他



毕达哥拉斯（约前 580- 前 500）



中世纪木刻显示毕达哥拉斯式调音

们还认为世界是严整的宇宙，整个天体就是和谐与数，提出了“美是和谐”的观点，认为音乐的和谐是由高低长短轻重不同的音调按照一定的数量上的比例组成，并且发现了音乐和声的基本原理。毕达哥拉斯在一个铁匠铺里发现彼此间音调和谐的锤子的质量相互成简单比（或简分数）。他们还试图提出一个声调对比关系的数学公式：八度音、五度音、四度音与基本音调之比分别为  $1:2$ 、 $2:3$  和  $3:4$  等等，可以说是人们最早用数学方法研究美的实践与创始。因此，从毕达哥拉斯的发现发展起来的音乐律制亦称为“自然律制”。

## 2 笛卡儿把音乐放进坐标系



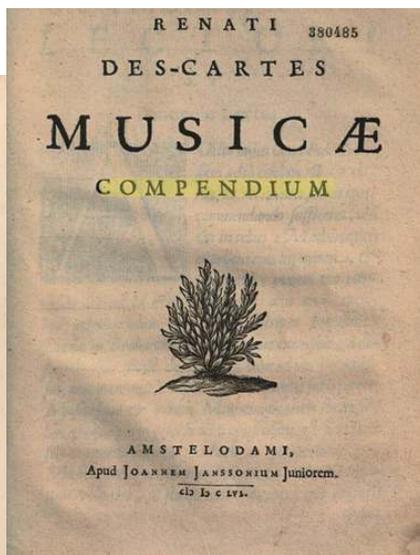
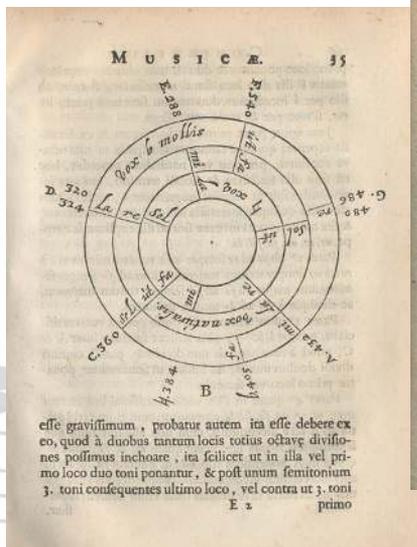
笛卡儿 (1596-1650)

以“我思故我在”闻名于世的笛卡儿 (Rene Descartes) 不但是一位哲学家，还是一位数学家，是解析几何的创始人，其中他的解析几何学的成就是作为他的哲学著作《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》的附录《几何学》发表的。

有一则传说，他发明几何学是因为做了三个连贯的梦，正是这三个梦向他揭示了一门奇特的科学。这说明数学发现需要执着，需要灵感，需要联想。笛卡儿把他的联想延伸到音乐中，成为了一位训练有素的音乐家。他写过音乐理论论文《音乐简编》和《音乐概要》。前一篇是为其早期合作者艾萨克·贝克曼 (Isaac Beeckman, 1588-1637) 而作，其中包含数学、天文、几何光学等内容；后一篇具有方法论价值。那个时候，五线谱的雏形已经形成。而笛卡儿则自觉地把音乐像坐

标系那样来表示，将音乐和坐标系完美地结合在一起，似乎音乐在坐标系中吟唱，坐标系在音乐中沉醉，相得益彰。

笛卡儿在《音乐概要》中显示他清楚地了解了现代和传统音乐的理论思想，并在历史上第一次严格地对和谐与不和谐分类。



笛卡儿的《音乐概要》

### 3 莱布尼茨说音乐是灵魂在不知不觉中数数

与牛顿共享发明微积分殊荣的莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz) 是数学史上没有在大学当过教授的数学家之一。他不仅是哲学家、科学家、数学家和历史学家，而且是一位科学活动家，他的一些科学创举使科学本身受益匪浅。他是柏林科学院的创建者和首任院长，倡议设立彼得堡科学院、维也纳科学院，特别是还曾经写信给中国康熙皇帝建议成立北京科学院，是最早关心中国科学发展的西方人士之一。

莱布尼茨在音乐方面颇有造诣，甚至在一些德国人看来，他是当之无愧的音乐理论家。他把音乐定义为“灵魂在不知不觉中数数”，生动说明了神秘数学语言与神学信仰的微妙关系。他认为，“数学家能够把音乐分成小节和图像，而音乐家则靠直觉”。当时在德国的另一位业余音乐理论家和业余数学家翰夫林 (Conrad Henfling, 1648-1716) 曾经和莱布尼茨讨论过许多音乐理论中的问题。翰夫林用辗转相除法来研究律学。后来莱布尼茨把翰夫林的成果作为音乐系统通讯集发表。



莱布尼茨 (1646-1716)

### 4 约翰·伯努利的对数螺旋线和丹尼尔·伯努利的弦振动

数学史上迄今最大的数学家族，就是伯努利家族。从 17 世纪末到 19 世纪初，这个家族集中出现了十几位数学家，尤其是前两代产生五位杰出的数学家，有两位与音乐关系密切。一位是约翰·伯努利 (John Bernoulli)，另一位是丹尼尔·伯努利 (Daniel Bernoulli)，这是一对志趣相投的父子。

约翰是伯努利家族第一代两位数学家之一，是其哥哥雅各布 (Jacob Bernoulli, 1655-1705) 的学生也是其合作者，他们都是莱布尼茨微积分学派的代表人物。有一则故事说，大音乐家巴赫 (Johann Sebastian Bach, 1685-1750) 十分热爱数学，其音乐具备高度的数学性。在他无法说服其音乐家同事相信十二平均律的美妙时，遂向约翰寻求援助。约翰随手画出一条对数螺旋线，并在上面标了十二个半音。他对巴赫说：“在这条曲线上，半音旋转相同的角度可以使其与原点的距离以同等比例增加。这不正是你想要的结果吗？”接着继续说道：“从上一个音到下一个音，只要将这条螺旋线旋转一下，使得第一个音落在  $x$  轴上，其他的音会自然落在相应位置上。简直就是一个音乐计算器！”巴赫听后深以为然，由此也说服了一直大惑不解的同事。

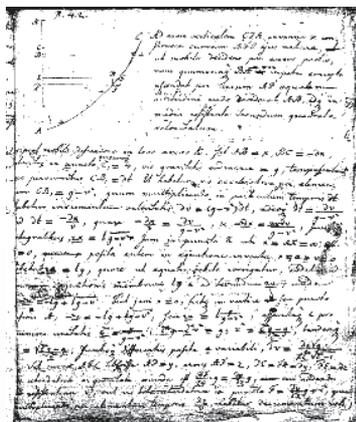


约翰·伯努利 (1667-1748)



丹尼尔·伯努利 (1700-1782)

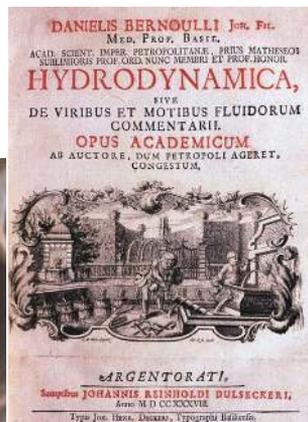
丹尼尔是伯努利家族第二代数学家中最伟大的一位，他 1725-1733 年在圣彼得堡科学院与其父亲的学生，即双目失明的传奇数学家欧拉 (Leonhard Euler) 共事，一起做出了很多成果，被认为是数学物理的奠基人。1739 年他开始研究乐器，提出了解决弹性振动问题的一般方法，并证明了乐器的弦振动都是由无穷多的调和振动合成的。这个结果对偏微分方程的发展产生了较大影响。



在这个手稿中，约翰讨论了物体在液体中的运动



雅各布墓碑上的螺旋线



丹尼尔出版的《流体力学》

## 5 欧拉是精通数学的音乐家和精通音乐数学家

上文已经提到欧拉。他一生富有传奇性色彩，是世界上最多产的四位数学家——另外三位是柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857)、阿瑟·凯莱 (Arthur Cayley, 1821-1895)