能量守恒的运用

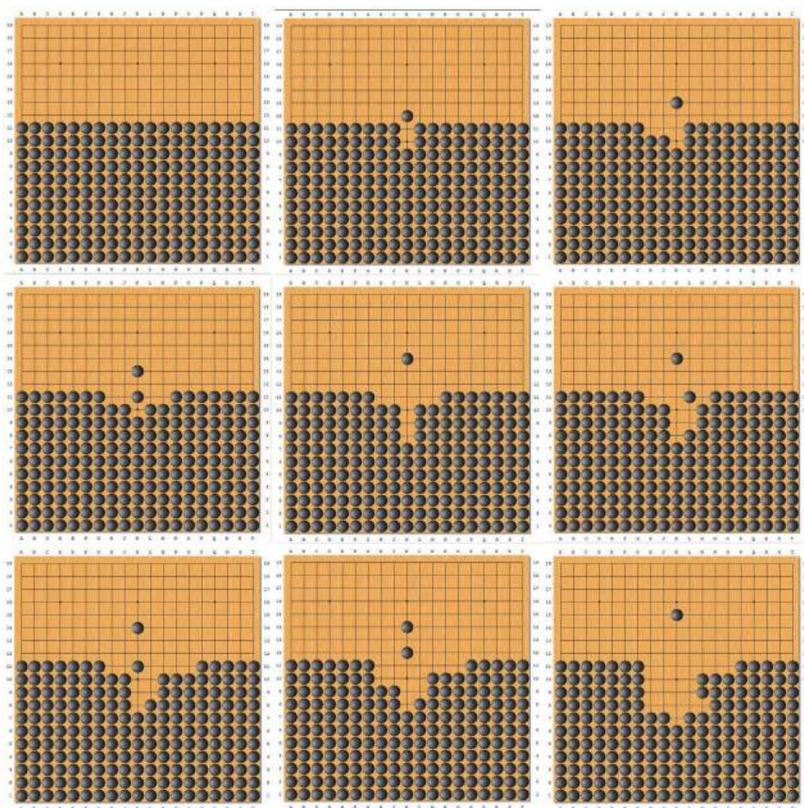
万精油

为了便于叙述，我们把上期的题目复述一下。

上期题目：

高不可攀：假设下半平面（X 轴以及 X 轴以下）的所有整数格点上都布满了棋子。你可以像跳棋一样移动棋子。也就是说一个棋子可以用另一个棋子做桥跳到相邻的空格上。与跳棋不同的是，跳过以后，被当作桥的棋子要从平面上去掉（货真价实的过河拆桥）。第一步可以把坐标为 $(0, -1)$ 的棋子以坐标为 $(0, 0)$ 的棋子作桥跳到坐标为 $(0, 1)$ 的点上，然后去掉 $(0, 0)$ 上的棋子。第二步，可以把坐标为 $(-2, 0)$ 点的棋子以 $(-1, 0)$ 点与 $(0, 1)$ 点的棋子作桥，跳到 $(0, 2)$ 点上。如果安排的好，我们可继续往前跳，跳到 Y 坐标为 3，为 4 的点上。我们的问题是，请你用数学方法证明，无论如何跳，哪怕用尽下半平面所有的棋子，都不可能有棋子能跳到 Y 坐标为 5 的点。

这个题可以推广到三维空间，甚至 N 维空间。假设下半空间的所有整数格点上都布满了棋子，请证明无论如何都不能有棋子跳到高度坐标为 $2N+1$ 的点。



这个栏目前面的题目大多都要用到一些初等数学以外的概念或算法，而我们文章的基本形式就是通过这些题目介绍相关的概念或算法。这期的题目与前面的不同，它只需用初等数学就可以解决。虽然没有新概念介绍给大家，但是，我们希望通过题目的解答过程，向读者介绍比新概念或算法更重要的东西，那就是把一个问题从文字转换成数学问题的方法。

大多数人（包括作者本人）看到这个跳棋题目的第一个感觉都是想先找一个围棋盘来试一试。如附图，一步可以跳到 $Y=1$ 的格点，两步可以跳到 $Y=2$ 的格点。要跳到 $Y=3$ 的格点，需要先造一个桥，所以第三步是造桥。第四步就可以跳到 $Y=3$ 的格点。然后我们开始为 $Y=4$ 造桥。最后一个图是跳到 $Y=4$ 的情况。这时候下面已经出现了一个大坑。我们可以继续造桥，希望跳到 $Y=5$。但是我们发现造桥的代价越来越高，坑越来越大。造桥的速度总是不能超过坑变大的速度。用尽所有的棋子，我们都无法跳到 $Y=5$ 的格点。

试过多次以后，我们几乎可以肯定永远无法跳到 $Y=5$ 的格点。但是，“几乎可以肯定”不等于数学上的证明。这里面关键的问题是存在无穷多种跳法，无论多少次实验都不能排除这无穷多的可能性。必须要从数学上逻辑上严格证明。

要解决无穷多个棋子的问题，我们可以借鉴对收敛的级数求和，把无穷多项通过各种手法变成有限项。常用手法是把它变成几何级数与有限项的和，或者是某种已知级数（比如三角函数、指数函数等等）。这些已知无穷级数的和我们是知道的，通过它们我们就可以求出原来的级数的和。

现在的问题是，怎样把这个跳棋问题转换成级数问题。这个问题的第一步就是给每个棋子赋予一个值，这个值必须要与它的位置有关。这样我们就可以把棋子移动问题变成无穷级数的求和问题。因为我们的最终目的是要证明无法到达 $Y=5$ 的点，我们在赋值的时候自然要让 Y 越高值越大。而且全部棋子的值加起来不大于 $Y=5$ 点的值。$Y=5$ 的点有很多，由于对称性，我们不妨假设最后是到 $(0, 5)$。所以给棋子赋值时，我们希望离 Y 轴越远，值越小。另外，我们还要保证这个值在经过一次操作以后（过桥拆桥），总值不变（或者不增加）。

有了上面的铺垫后，我们可以开始着手证明了。

首先，我们赋予坐标为 (i, j) 的棋子一个势能 $r^{j-|i|}$。显然，如果 $r>1$, 那么位置越高，势能越大。离 Y 轴越近势能越大。经过一次从下往上移动的操作以后，我们把 (i, j) 点的棋子通过 $(i, j+1)$ 点的桥移到 $(i, j+2)$（从左到右或从右到左的移动与此类似）。移动以前，两个棋子的势能和是 $r^{j-|i|}+r^{j+1-|i|}$ 移动以后的势能是 $r^{j+2-|i|}$。要保证势能不增，我们必须有 $r^{j-|i|}+r^{j-|i|+1} \leq r^{j-|i|+2}$。化简后就是 $1+r \leq r^2$。我们知道黄金分割数 $g=(1+\sqrt{5}\ )/2$ 满足方程 $1+r=r^2$。所以，如果我们让 r 取值 g，那么我们就能保证每次操作势能不会增加。

在赋予每个棋子势能以后，我们来求整个下半平面的棋子的总势能。

先求第一排的总势能，它等于

$$v_0=1+2\sum_{i=1}^{\infty} r^{-i}=1+2\frac{\frac{1}{r}}{1-\frac{1}{r}}=1+\frac{2}{r-1}=\frac{r+1}{r-1}.$$

下面每一排的势能都是上面一排的势能的 $1/r$ (因为 Y 坐标减 1), 所以整个下半平面的势能总和是

$$V=v_0\sum_{i=0}^{\infty} r^{-i}=v_0\frac{r}{r-1}=\frac{r(r+1)}{(r-1)^2}.$$