数学之恋

Don Zagier ／文　林开亮／译

原文标题 ***A Passion for Mathematics***，译自 ***Mathematics-A Beautiful Elsewhere***, **Ed. Fondation Cartier pour l'art contemporain, Paris (2011), 90-97.** 感谢作者授权翻译本文并在本刊发表。

一个著名的匈牙利数论专家曾给出如下的定义：

数学家就是将咖啡转化为定理的机器[1]。

然而在我们波恩的研究所里并不缺乏数学家和定理，好的咖啡倒是很难得，因此我有时禁不住设想，我们数学家是不是可以做相反的事情。这就是说，存在着那些忍不住将咖啡转化为定理的人，而对另一些人，仅仅是思考数学就是纯粹的折磨！我稍后将来谈到后一点。然而，首先我要来看看其它问题：数学是什么？当今数学又是什么样子，我们做数学能得到什么？数学何以是优美的？我们如何将数学的乐趣传递给其他人，包括非数学家。

数学是何种类型的活动?

问数学是什么这个问题看起来也许是幼稚的，但这其实是一个很难回答的问题，而且哲学家已经为此艰难思索了好几个世纪。康德在他的《纯粹理性批判》的开头甚至问，怎么可能有纯数学？其他科学可以用它研究的对象来定义：天体、生物、人际关系，如此等等。对数学而言，情况并非如此简单。首先，数学并不总是研究相同的对象。数、代数公式、解析函数、几何结构当然是它研究的一些东西，但还有许多其它东西也在考察范围内；而且严格说来，数学思想其实是对结构的一般性研究，而不是对预先指定的对象的个别研究。然而，问题甚至更为复杂：很难说清楚我们所研究的对象究竟位于何处。这些对象是内在的还是外在的，主观的还是客观的，仅仅出现在我们的脑海中还是存在于现实世界的某个地方？换言之，数学家的工作究竟是创造数学还是发现数学？

在支持“发现”的这一方面，我们首先有这样的事实：数学结果可以被“客观地”验证：数学家对一个定理的证明，只要没有错误，就可以使得其他所有数学家都信服。支持客

[1] 很多人都认为此话出自保罗•埃尔德什（Paul Erdős），但实际上原创是阿尔弗雷德•瑞尼 (Alfréd Rényi)——译者注

观性的另一个论证是，不同的数学家研究同一个数学问题时，不论他们的性格与个人品味如何迥异，他们总会得到相同的答案。最后，对整体文明我们也可以说同样的话，因为不同的文明通常各自独立地发展出相同的数学。二次方程的求根公式、"毕达哥拉斯定理"（当然并非所有的地方都这么称呼）、开立方根的算术都曾被许多不同的古代文明发现过。

然而，同样你也可以为"创造"的观点来论证。首先，有一个纯主观的论证：数学家通常感觉到他们创造了一些属于他们的东西。其次，不同的数学家由其个人品味与经验研究那些如此不同的问题，从而得到如此不同的成果，以至于在许多情形，数学家可以根据其数学定理来识别。同样的，不同的文明有时会采取完全不同的数学路线，最终产生其独有的特殊类型的数学。例如，希腊人创造并强调了证明的观念，而经常做出相同发现的中国人往往将他们的结果表述为算法或计算口诀的形式。作为另一个例子，我们可以提及埃及人，像其他古代文明一样，他们发展起有理数（分数）的计算——这可以应用于经济、测量、天文等领域，但是以一种非常奇特的方式：不是将分数写成分子与分母的商，他们只允许使用单位分数 $\frac{1}{n}$ 并将所有分数都表示为这种单位分数之和；更有甚者，他们只允许出现不同的分母，例如他们将 $\frac{2}{5}$ 写作 $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ 而不是 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$。

那么，数学活动究竟是发现还是创造呢？对大多数数学家而言，二者兼而有之。在任何时刻，对每一个问题，从公理和已经的结果出发，存在着大量可能的推导，恰如在围棋游戏中的每一局面可以引出许多种可能的走法一样。在某种意义下，所有这些推导"已经在那里"，但你需要不断地作出选择，正是这些不同的选择体现了数学家个人的能力、品味和性格。法国数学家古斯塔夫 • 肖盖 (Gustave Choquet) 对此有一个漂亮的说法：数学家所寻求的定理自远古以来就存在了，但为了发现它，你必须要创造出一条路径。

数学：是艺术还是科学？

一个同样古老的相关问题是，数学究竟属于艺术还是科学？同样的，两种观点都可以得到辩护。在支持"艺术"这方面，也许我们首先可以提到的事实是，数学经常出现在艺术（在艺术这个词的通常意义下）中。在建筑方面，我们只需要想一想金字塔、帕台农神殿与克里斯多佛 • 雷恩（Christopher Wren）、勒 • 柯布西耶（Le Corbusier）等建筑师设计的作品。在音乐方面，我们可以想到巴赫（Bach）、莫扎特（Mozart）和阿诺德 • 勋伯格（Arnold Schoenberg）的作品；在绘画方面，我们想到阿波切特 • 丢勒（Albrecht Dürer）或列昂纳多 • 达 • 芬奇（Leonardo da Vinci）的作品。然而，数学也有其固有的优美：我们也许可以想到五种正多面体（图 1）——这是自柏拉图（Plato）以来就知道的；或者更近一点的有美丽的分形图（图 2），想必许多读者都曾见过的。

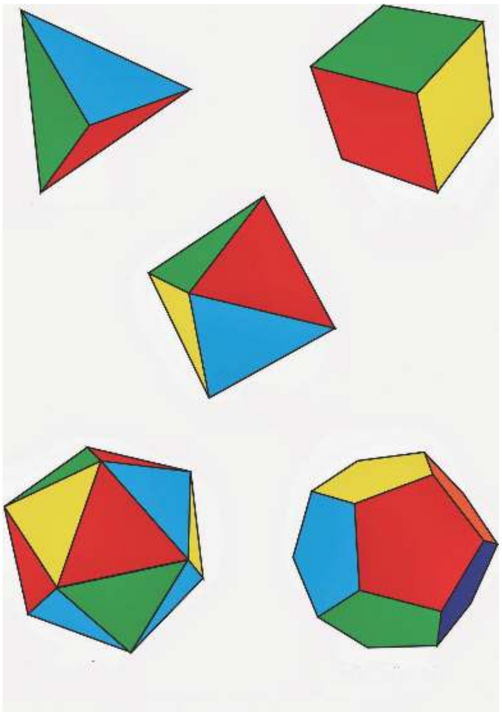

图 1 被称为柏拉图固体的正五面体

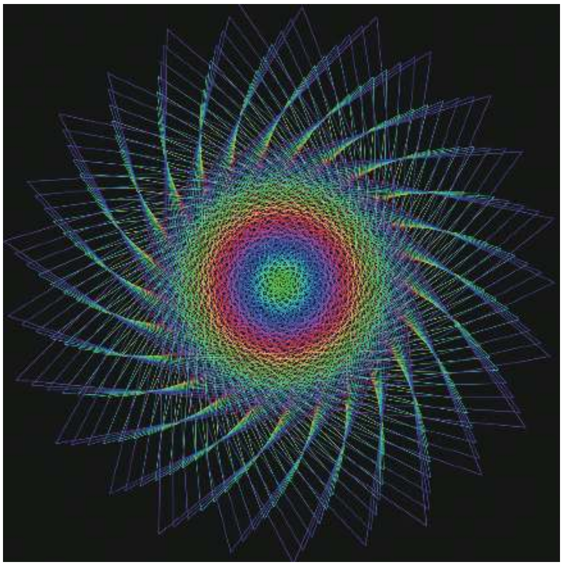

图 2 美丽的分形图

然而，当我们谈到数学的“艺术”方面时，我们很少想到数学与其它艺术之间的关系，不论这是何等的有趣，我们所想到的是，数学本身就是一门艺术。数学这门艺术中涉及的美学标准并不一定是视觉上的漂亮——虽然在柏拉图立方体和分形的例子中是如此，而是要抽象得多：精炼、简单、清晰的思想以及绝对具有说服力的论证。对非数学家而言，这些标准看来也许更像是智力上的而非美学上的，但在数学领域内工作很长一段时间的人无一不会培养起这种感觉。几乎所有的数学家都使用诸如“漂亮“和“优美”这样的词，而且事实上他们更频繁地用到这些词，而不是听起来更为科学的“正确”或“可信”。而且，更为有趣的是，对数学之美的这种感觉看来通常是引导数学家走出数学迷宫的最佳指南。艺术家根据美学标准可以作出他或她的选择（我应该写什么，我应该画什么，我应该谱什么曲子）。而科学家几乎从未有这种奢望，因为我们不能奢望大自然总是作出取悦于人类的选择，科学家必须忠于现实。数学介于两者之间：在做数学时坚持美学标准绝非必要，某个问题的正确解未必总是最漂亮的，但结果显示，在绝大多数情形，正确的数学路径正是从美学的观点来看最完美的那一条。当你想做出好的数学时，没有比找出最优美的解更好的一般策略了。

因此，数学很容易被视为一门艺术。然而，也有很令人信服的论证支撑另一个观点，即数学是一门科学。事实上，数学所具有的某种客观性很少为其它科学达到：数学的结果是有绝对保证的，因为它被证明过，而它的发现一经作出就永远不会过时——当然，后来的发展也许会引进一些新的面貌，但绝不会改变其真理。我们甚至可以说，从某种角度看，数学比其它科学更为“科学”，因为它对世界的偶然性的依赖更小。社会学和心理学依赖于当前存在的人类社会，生物学依赖于曾在地球上进化过的生物，甚至化学和物理学也依赖于我们所在的宇宙部分的自然定律；而数学，从某种角度来看，是绝对的。

当今数学

这里我只谈三个方面：当前的数学研究、数学的应用、计算机的影响。大多数人也许不知道，数学家仍然开展着许多研究，甚至会惊讶地发现，原来数学中还有许多历经了多年仍未可知的东西。事实上，每年我们都会得到成千上万个新定理，同时我们也继续解决着悬疑了几十年甚至上百年的老问题。近期的一个著名的例子是费马大定理的证明，它在 1637 年提出，直到 1995 年才被安德鲁 • 怀尔斯（Andrew Wiles）证明。这样的例子还有许多[2]。在一百多年的研究之后，终于在 1976 年找到了所谓的四色定理的一

[2] 特别的，应该提及本世纪初俄罗斯数学家格里高利 • 佩雷尔曼（Grigori Perelman）对庞加莱猜想的证明——译者注