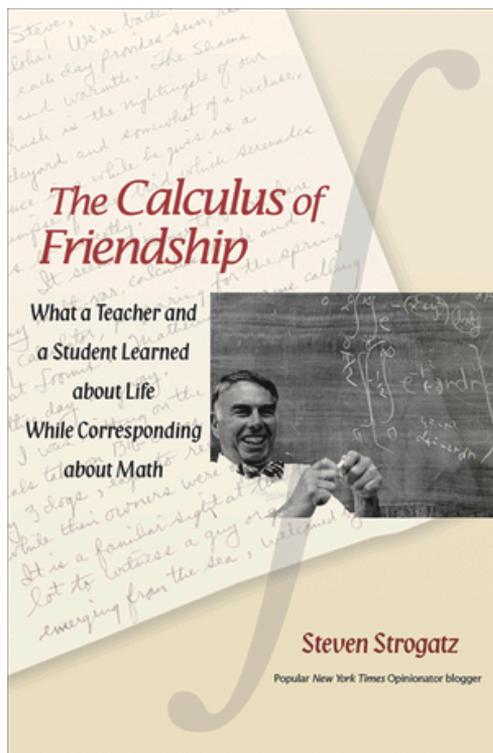


## 友谊之微积分

万精油



上班路上听 PBS (美国公共电台), 突然听到有人讲数学。PBS 经常采访名人, 但大多数都是政治家、作家、电影明星等等。偶尔采访学术界人士, 都是应用性比较强的科目, 比如生物、化学等等。采访数学家是很稀奇的事。上次听见采访数学家已经是十几年前的事了。当时也是开车上班路上, 打开 PBS, 还没听清楚采访的主题是什么, 只是觉得声音很熟悉。后来发现是我的博士指导老师, 刚得了面向全世界的日本科技奖。这次采访的数学家是 Steve Strogatz。

Steve Strogatz 是著名数学家, 美国康奈尔大学数学教授, 专长是动力体系研究。采访他的原因是他写了一本书, 书名就是我们这篇文章的题目《友谊之微积分》(The Calculus of Friendship)。他高中毕业后一直与教他微积分的数学老师 (Mr. Joffray) 保持联系。当了知名数学教授后也继续通信。这本书就是以这些通信为主线,

讲他与老师的友谊、人生、趣味数学问题、教育等等。

大多数信的开头一般是简短介绍他的学习情况, 未来的展望, 甚至评论他的新教授, 然后很快转入数学内容。一道趣味题目的新解法, 或者他学到的新的有趣的东西。比如, 他读书的时候, 他的同班另一个数学天才自己推导出斐波那契数列的通项公式 (见下)。他的老师为此赞叹不绝, 随时都在讲。后来 Strogatz 学到了线性算子中的平移算子 (Shift Operator), 可以统一解决这类级数的通项问题。他很激动, 在信中详细介绍这个算子的应用并举例推导出斐波那契级数的通项公式:

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

其中

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887 \dots$$

很容易验证, 在上面的通项式中代入  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ , 我们得到斐波那契级数的前 5 项 1, 1, 2, 3, 5。

他的信包含了很多类似的趣味数学问题与方法。比如黄金分割、最速降线、不动点定理、混沌中的分叉 (bifurcation)、非线性震荡, 甚至椭圆积分等等。在读故事的同时, 能学到不少知识。喜欢数学的人一定会喜爱这本书。

除了这些数学内容以外, 我认为这本书讲到的一个最重要的东西是教育。这也是我这篇文章主要想讲的问题。

中国的数学教育是不是很成功? 有人说很成功, 国际奥数常常拿金牌, 拿第一。大量的中国留学生到国外学习, 数学考试也总是名列前茅。也有人说不成功, 说中国教育出来的学生只会考试, 但没有创造能力。说成功也好, 不成功也好, 都不能一概而论。但有一点必须指出, 中国的老师 (初中、高中, 甚至大学) 比较注重填鸭式地灌知识, 知识教出去了, 学生记住了, 任务就完成了。但是, 不是很注重开发学生的能力和动力。学生学得很被动, 也学得很辛苦。所以会出现学生毕业时全校扔书、撕书的现象, 说是终于不用受苦了。如果能开发学生的兴趣, 使他们能自愿地学习, 那么, 学习不但不辛苦, 反倒趣味无穷, 也会学得更好。更不会出现集体撕书的现象。

Mr. Joffray 的教育方法完全不是填鸭式的, 而是启发、引导式的。经常带学生到教室以外, 用现实生活中的例子引导学生思考数学问题。到农场时他给学生们出了一道羊吃草的问题。说是一只羊被拴在树上, 转圈吃草, 绳子一圈圈绕在树上越来越短, 问这只羊的轨迹。Strogatz 自己推出了羊的轨迹公式, 并做了延拓。可是有个延拓的问题他一直找不到答案, 困惑他很久。直到大学以后他才知道那个微分方程没有解析解。并且发现有解析解的微分方程只是微分方程中很小很小的一部分。他专门为此给老师写了一封信。Mr. Joffray 只是用一道题目让他们对此问题产生兴趣, 后来的一切发展来源于 Strogatz 自身被唤起的兴趣和动力。Mr. Joffray 引导式教学的另一个例子是, 他在微积分课程上给高中生讲  $\epsilon$ - $\delta$  语言。他并不指望学生们能马上听懂。而是告诉他们, 听不懂没有关系, 如果以后你还要在别处学数学的话, 这个  $\epsilon$ - $\delta$  还会在别处出现很多次。听 4、5 遍你就能听懂了。这个  $\epsilon$ - $\delta$  是学数学的一道关。很多人在大学学数学分析的时候过不了这个关, 甚至大学数学系毕业也没有搞懂它的也大有人在。先引入这个概念, 下次再接触的时候就会更加重视、仔细。一般的老师 (包括中国的大部分高中老师) 是不会有这种长远考虑的。把现在需要学到的知识灌输完就算完成任务。

我个人认为, 初等教育 (甚至大学教育) 中最重要任务是唤起兴趣, 有了兴趣之后, 绝大部分知识都是可以通过读书自学的, 老师只需要答疑, 而不需要每个细节都面面俱到地讲。

I HAVE NO SPECIAL  
TALENTS. I AM ONLY  
PASSIONATELY  
CURIOUS.  
-ALBERT EINSTEIN

兴趣的重要性不光是对数学, 对其它科目也同样重要, 甚至对业余爱好也很适用。你可以强迫一个人练钢琴, 考过 8 级。但如果他 / 她没有兴趣, 他 / 她最多是一个钢琴匠, 永远不能成为大师。

兴趣驱动好奇, 好奇驱动学习和深研。好奇在科研工作中至关重要。前几天看到一句英文,