三角形的迭代

叶宁军

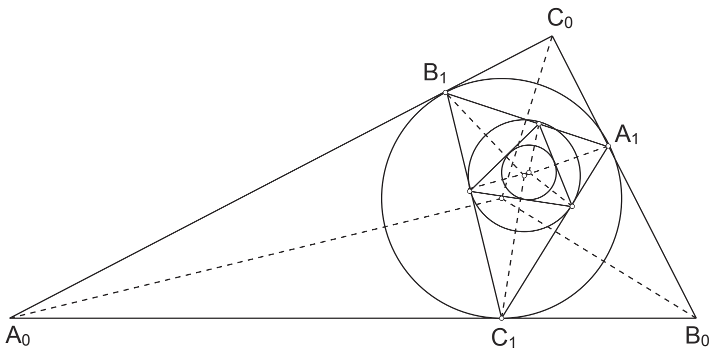
中学的数学科目中，最重要但也最难的大概是平面几何。学生们能从几何定理的严格论证中学到逻辑推理的基本原则和方法，而数学推理的能力培养无疑是中学生思维训练中极其重要的一环。

由于中国的中学生通过老师的授课和课后的作业得到了大量的训练，几何证明的能力普遍比美国的同类学生要强。中国的几何教学注重证明技能的掌握，而美国的方式则更多地和应用挂钩。这也可从两国所用的几何教科书中看出差别。中国的几何教科书充满浓厚的数学味道，到处是证明，而美国的书则图文并茂，又厚又重，不是因为书中处处都有证明，而是因为到处可见日常生活中与几何密切相关的例子。例如，利用你的身高和树影的长度来测量树的高度，这就要用到相似性原理。

如果我们随机地各取两国的一个学生同时证明一个几何命题，比如说“证明三角形的三条垂线相交于一点”。中国学生胜出的概率可能接近百分之一百，因为类似的强化训练早让该学生对此类证明方法娴熟于心而毫不费力。

然而，如果我们让两国学生做一个与平时的授课内容看上去不太相关的“project”，结果会是怎样？比如说下面的这个论题：

取一个任意的三角形 $A_0B_0C_0$，作它的内切圆，三个切点确定一个新的三角形 $A_1B_1C_1$。然后对后者做同样的事。这个过程称为迭代，如图所示。如果我们一次一次不停顿地迭代下去，就得到一个迭代三角形的序列。很显然，它们的尺寸越来越小，迭代三角形最终趋向于一点，但我们的问题是：这些三角形的形状最终会是怎样呢？



我们不打算让两国学生打擂台，但可能的情况是，如果中国的学生明确地知道这个题目与作业乃至高考无关，他们中的绝大部分人会表现得兴趣索然；而美国学生或许会大叫一声“cool”，并有兴趣探索一下结论到底是什么。这两种态度都有合情合理的解释：中国学生功课太紧而无暇顾及其他，美国学生有的是精力和时间，这类问题正好能满足他们的好奇心。

我们现在就先满足读者的好奇心吧。但是在阅读下面的分析和解答前，希望你自

己拿一支笔做些试验，然后想出一个办法求解它。

如果我们仔细看一看上面图示中的前三个三角形，它们的形状似乎越来越接近等边三角形的形状。但这仅仅是关于一个迭代三角形序列的观察。如果第一个三角形（称为初始三角形）选为任何其他形状，譬如说一个角是钝角，结果也会是这样吗？或迭代三角形的最终形状也依赖于初始三角形的形状？

研究迭代最终走向问题的关键思路是能否找到这个迭代过程的一般规律，即下一次的迭代三角形和目前的迭代三角形的关系如何？如果能找到这种一般关系，就可采用归纳法得到第 n 个迭代三角形与初始三角形的关系。数学就是研究关系学的一门精确学科，而代数表达式就是我们经常孜孜以求显示关系的那个东西。

好了，我们开始找关系。由于每次迭代所遵循的规则是一样的，我们只须找到第二个三角形的形状与初始三角形形状之间的关系。三角形的形状当然取决于它的三个角，因此我们只要找到新的三角形的角度与旧的三角形的角度之间的关系就行了。这时，平面几何的基本知识派上了大用场。如果记图中那个大的内切圆的中心为 O，则四边形 $OB_1A_0C_1$ 可以内接于一个圆（想一想为什么），故角 A_0 加上圆心角 B_1OC_1 等于 180 度。另一方面，圆周角 A_1 是圆心角 B_1OC_1 的一半。综合所述得到：角 A_1 等于 180 度减去角 A_0 再除以 2，即

$$\angle A_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A_0\,,$$

类似可得

$$\angle B_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B_0\,,$$
$$\angle C_1 = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C_0\,.$$

这样我们得到迭代过程的一般关系：

$$\angle A_n = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A_{n\text{-}1},$$
$$\angle B_n = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B_{n\text{-}1}\,,$$
$$\angle C_n = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C_{n\text{-}1}\,.$$

如果我们引入一个线性函数

$$y = 90 - x/2,$$

则本质上我们要考虑的是关于上述函数的迭代性质。这个函数的图像是一条直线，其斜率为 $-1/2$，它与对角线 $y = x$ 有唯一的交点 $(60, 60)$。$x = 60$ 称为函数的不动点。

任取一个初始点 x_0，我们迭代函数 $f(x) = 90 - x/2$，得到一个数列

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots\cdots, x_n = f(x_{n\text{-}1}), \cdots\cdots.$$

依次代入函数表达式，就有

$$\begin{aligned} x_n &= 90 - ½\, x_{n\text{-}1} = 90 - ½\,(90 - ½\, x_{n\text{-}2}) = 90 - 90/2 + 1/2^2\, x_{n\text{-}2} \\ &= 90\,[1 + (-1/2)] + 1/2^2\, x_{n\text{-}2} = \cdots\cdots \\ &= 90\,[1 + (-1/2) + (-1/2)^2 + \cdots\cdots + (-1/2)^{n\text{-}1}] + (-1)^n/2^n\, x_0 \\ &= 90\,[1 - (-1/2)^n]/[1 - (-1/2)] + (-1)^n/2^n\, x_0 \\ &= 60\,[1 - (-1/2)^n] + (-1)^n/2^n\, x_0\,. \end{aligned}$$