几何学家的海伦——摆线的故事

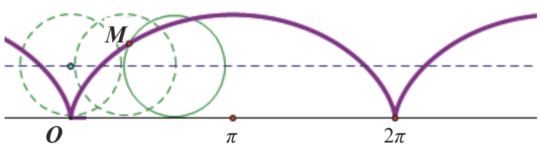
柳彤上

给定不在同一铅垂线上的两点，一质点在重力的作用下从较高点下降到较低点，问沿着什么样的曲线运动其所需的时间最短？

这个问题的答案是，摆线（的一部分）。

那么，何谓摆线呢？

在我们的校园生活中，偶然会看到这样的画片：一个骑自行车的同学，滚动的车轮从地面上粘起一枚掉落在那里的口香糖，当车轮继续向前时，这枚口香糖就在空中画出一条摆线。车轮每旋转一周，口香糖就画出摆线的一个拱。

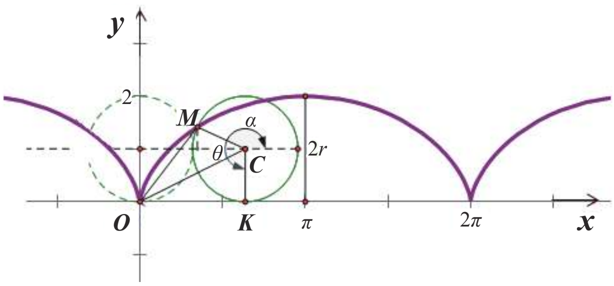


在数学上摆线可以这样被定义：一个圆沿一直线缓缓地滚动，则圆上一定点所画出的轨迹称作摆线（如上图）。这一定义正是上面的生活画片的一个数学抽象。

谁是研究摆线的第一人？这或是一个谜。数学史家们众说纷纭，莫衷一是。但可以肯定的是，在最早研究摆线的人群里，镶嵌有一个伟大的名字——伽利略（Galileo Galilei, 1564-1642）。被称为“现代科学之父”的伽利略也是一位伟大的“筑梦师”，正是他第一个为摆线命名：cycloid。经由他的手，摆线从一个寂寂无名者跃居为那一时代的科学宠儿：17 世纪的欧洲，有一大批卓越的科学家，如笛卡儿、帕斯卡、梅森、惠更斯、约翰•伯努利、莱布尼兹、牛顿等等都热心于这一曲线性质和特征的研究。在那个崇尚比赛的年代有如此多的追随者，于是伴随着众多发现，出现了许多有关发现权的争议，剽窃的指责，以及抹煞他人工作的现象。因此摆线又被称为“几何学家的海伦”（The Helen of Geometers）[4]。

在希腊神话中，海伦是众神之王宙斯的一个私生女，被认为是世间最美丽的女子。她的绝世美貌引来众多的追求者，可是也给她带来了不幸，并导致了长达十年的特洛伊战争。

是的，摆线或许是数学中最迷人的曲线之一。在它身上，蕴含有许多奇妙的性质。在它的背后，有着很多迷人的数学故事。在此，让我们先来看看它的数学具象。



I. 摆线的参数方程（记其拱高为 $2r$）：

如上图，设动点 $M=(x,y)$，则我们有

$$\begin{aligned}(x,y)&=(OK,KC)+(CM\cos\alpha, CM\sin\alpha)\\&=(r\theta,r)+(-r\sin\theta, r-r\cos\theta)\\&=(r\theta-r\sin\theta, r-r\cos\theta).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta)\\y=r(1-\cos\theta)\end{cases}\quad（其中\ \theta\ 为参数）.$$

这就是（拱高为 $2r$ 的）摆线的参数方程。当 θ 从 0 到 2π 变化时，动点 $M(x,y)$ 描绘出摆线的一拱。如此循环往复。

II. 其拱形面积的计算可以是这样的：

$$A=\int_0^{2\pi} y\,dx=\int_0^{2\pi} r^2(1-\cos\theta)^2 d\theta=3\pi r^2.$$

摆线下方的图形面积是生成它的圆面积的 3 倍：这一奇妙的性质是法国数学家罗贝瓦尔（G. P. de Roberval, 1602-1675）在 1634 年发现的。罗贝瓦尔是那个时代的一个大数学家，在阿基米德螺线研究上享有盛誉，他在微积分创立过程中有着先驱性的工作，首先在一般意义上讨论了曲线的切线。相关的数学史资料表明，罗贝瓦尔和那个时代几乎所有的大数学家有着通信往来。只是现在留存下来的关于他的数学故事并不多。

有一则数学趣闻与此相关[2]：话说早在 1600 年前后，伽利略就试图求出摆线的面积。于是他剪出了一个完整的摆线拱形，称了它的重量，然后与生成它的圆的面积作比较。他得出结论说，摆线的面积大约是生成它的圆面积的 3 倍。这一方法的哲思源自“数学之神”阿基米德。

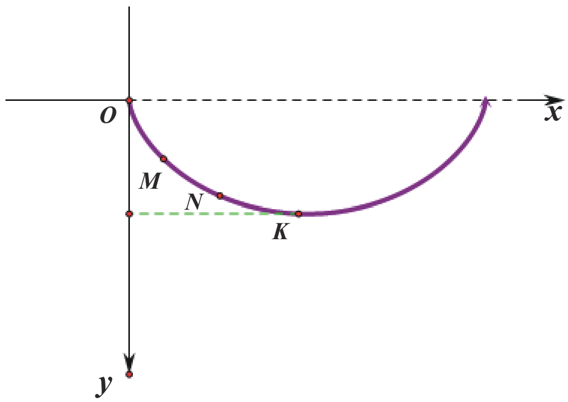
III. 其拱形的弧形长度：借助于弧长的积分公式，我们有

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=\int_0^{2\pi}2r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta=8r.\end{aligned}$$

摆线一拱的弧长恰是其拱高的 4 倍：这一有趣的性质是克里斯托弗·雷恩爵士（Sir

Christopher Wren, 1632-1723 年）在 1658 年的一个数学发现。克里斯托弗 • 雷恩，17 世纪英国伟大的建筑师，许多蜚声世界的建筑，如牛津大学的谢尔登剧院、剑桥大学圣三一学院图书馆、汉普顿宫、格林威治天文台等都联系着他的名字。在 1663 年因为圣保罗大教堂的重建设计，他获得了数学家的称号，其后致力于建筑学。其死后被安葬于圣保罗大教堂。墓碑上刻有这样的拉丁语：Si monumentum requiris，circumspice（欲寻纪念碑，请看你周围）。

IV. 滚珠荡秋千——摆线的等时性：



若把上一页图片中的摆线连同 y 轴一起翻转到 x 轴的下方来，则是呈现在上图的一条摆线槽。取一颗适当大小的滚珠，放在这摆线槽中的任一位置。当你松开手指后，滚珠就会像荡秋千一样，沿着摆线槽来回摆动……选择不同的初始点 M, N 放开滚珠，并注意各自通过摆线槽最低点 K 的间隔时间，你会发现一个很有意思的现象：尽管 M, N 点的高低不同，但滚珠下滑到最低点所花的时间却是一样的。这个有趣的性质叫作摆线的等时性，是十七世纪荷兰数学物理学家克里斯蒂安 • 惠更斯（Christian Huygens, 1629-1695）在 1673 年发现的。

下面我们可从数学上见证摆线的等时性：这有赖于滚珠（或质点）下滑时的时间模式 [5]——如上图，一质点从 $M: \theta = \theta_1$ 的点下降到 $N: \theta = \theta_2$ 的点所需的时间是

$$T = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} d\theta.$$

这一式的推导可简单说明如下：设质点下降的高度为 y，则由能量守恒定律，所在时刻的动能等于其减少的势能：

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

其中 g 为重力加速度，m 为质量，v 为速度，于是有 $v = \sqrt{2gy}$。再注意到 $v = ds/dt$（其中 s 为弧长）和 $ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} d\theta$，我们有

$$dt = \frac{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}{\sqrt{2gy}} d\theta .$$

再积分就可以得到上面的时间公式。于是，质点从 $M:\theta=\theta_1$ 的点下降到最低点 $K:\theta=\pi$ 的点所需的时间是

$$T=\int_{\theta_1}^{\pi}\frac{\sqrt{(x')^2+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}d\theta=\int_{\theta_1}^{\pi}\frac{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}d\theta}{\sqrt{g(\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2})}}$$

$$=-2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_1}^{\pi}\frac{d(\cos\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_1}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=-2\sqrt{\frac{r}{g}}(\arcsin 0-\arcsin 1)=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

上面的计算表明，质点（滚珠）从初始位置 M 下降到摆线槽最低点 K 所用的时间是一常数 $\pi\sqrt{r/g}$，此与初始位置无关。这蕴含着摆线的等时性。

摆钟的设计，正是利用到摆线的等时性。

V. 相约最速降线问题：

本文一开始提出的问题又被称为“最速降线问题”，伟大的伽利略曾于 1630 年提出。他认为答案是圆（的一部分），当然，这并不正确。60 多年后，瑞士数学家约翰 • 伯努利再提这个问题，并于 1696 年向整个欧洲大陆的数学家发出挑战，看谁可以解决这个著名的难题。其后有 5 人分享了这一荣誉：他们是牛顿、莱布尼兹、约翰 • 伯努利和他的哥哥雅各布 • 伯努利，还有以洛必达法则闻名于世的洛必达。

最速降线问题的答案竟然是许多年前惠更斯所发现的等时曲线——摆线。可以想象，这一数学的邂逅，让那个时代的科学家们有多少的惊奇。无怪约翰 • 伯努利如是说[3]：

> “是的，无论如何，当我们发现摆线也是最速降线问题的答案时，我们既高兴又惊讶。带着欣赏，我们敬佩惠更斯，因为他首先发现，一个重质点沿着一条摆线下降时，无论它从摆线的什么地方开始下降，所用的时间都是一样的……但是，当我告诉你就是这个摆线，恰恰就是我们要求的最速降线时，你是否有几分惊呆呢！”

在这一问题的回答背后，蕴含有现代数学一个伟大的学科——变分法的哲思。对于大学数学系低年级的同学来说，变分法的思想或许有一点点跨越……但我们不妨来分享如下的一个数学故事画片（这或可视为最速降线问题的一个特例）。