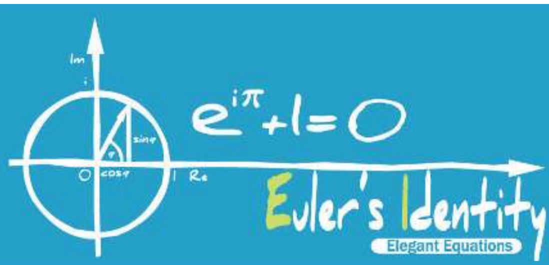

从欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ 谈起[1]
——π、e、i 符号的演变与确立

邓真峥　张 红　陈 华

欧拉公式 $e^{i\pi}+1=0$ 被德国数学家克莱因（Felix Klein）称为“整个数学中最卓越的公式之一”。其漂亮之处在于将 0、1（来自算术），π（来自几何），e（来自分析学），i（来自代数）这五个数以及加法、乘法、指数运算这 3 种重要的数学运算巧妙的结合在一起。公式中两个最著名的超越数结伴而行，实数和虚数熔于一炉，这真是数学乃至科学中的一首美妙绝伦的诗篇。人们经常把它与爱因斯坦的 $E=mc^2$ 并列为数学和物理学公式中的双子星。从欧拉公式可以看出人类创造的数学的奇异美，因此研究公式中 π、e、i 三个数学符号的历史演变与确立就显得非常有趣和重要了。

数学符号是数学抽象的基础，是数学科学专门使用的特殊符号。德国数学家克莱因曾说：“符号常常比发明它们的数学家更难推理。”由此可见数学符号的重要性。在中学数学中数学符号也是教学的核心部分，其中 π、e、i 是常见的三个符号。圆周率 π 在小学数学中就已经出现了，对于圆周率的历史，包括阿基米德、刘徽、祖冲之研究圆周率的故事多少有所涉及。不仅如此，在高中教材（人教 A 版）必修三中也有圆周率的描述，并叙述了刘徽“割圆术”的相关内容，而且把“割圆术”编写为计算机程序。自然对数底 e、虚数 i 在高中首次出现，基本上只讲述了数 e 是一个无理数，$e=2.71828\cdots$；i 是由二次方程 $x^2+1=0$ 的根引入。但学生对 π、e、i 的定义、符号的演变与确立等知识都不太了解。因此，研究 π、e、i 三个数学符号的历史演变与确立有一定的价值。这不仅能为教师教学提供素材，对学生学习圆周率、自然对数、虚数等知识也有一定作用。

1 圆周率的命名及其符号的确立

中国历史上，对圆周率的命名不统一。在古代，都称圆周率为古率，其值被认为是 3。如我国公元前一世纪的古书《周髀算经》中有“周三径一”的记载。之后，西汉的刘歆为王莽作斛，由其容量推算出圆周率值为 3.1547，至此，圆周率被称为歆率。[2]

[1] 本文得到了国家自然科学基金项目“数学符号的演变与传播研究”（项目编号：11471232）的资助。
[2] 李迪．中国数学史简编．沈阳：辽宁人民出版社，1984:80-83.

东汉张衡在研究天文学计算周天和地广时得到圆周率近似值为$\frac{92}{29}$，圆周率又被命名为衡率。[3] 三国时代的魏国，数学家刘徽提出“割圆术”（以圆内接正多边形无限逼近圆），求出圆周率的近似值为3.1416，被后人誉为“徽率”。东晋时期，何承天在计算周天度数时，运用调日法得圆周率约为3.1428。南北朝科学家祖冲之通过他成千上百次的运算，选用两个简单的分数约率$\frac{22}{7}$和密率$\frac{355}{113}$，最终求出圆周率是在3.1415926与3.1415927之间的数字。日本数学家三上义夫建议将$\frac{355}{113}$叫做“祖率”以示纪念。[4]

由此可见，中国历史上，圆周率的表示名称并不固定。

国外历史上有关圆周率值的记载可追溯到古代埃及的《莱茵德纸草书》，书中记载有“直径为9的圆面积等于边长为8的正方形面积”，据此得圆周率值为3.16049。[5] 据1936年出土的苏萨泥板用楔形文字记载，古巴比伦所用的圆周率值也是3.16049。古印度时期，在《吠陀经》中记载：“已知正方形神坛，求作一圆坛，使其面积与正方形相等。”在此所得到的圆周率值为3.0883。[6] 公元前240年，被称为“数学之神”的阿基米德用圆的外接与内切正多边形去逼近圆周，得圆周率值为3.14。公元前150年左右，希腊天文学家托勒密制作了一张弦表，以半径的$\frac{1}{60}$作为长度单位，每一单位分为60分，每一分又分为50秒，算出圆周率值为377/120=3.14166667…。[7] 印度数学家拉马努金（Ramanujan）利用下式计算过圆周率值为

$$(9^2+\frac{19^2}{22})^{\frac{1}{4}}=3.14159265258。$$

在日本圆周率的值总是3.2，但渐渐地使用3.16的人多起来，后来又使用了$\frac{22}{7}$、$\frac{157}{50}$、$\frac{355}{113}$等。[8]

16世纪以前，圆周率并无固定的名称和符号。有的是以创作者命名，如：徽率、祖率、鲁道夫数等。17世纪以后，圆周率的符号出现了。

公元1647年，英国数学家奥特雷德（William Oughtred）首次创用符号“$\frac{\pi}{\delta}$”表示圆周率。英国数学家牛顿的导师艾萨克•巴罗（ Isaac Barrow）也在“圆的周长”意义上使用了符号π。1706年，英国数学家琼斯（William Jones）发表《新数学引论》，首次使用符号“π”表示圆周率，但这一简明的记号在当时却未得到推广应用。1736年，瑞士数学家欧拉提倡用π表示圆周率，从此符号“π”便在全世界风行，成为国际通用的符号。

在我国，清末的数学家李善兰在1859年发表的《代微积拾级》里用“周”字代表π，而在《代数备旨》里用“门”表示π。直到20世纪初，我国数学书由直排改为横排，圆周率才统一地以π表示。如《初级混合算学》中说：“圆周与直径之比，平常表示以π。”

[3] 孙炽甫．中国古代数学家关于圆周率的研究。数学通报，1955，(5).

[4] 徐品方，张红．数学符号史。北京：科学出版社，2006:295-302.

[5] Chris Rycroft.The life of pi.SPAMS,Fall, 2005.

[6] 掘场芳数著，朴玉芬译．π的奥妙。北京：科学技术出版社，1998.

[7] 张晓贵．圆周率计算的四个时期。辽宁教育学院学报，2000,17（5）:66-69.

[8] 魏晓妮．历史上对圆周率的探索。山西：山西师范大学，2013.

2 e 的命名、定义及其符号的确立

从历史上来看，e 的出现要比 π 晚很多。π 的历史可追溯到公元前 200 多年，而 e 的出现则在 17 世纪。

英国数学家奥特雷德发明的自然对数是历史上第一件与 e 有关的事。但当时人们并不知自然对数的底是 e。1683 年，雅可布 • 伯努利在研究复利时，证明了当 $n\to\infty$ 时，数列 $\{(1+{}^1/n)^n\}$ 有极限，并证明极限介于 2~3 之间，这个极限值就是数 e。[9] 数 e 就这样出现了。

1690 年，在莱布尼茨给惠更斯的信中数 e 第一次被正式提出，然而其被记为 b，而非 e。1727 年，欧拉第一次引入 e 作为自然对数的底，并将 e 定义为 $\{(1+{}^1/n)^n\}$ 的极限。正因如此，e 也叫做欧拉数。1731 年，符号 e 在欧拉写给哥德巴赫的一封信中再次出现。这篇手稿在 100 多年后的 1862 年才正式发表。之后出版的《力学》第一卷及其他文章中也如此表示。[10]

19 世纪，我国曾用特殊符号表示自然对数的底。1859 年，李善兰翻译的《代数学》卷首用"訥"代表自然对数的底。1873 年，华蘅芳翻译《代数术》时用"戊"表示自然对数的底，这显然与当时以"甲乙丙丁戊"译"ABCDE"有关，以"戊"字译"e"。后来，数学书用横排与西文方式，就采用了 e。

可能许多人只知道 e 是作为数列 $\{(1+{}^1/n)^n\}$ 的极限来定义的，但是 e 还有另外几种定义。

（1）e 在数轴上的定义

已知 $F(t)=(1+1/t)^{t+1}$ 是递减函数，$f(t)=(1+1/t)^t$ 是递增函数，且 $F(t)\geq f(t)$（当 $t\to\infty$ 时，"$\geq$" 取 "$=$"）。假设当时间为 t 时，数轴上与 0 点的距离分别为 $f(t)$ 和 $F(t)$ 的动点 p 和 P，从 $t=1$ 时开始，随 t 的增加同时移动：p 由 2 向右移动，P 由 4 向左移动。那么，当 $t\to\infty$ 时，p 和 P 相交，这个交点到数轴 0 点的距离就是 e。

（2）e 的极限定义

在前面已经谈到雅可布 • 伯努利与欧拉都将 e 定义为极限，即 $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+{}^1/n)^n$。因为数列 $\{(1+{}^1/n)^n\}$ 是递增且有上界的，所以它的极限存在。此后，许多数学家通过这一定义求得 $e\approx 2.71828182845905$。

（3）e 的级数收敛定义

利用二项式定理展开，有

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}(\frac{1}{n})^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3+\cdots+(\frac{1}{n})^n \\
&= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1-1/n}{2!}+\frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!}+\cdots+\frac{(1-1/n)(1-2/n)\cdots(1-(n-1)/n)}{n!}.
\end{aligned}
$$

[9] 李忠 . 数 e 来龙去脉 . 数学通报，2008, 47（5）:1-4.

[10] 桂德怀 . 数 e 探源 . 湖州师范学院学报，2003, 25（6）:116-119.

此级数关于 n 一致收敛，对 $n\to+\infty$ 逐项取极限，就得到

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

也就是 e 的级数收敛定义：

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots$$

此式是牛顿于 1665 年最早得到的。[11] 这里，e 虽然是个无理数，但却用有理数表示出来。这也说明有限个有理数的和必为有理数，但无限个有理数之和不一定为有理数。

（4）e 的几何定义

在等边双曲线 $xy=1$ 中，以 $x=1$ 为始边的曲边梯形，当它的面积为 1 时的点的横坐标，就是数 e。也就是说，$\int_1^e\frac{1}{x}dx=1$。此式由比利时的乔治 • 圣 • 文森特（George St. Vincent）发现。

3 虚数符号的历史演变与确立

虚数历史的真正开端是 16 世纪。此前，负数开平方被认为是一个不可能的问题。第一个遇到虚数的人是 12 世纪印度数学家婆什迦罗（Bhāskara），他认为 $x^2=-1$ 没有意义，即认为$\sqrt{-1}$ 无意义。13 世纪意大利数学家斐波纳契（Leonardo Fibonacci）、15 世纪意大利数学家帕西奥利（Luca Pacioli）和法国数学家许凯（Nicolas Chuquet）在讨论一元二次方程的根时，都遇到了判别式小于 0（$\triangle<0$）的情形。[12] 如：1484 年，许凯在《算术三篇》（*Triparty en la science des nombres*）中解二次方程 $x^2-3x+4=0$ 的过程中，得到

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4},$$

因上面根号里的数是负数，他认为不可能得到方程的解，因此虚数这一概念被其否定了。

到了 16 世纪，1545 年，意大利数学家卡尔达诺（Girolamo Cardano）在其著作《大术》（*Ars Magna*）中记载了形同今式：$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$ 的运算。这是数学书上首次出现的虚数表示法，宣告了虚数的诞生。然而虚数符号 i 在此并未出现。意大利数学家邦贝利（Rafael Bombelli）在其 1572 年出版的《代数学》（*L'Algebra*）中解三次方程 $x^3=7x+6$ 时，让虚根加入数的运算家族。他还创造符号 R[Om9] 表示虚数$\sqrt{-9}$，但这一虚数符号并未被后人采用。

虽然虚数已经诞生，但欧洲却一直在承认与否认之间徘徊。17 世纪荷兰数学家吉拉德（Albert Girard）在 1629 年引入符号$\sqrt{-1}$ 表示虚数，其观点较先进，承认虚数，给出记号，但也未真正认清虚数的意义。

1637 年，虚数符号 i 诞生了。这首先要归功于法国数学家笛卡尔，他用法文“imaginaires”的第一个字母 i 表示虚数$\sqrt{-1}$，不过当时并未引起人们的注意。1777 年 5 月 5 日，欧拉首

[11] 李大潜 . 漫话 *e*. 北京：高等教育出版社，2011:32.

[12] 赵瑶瑶 . 复数的历史与教学 . 上海：华东师范大学，2007.