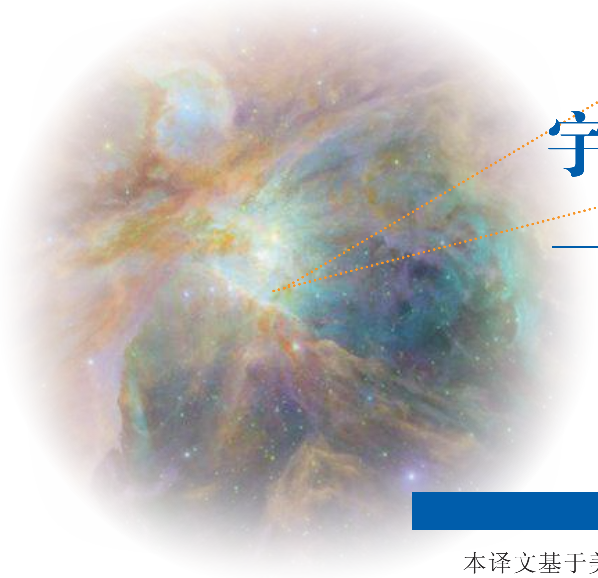

宇宙距离之梯（上）

——2010年爱因斯坦讲座公众数学演讲

Terrence Tao（陶哲轩）/ 演讲　　欧阳顺湘 / 译注

译　序

本译文基于美国数学会主办的 2010 年度爱因斯坦公众数学讲座演讲《宇宙距离之梯》(*The Cosmic Distance Ladder*)视频(时长约一小时十分钟)，演讲者为陶哲轩。同时，也参考了相应演讲幻灯片的 4.2 版以及 2013 年陶哲轩在美国数学博物馆的同名演讲视频（时长约一个半小时）。此外，译者还作了部分注释并添加了一些图片以方便部分读者能更好地理解此演讲。

陶哲轩是加州大学洛杉矶分校（UCLA）数学教授。他于 1975 年生于澳大利亚阿德莱德（Adelaide），父母均是来自中国的移民。他主要研究调和分析、偏微分方程、随机矩阵和解析数论等。他获得过许多荣誉和奖励，如 1988 年获数学奥赛金牌（最年轻的奥赛金牌选手)，2006 年获菲尔兹奖，2012 年获克拉福德奖，2014 年获首届数学突破奖。

爱因斯坦公众数学讲座（http://www.ams.org/meetings/lectures/meet-einstein-

图 1. 陶哲轩在 2010 年爱因斯坦讲座上演讲（Reed Hutchinson 摄）

lect）是美国数学会为纪念爱因斯坦的奇迹年 100 周年而创设的，从 2005 年开始，每年一度在美国数学会八个地区会议之一举行。1905 年，爱因斯坦在《物理年鉴》（*Annalen der Physik*）上发表四篇重要文章，发现了光电效应，创立了布朗运动理论、狭义相对论，得到了著名的质能方程 $E=mc^2$，因而 1905 年被称为爱因斯坦的奇迹年（annus mirabilis，拉丁语）。爱因斯坦后来移居美国，成为普林斯顿高等研究院数学部的创始成员之一。爱因斯坦讲座此前的演讲者中有阿提亚爵士（Sir Michael Atiyah）、曼德勃罗（Benoît B. Mandelbrot）、彭罗斯爵士（Sir Roger Penrose）等著名数学家。戴森（Freeman Dyson）著名的演讲稿《飞鸟和青蛙》（*Birds and Frogs*）也曾是为 2008 年度爱因斯坦讲座准备的，只是当年的演讲因故被取消。

2010 年度的爱因斯坦公众数学讲座作为美国数学会西部地区秋季会议的邀请演讲，于当年 10 月 9 日在陶哲轩任教的 UCLA 举行。此次演讲盛况空前。不但在演讲大厅挤满了近 900 名听众，另有许多人在备用房间观看。此外，室外还设置了超大屏幕进行直播。

据陶哲轩的博客文章介绍，自 2006 年起，除了上述爱因斯坦讲座，他多次演讲过该主题，例如：2006 年在澳大利亚数学所，2007 年在 UCLA 的 Pi Mu Epsilon 协会，2009 年澳大利亚 Clay-Mahler Lectures，2010 年在斯坦福大学。此外，虽然陶哲轩没有在博客上提及，他实际上在近年来仍以此主题做过一些公众演讲。如 2013 年 8 月 7 日和 19 日就分别在位于纽约市 2012 年建立的美国数学博物馆（National Museum of Mathematics）和新西兰的奥克兰大学演讲过该题目。

陶哲轩在 2010 年完成爱因斯坦讲座公众演讲后撰写的博客中，说多年打磨（可谓“五年磨一剑”）同一个演讲很有教育意义，也很值。他放在博客上的演讲演示文稿就有多个版本（最新可获得的版本为 4.2 版），比较之前的版本，从内容到形式，都有很大的改进。读者甚至可以注意到，2013 年的演讲还纠正了 4.2 版中的一个计算上的小误写（参后文）。

人们对天象、天体的观测兴趣有着长久的传统。中国古代即有“奔月”传说，也有“辩日”的故事，还曾“问天”。宇宙距离之梯就是一个热门话题，能找到不少资料。维基百科上也有题为“Cosmic Distance Ladder”的条目（相应中文条目题为“宇宙距离尺度”），读者可以参考。但陶哲轩的此演讲通俗易懂，内容简洁又弘大，包含了很多有趣的思想，不同一般。

在此演讲中，陶哲轩介绍了天文学家是如何聪明地利用数学知识和观察，间接地进行天体距离测量的。宇宙距离的测量，犹如攀登楼梯，每一阶距离的测量，都是下一阶距离的测量的基础。此阶梯开始于古希腊：他们利用简单的三角形知识，测量了地球、太阳和月球的大小以及相对位置。但直到约 1700 年之后，因为哥白尼、第谷和开普勒等的努力，才确立了日心说，测量了地球到各行星的距离。至近现代，则通过发现距离与恒星的颜色、亮度、周期以及退行速度等的关系，以及建立大爆炸理论等，测量了到临近恒星、银河系、河外星系乃至整个可观测到的宇宙的距离。

梁启超论述史学时，称史学作为一门学科出现很晚的原因在于史学需要材料的累积，并举例说，天文学因为需要的材料很少，所以容易很早就出现。通过陶哲轩的此演讲，确实可以感到，在距离阶梯的最初阶段，古希腊人仅仅使用简单的三角学知识以及一些观察，似乎很轻易地就测量出了地球半径、地月距离、日地距离等；越到后面，所需材料，包括数据和技术，就越多，也就越不简单了。

然而，古希腊人能够取得这些成就不是偶然的。他们不但有对天象的详细观察，也有了长久的在地球上进行测量的基础。古希腊米利都的泰勒斯（Thales of Miletus, 约公元前 624 年 - 前 546 年）就知道利用金字塔的阴影计算其高度。另一个著名的例子是约公元前 530 年挖成的尤帕林纳斯（Eupalinos）隧道。尤帕林纳斯是希腊工程师，他受命在萨摩斯岛向当时该岛的首都（今日毕达哥利翁，Pythagoreion）修一条长秘密引水水道，以避免在战时被敌军发现而遭切断。水道途中要经过卡斯楚山（Kastro），必须开挖隧道。

为了加快速度，考虑从山的两侧同时开工。问题是如何确定开挖地点和方向以保证两方隧道能相逢，且隧道总长度尽量短。这里就需要用到三角学知识。最终经过约 10 年时间的建设，挖出了一条长 1036 米的隧道，使用了上千年。

在这里，值得补充下三角形知识的应用对数学教育的启示。伽利略曾说，自然这一巨著由数学语言书写而成，其中的主角是三角形、圆以及其他几何形状。波利亚在《科学中的数学方法》（*Mathematical Methods in Science*, 1963 年）一书中，在介绍了三角形知识在天体测量中的应用之后，讨论到，如果没有三角形知识，我们就要将时针拨回到远古的黑暗时代；应该通过介绍三角形在测量中的作用，使学生就如对棒球、电视和邻家女孩等感兴趣一样对三角形知识的学习感兴趣。

图 2. 尤帕林纳斯隧道（维基百科）

从数学在天体测量的应用中可以深切地认识到，数学在人类文明进程中所发挥的重要作用。反过来，无须说，天文学的发展也促进了数学的发展。1942 年，爱因斯坦在纪念牛顿诞辰 300 周年的文章中写道："那些为天才继续发展所不可缺少的工具，主要来自于对星空的观察。"

可以想象，天文学与数学的密切联系，是作为数学家的陶哲轩对宇宙距离之梯有兴趣的一个主要原因。2013 年陶哲轩在美国数学博物馆的同名演讲中，曾做过解释。他说自己并不从事天体测量的研究，不过他小时候曾是天文兴趣小组的成员，了解到一些天文知识，但只是直到后来，才知道背后的数学。

陶哲轩是一位勤奋、多产的优质博客作者。他的个人博客（http://terrytao.wordpress.com/）是众多数学爱好者乃至数学家的数学教室。例如，此次演讲主持人，时为美国数学会副主席的 Frank Morgan，在介绍陶哲轩时说，按照他的观点，陶哲轩的博客是因特网上最好的网站，他现在每天都去看。译者也是在多年前通过陶哲轩的博客注意到此演讲，然而一直没见（等）到此演讲以文章形式出现。译者现勉力根据视频整理成文，与读者共享，并且向读者推荐此演讲。相信不少读者在听或"看"完

图 3. 2010 年爱因斯坦讲座时陶哲轩（中）、陶哲轩的儿子与 Frank Morgan 合影（Reed Hutchinson 摄）

此演讲后，会与我一样有不少收获。

相关网络资源列在下面：

美国数学会 2010 年度爱因斯坦公众数学演讲官方网页：

http://www.ams.org/meetings/lectures/einstein-2010.

陶哲轩有关该演讲的三篇博客：

http://terrytao.wordpress.com/2010/10/10/the-cosmic-distance-ladder-ver-4-1/;

http://terrytao.wordpress.com/2009/09/03/the-cosmic-distance-ladder-2/;

http://terrytao.wordpress.com/2007/05/31/the-cosmic-distance-ladder/.

2010 年在爱因斯坦讲座上的演讲视频：

http://www.youtube.com/watch?v=7ne0GArfeMs（Youtube）;

http://v.youku.com/v_show/id_XMjE4NTE0NjQw.html（优酷）.

2013 年在美国数学博物馆的演讲视频：

http://www.youtube.com/watch?v=kY1gfrhNUIg（Youtube）.

演讲所用演示文稿（4.2 版本，2010 年）：

http://terrytao.files.wordpress.com/2010/10/cosmic-distance-ladder2.pptx.

前　言

我很荣幸作这次爱因斯坦讲座，这不仅是因为此系列讲座之前的几位杰出演讲者，也是因为爱因斯坦本人。爱因斯坦是一位伟大的传奇科学家，做了许多伟大的工作。但即便伟大如爱因斯坦，他也不是在虚空上工作。他所做的事情也是基于许许多多前人的工作。他是宏大的科学故事中的一份子。

今天我们要介绍的是众多科学故事中的一个——宇宙距离之梯。这实际上是我最

喜欢的故事。它和数学、物理以及历史上的天文学有关。这个故事很长，已有两千多年的历史，并且仍在发展，远未结束。大家也许在学校里，从教材中或通过网络，已经了解过了这个故事中的某些部分，但你们可能很少有机会系统地看到整个故事。

我今天想要传达的就是，科学不是孤立的事实的集合，而是一个大故事中的一部分。我今天要讲的就是一个很好的例子。

天体测量

宇宙距离之梯是天体测量的基础。什么是天体测量呢？天体测量是天文学的一个主要研究子科目，是研究如太阳、月球、行星和恒星等天体的位置与运动的科学。我们想知道天体在哪里，又将要去哪里。

天体测量学中的典型问题有：

1. 地球到月球有多远？
2. 地球到太阳有多远？
3. 太阳到其他行星有多远？
4. 太阳到临近恒星有多远？
5. 太阳到远方恒星有多远？

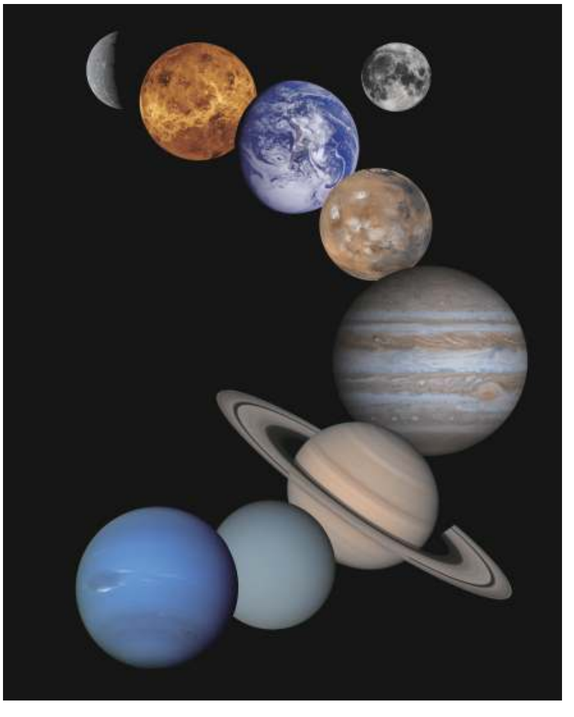

图 4. 太阳系（NASA/JPL）

今天，要回答这些问题非常容易，我们只要去查查维基百科就可以了（观众笑声）。维基百科从天文学家那里获得这些知识，天文学家又是从哪里得到答案的呢？

天体测量中的距离太过遥远，不可能拿着尺子或其他什么东西去直接测量。然而，天文学家找到了许多聪明的方法来间接测量。例如，我们没法直接测量到两星系的距离 D_1 和 D_2，但我们能够知道它们的比，通过测量星系的红移算出星体的退行速度，然后

根据后面将介绍的哈勃定律，就可得到星系距离之比：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= HD_1 \\ v_2 &= HD_2 \\ \frac{v_1}{v_2} &= 3.4 \pm 0.1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{D_1}{D_2} = 3.4 \pm 0.1.$$

我们有许多方法来测量距离之比，借助一个距离来表示另一个距离。这些方法常常更多地依赖于数学方法，而非技术手段。很多时候，所用到的数学很简单。当然，有时候也要用到很高深的数学。

间接方法的特点就是利用到不那么远的天体的较小距离去控制到遥远的天体的大

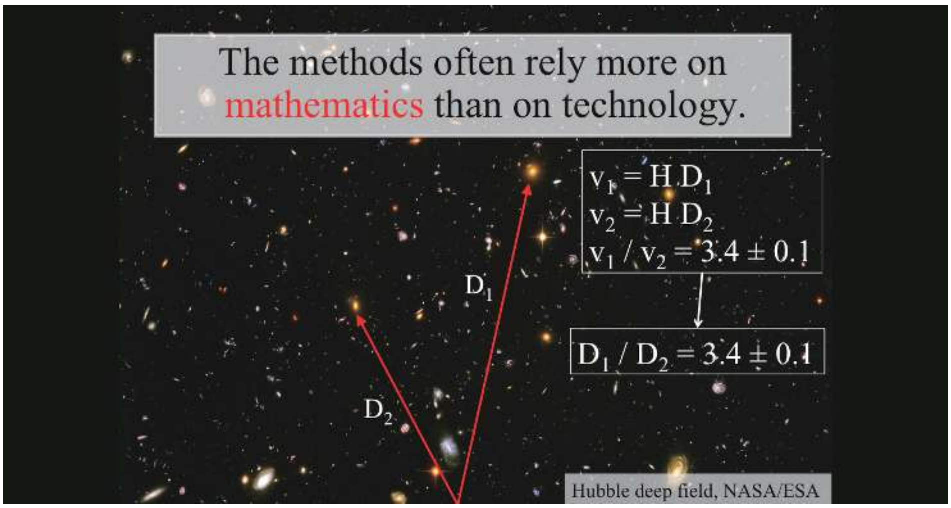

图 5. 遥远星系离我们远去的速度（V，即后文提到的退行速度）与它们离开我们的距离（D）成正比（$V = HD$，H 为哈勃常数），因此测得的速度比为距离之比

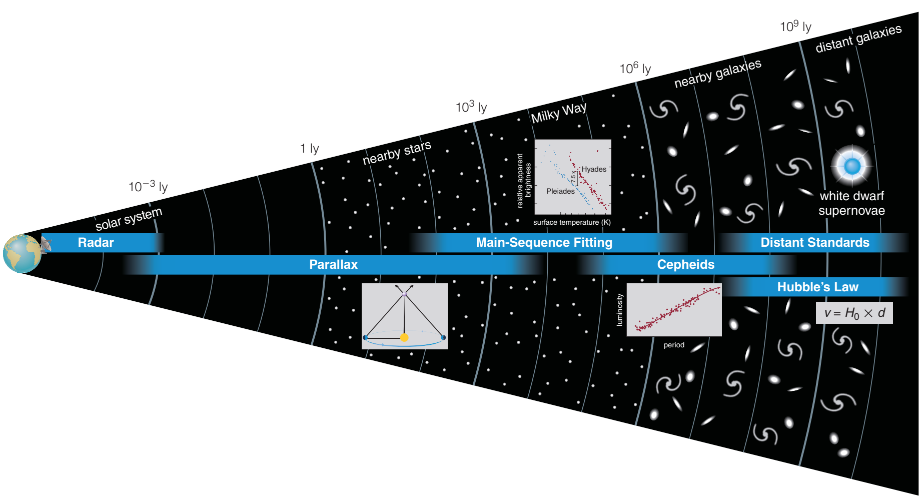

图 6. 宇宙距离之梯（图片来自 Bennett 等著的 *The Essential Cosmic Perspective*，原书对该图片的注释：宇宙距离的测量依赖于一条相互关联着的技术之链。此链从雷达范围开始，可以确定太阳系内的距离，继而要用到视差法和标准烛光技术。这些技术可以用于校准哈勃定律，反过来哈勃定律又能帮助我们估计到整个可观测宇宙中的星系的距离）

距离，而小距离则用更小的距离来控制，依此方法，不断缩小距离，直至最终达到可以直接测量的距离。由此，我们得到梯状结构的距离，梯状结构的比例。把它们放到一起，就可以得到宇宙距离。这就是我们测量整个宇宙的方法。

讲座中我们要做的就是攀爬这个宇宙距离之梯。按照历史的发展，我先从地球这一最基本的阶梯开始，直至月球、太阳和行星等等。我们将看到每一阶的距离是如何测量的，它又是如何基于前面那一阶的距离测量的。

第一阶　地球

现在我们已经知道地球近似球形，赤道半径为 6 378 千米（3 963 英里），极半径为 6 356 千米（3 949 英里）。赤道半径要比极半径稍宽。这些数值已被包括现代卫星在内的各种方法验证到极高的精度。只要想想我们有精确到每平方英寸的地图就可以了。但是，假如我们没有如宇航、航空和航海等现代先进技术，甚至也没有望远镜和六分仪这样的工具，我们还能计算出地球的半径吗？甚或更基本地，我们还能判断出地球是圆球吗？

答案是肯定的。我们不但能推断出地球是圆球，还能获得它的大小。这是由两千多年前的古希腊人得出的。我们所需要的仅是一点点几何知识。

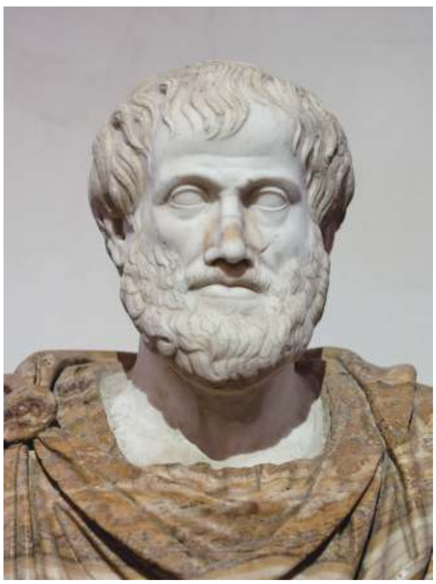

图 7. 亚里士多德
（公元前 384-公元前 322，维基百科）

历史上第一位论证地球是圆球的人是两千三百多年前的亚里士多德（Aristotle）。他通过对月球的观察，令人信服地间接说明了地球是圆球状的。

我们将要讨论的方法几乎都是间接的。间接方法意味着我们不是直接考察要研究的对象。所以要研究地球，我们就不能仅仅盯着地面，否则所见到的都是平的，而是要借助于另外的对象。在考虑地球形状这种情形，亚里士多德用的是月球。

亚里士多德是怎样做的呢？他用到月食（lunar eclipse）。在本演讲中，我们将反复用到各种“食（eclipse）”。各种“食”对天文学家极其有用。

亚里士多德知道月食是当月球和太阳位于地球的两边，在黄道平面上月球恰好（相对应地球）位于背对着太阳的方向时才发生。他推断这是因为月球落入了地球的阴影（地影）中。同时，观察月食，会发现，无论在什么位置，什么方向，也无论是哪一部分的月食，所见到的地球在月球上的影子总是圆弧。这意味着，地球的每一个阴影都必定是圆。为此，圆球是地球唯一可能的形状。这是地球是圆球的正确解释。例如，假设地球是一个平坦的圆盘，所见到的月食就不是我们所见到的样子。亚里士多德的解释是证明地球是圆球的最简单的证明之一。

我们之前说古希腊人没有任何技术并不完全准确——他们可以旅行，例如从埃及稍作远行到希腊。亚里士多德知道，有的星座在埃及能看到，但旅行到希腊后却看不到了。实际上埃及到希腊并不很远。他认为从埃及到希腊这样相对短的距离间，仍有这样的现象，正是源于地球的弯曲性质，使所能见到的星座有所变化。同时，因为不远的距离即能察觉到弯曲，地球的半径必是有限的。然而，可惜的是，虽然他的论述是正确的，但