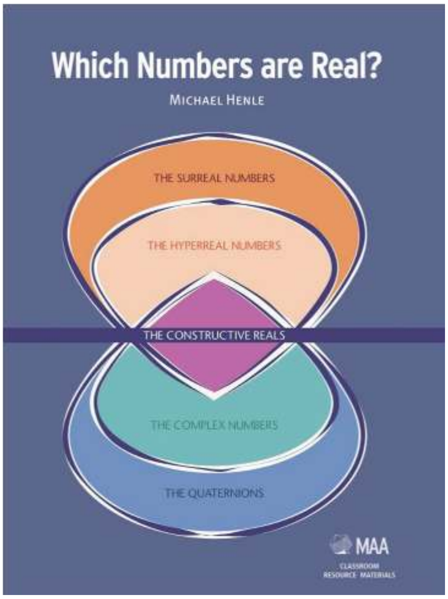
好书推荐

《什么数是实数？》书评

单治超

编者按：北京大学附属中学的单治超老师向我们推荐了 Michael Henle 所著的 *Which Numbers are real* 一书，并对该书做了提纲挈领式的介绍。令我们稍感惊奇的是，他将这本书作为阅读作业也推荐给了他的学生们，学生在阅读本书的基础上完成了阅读报告。鼓励中学生参与《数学文化》一直是本刊的宗旨之一，因此我们也收录了包亦乔同学的《阅读报告》予以刊载。单治超老师对其中的个别术语及相应措辞进行了修改，以使其更加规范。



Which Numbers are real ? 封面

数学，数学，“数”之学也。我们通常所说的数指实数。实数可以用于计数、排序和测量。为什么实数有如此神奇的功效？20 世纪初法国的布尔巴基学派提出了结构主义观点，他们认为数学研究的基本结构有三种：代数结构、拓扑结构、序结构。更复杂的数学结构无非是这三种基本结构的复合。当然，布尔巴基学派的看法并不全面。但是这种结构主义观点对于建立数学的整体性认识有重大意义[1]。

实数集具有最优美的结构。我们认为，实数集自身具备的优美结构，与其广泛的应用有密切联系；同时从纯数学角度看，更复杂数学结构的构造离不开实数集，对复杂数学结构的刻画也离不开实数集。研究更复杂的数学结构常常要构建到实数集的一个映射，然后利用实数的四则运算和大小关系刻画该复杂结构的特性。数学折腾了几千年，越来越抽象，但是也离不开相等关系和不等关系这两种最基本关系。相等关系和不等关系分别刻画代数结构和序结构。把实数集的结构搞清楚，无论对于大家学习纯数学，还是结合实际背景的应用数学，都有意义。

Henle 所著《什么数是实数？》（*Which Numbers are real ?*）[2]，就是介绍实数结构的一本好书。在 19 世纪末 20 世纪初轰轰烈烈的数学公理化运动后，数学家对“数”这一基本概念的认识发生了根本变化。所谓“数”，并非单指实数。Henle 在此书中除了介绍实数的结构外，还介绍了复数，四元数，可构造实数，超实数（hyperreal number），超现实数（surreal number）等数的结构。可构造实数，超实数，超现实数等概念有些生僻，并不为人熟知。Henle 的著作难得的把这些数的概念集中在一起加以讨论，有助于读者系统学习，加深理解“数”这一数学中最基本的概念。

当然，我们认为这本书中适合全体读者阅读的部分，是前两章关于实数的论述，和第三章关于复数的论述。在这份书评中，我们把这三章的结果加以简要

[1] 关于布尔巴基学派，请读者参考维基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki

[2] Michael Henle, Mathematical Association of America, July 27, 2012.

好书推荐

介绍，方便读者阅读本书。

数学专业的人都知道，现代数学中通常对结构相同的集合不加区分。例如 d 元有限域，n 维线性空间等概念，事实上并非单指一个集合。但是不同的 d 元有限域，或者不同的 n 维线性空间之间，存在着保持“结构”的同构，因此可以统一研究 d 元有限域，n 维线性空间的性质。

实数集是什么？《什么数是实数？》这本书的前两章集中阐述了这一论点：实数集的本质是一个序完备有序域。

定义 1（Henle 1.2 节）

如果一个集合上定义了加法和乘法，使得集合在该加法和乘法下构成环，而且该集合的加法群是交换群，去除零元后的乘法群也是交换群，加法和乘法满足分配律，就称该集合是一个域。

定义 2（Henle 1.3 节）

如果一个域 S 有一个子集 A，使得 A 中任意两个元素的和与积仍然属于 A，而且对于 S 中任意元素 a，a 属于 A，$-a$ 属于 A，$a=0$ 三者中有且仅有一个成立，那么就称 S 是一个有序域。

定义 3（Henle 1.4 节）

称一个有序域 S 是序完备（又名戴德金完备）的，如果 S 中任意非空有上界集合必然存在上确界（上确界的概念请见后文《阅读报告》的定义 7。大学课程中接触的完备性多指柯西完备，它的严格定义及与序完备的关系请见后文《阅读报告》的定义 11）。

那么序完备有序域是否存在呢？Henle 书中第二章通过戴德金分划和柯西序列两种构造方式证明了序完备有序域的存在性。

该书还证明了序完备有序域的唯一性。

定理 1（Henle 定理 2.3.3）

任意两个序完备有序域之间，存在唯一的保序域同构[3]。

这个定理说明任意两个序完备有序域的代数结构和序结构是完全一致的。因此我们可以把任意一个序完备有序域叫做实数集。实数集的任何性质，都可以从序完备有序域的定义推出。

当然，这本书没有交代实数的十进制表示定义。结合学生在中小学阶段的知识背景，实数的十进制表示定义是最容易接受的。如果某个自然数集到自然数集的映射，满足每个正整数都映到 $\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$，且不存在 n，使得任意 $m > n$ 的象都是 9，就称这个映射为正实数。类似定义 0 和负实数。可以利用实数的十进制表示定义实数的大小关系，然后证明实数集是序完备的。再定义任意实数的 n 位过剩近似值和 n 位不足近似值。对于任意两个实数，它们的 n 位不足近似值的和组成的序列一定有上界，利用完备性，它有上确界。称这个上确界为两个实数的和。类似定义两个实数的积。然后可以证明实数集是有序域。

对于实数集结构的本质认识，有助于学生理解更复杂的结构。因此有志于研读数学专业的学生，阅读此书很有意义。

本书的第三章交代了复数的概念。在 R 上二维向量空间上定义一个乘法：$(a, b)*(c, d) = (ac-bd, ad+bc)$，我们就得到复数域。

复数域的本质是什么？众所周知，复数域是实数域的代数闭域，即令任意实系数多项式可以因式分解到一次多项式的最小域。

定理 2（Henle 定理 3.3.1）

任意既是 R 上有限维线性空间又是域的集合，要么与实数域同构，要么与复数域同构。

这一定理从另一视角刻画了复数域的本质。

本书还介绍了四元数，可构造实数，超实数，超现实数等更为复杂的数的概念，这些内容对于数学爱好者也有意义。考虑到读者需要，本文不再予以详细介绍。

另及，笔者在北京大学附属中学布置本书为学生阅读作业。学生们的阅读报告对于本文的写作有所启发，在此向本文完成前提交阅读报告的同学一并致谢。他们包括：包亦乔、李超然、刘宥彤、苏可昀、项鸿薇。

以下是包亦乔同学的阅读报告。

[3] 所谓保序域同构，是指两个域之间的一一映射 f，使得任意 $x \le y$，都有 $f(x) \le f(y)$。容易证明，这与原书中的有序域同构是等价的。原书中没有说明保序域同构的唯一性，而这只需证明有序域到自身的保序域同构只有恒同映射，而这一点是显然的。