

## 《数学文化》2013年第4期数学趣题答案

# 1

由于蜜蜂和火车全程均作匀速运动，所以任一时刻，蜜蜂和火车已运动的路程皆成固定比例。



200 m



200 m



$x$



400 m



$x$

不妨设蜜蜂抵达车头时，火车运动的路程为  $x$ ，蜜蜂飞了  $kx$ 。则此时蜜蜂飞行的距离也可表示为  $200 + x$ ，因此

$$200 + x = kx。$$

当蜜蜂返回车尾，火车运动的路程为 200，蜜蜂则飞了  $200 + 2x$ 。因此

$$200 + 2x = k \cdot 200。$$

两式相除消去  $k$ ，得到

$$\frac{200+x}{200+2x} = \frac{x}{200}。$$

由于  $x > 0$ ，上式解得  $x = 100\sqrt{2}$ 。即蜜蜂飞行的总路程是  $200 + 2x = 200 + 200\sqrt{2}$  米。



# 2

其实，任意正整数皆可用三个 2 经由多次开根及取对数来得到：

$$-\log_2(\log_2 \sqrt{2}) = -\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$-\log_2(\log_2 \sqrt{\sqrt{2}}) = -\log_2\left(\frac{1}{2^2}\right) = 2$$

$$-\log_2(\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}) = -\log_2\left(\frac{1}{2^3}\right) = 3 \dots\dots$$

即

$$N = -\log_2(\log_2 x)，$$

其中  $x$  为 2 经过  $N$  次开平方根后得到的数。

# 3

不妨来看这么一个数： $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 。

① 若它为有理数，则显然无理数的无理数次幂可为有理数，命题不成立。

② 若它为无理数，则  $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2$ ，命题同样不成立。

综上所述，“若  $x, y$  均为无理数，则  $x$  的  $y$  次幂一定为无理数”是一个假命题。

# 4

设  $2012 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ， $a, b$  为整数。

将 2012 分解质因数，得  $2012 = 2 \times 2 \times 503$ 。

简单起见，仅考虑  $a, b$  非负的情况。

①  $a+b=1006, a-b=2$ ： $a=504, b=502$ 。

②  $a+b=503, a-b=4$ ：解不是整数。

因此  $2012 = (\pm 504)^2 - (\pm 502)^2$ 。

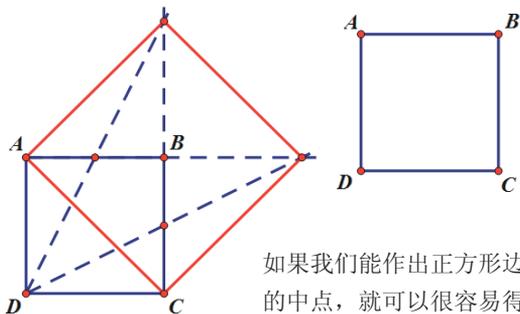
注意到  $a+b$  和  $a-b$  要么同时为奇数，要么同时为偶数。

任何形如  $2(2n-1)$  ( $n$  为整数) 的数字，表示为两整数乘积时，必定为一奇一偶。

凡是这样的数字，如 2014，均无法写成两个整数的平方差。

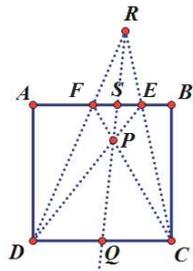
因此本题第二问的答案是否定的。

# 5



如果我们能作出正方形边上的中点，就可以很容易得到面积为  $ABCD$  两倍的正方形。上图就是一种作法：

问题在于，怎样才能只用直尺作出边上的中点呢？下面提供一种方法。在正方形上方任选一点  $R$ 。连结  $RC$ 、 $RD$ ，交直线  $AB$  于  $E$ 、 $F$ ；（为作图方便，可选择  $R$  的位置令  $E$ 、 $F$  落在线段  $AB$  上，如图中所示）然后连结  $FC$ 、 $ED$ ，交于点  $P$ ；最后作射线  $RP$  交线段  $CD$  于  $Q$ 。 $Q$  即为  $CD$  中点。



## 本期数学趣题

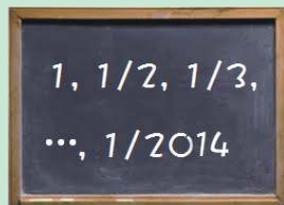
# 1

某国所有的道路都是单行道，每两座城市之间有且仅有一条道路相连。问该国是否存在这么一座城市，从国内任意其他城市出发，最多只经过另外一座城市中转即可抵达它？



# 2

黑板上有 2014 个数，分别是  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots, 1/2014$ 。每次操作允许从黑板上擦去任意  $a, b$  两数，写上新数  $ab + a + b$ ，经过 2013 次操作后，剩下一个数，求这个数。



# 3

科学计算器的除法键坏了！我该如何用  $\sin, \cos, \tan, \sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}$  来计算  $1/x$  呢？



# 4

中世纪的欧洲，两名少女被指控“勾结恶魔”。她们将被关入不同的密室内，每分钟各自掷一枚硬币，并猜测另一人所掷的硬币何面朝上。60 次猜测中，只要有一次两人皆猜对，便会作为“勾结恶魔”的铁证，将她们送上火刑架。

所幸，少女们冰雪聪明，很快就想出了逃出生天的方法。你能想到她们采用的策略吗？



# 5

看看下面的两幅图。右边多出的两个红格子是怎么冒出来的呢？

