

好书推荐

《什么数是实数?》阅读报告

包亦乔

Michael Henle 所著的《什么数是实数?》一书的前两章分别介绍了实数公理化和实数的构造。该书从最基本的定义入手,逐步推进;概念环环相扣,前后呼应;同时还穿插介绍解决数学问题的方法,如数学归纳法;每一小节以习题结尾,有助于加强读者的理解。

我的这篇文章汇总了原书前两章的主要概念的定义和主要结果。当然,我并没有企图摘录全部定义和定理。可以假定读者已经掌握等价关系,等价类,域,域同构等代数学的基本概念,对它们的定义本文不再转述。希望本文能够帮助读者迅速了解原书前两章的主要框架。

如何建立一个数系

定义 1 有理数

设 Z 为整数集。在 $S = \{(x, y) \mid x, y \text{ 属于 } Z, y \text{ 不等于 } 0\}$ 上定义一个等价关系 $\sim: (a, b) \sim (c, d)$ 当且仅当 $ad = bc$ 。称每个等价类为一个有理数,并且记 (a, b) 所在的等价类为 a/b 。

定义 2 有理数集上的运算

设 $a/b, c/d$ 为两个有理数,定义 $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$, 定义 $a/b * c/d = (ac)/(bd)$ 。

这个定义是完善的 (well-defined), 就是如果 a/b 与 a'/b' 表示同一个有理数, c/d 与 c'/d' 表示同一个有理数, 那么 $a/b + c/d$ 与 $a'/b' + c'/d'$, $a/b * c/d$ 与 $a'/b' * c'/d'$ 的结果表示同一个有理数。

这一节通过等价关系给出有理数的严格定义, 这与我们在数学课本上学到的内容是吻合的, 不过更为严谨。

序公理

定义 3 称域 S 是有序域, 如果存在 S 的子集 S^+ , 使得:

- (a) 只要 a 和 b 属于 S^+ , 那么 $a + b$ 与 a 同样属于 S^+ ,
- (b) 只要 a 属于 S , 那么以下三个命题有且仅有一个为真: $a = 0$, a 属于 S^+ , 或 $-a$ 属于 S^+ 。如

果第二种情形成立, 称 a 符号为正; 如果第三种情形成立, 称 a 符号为负。(三分律)

容易证明, 有理数集 Q 是一个有序域。

定义 4 称两个有序域 S 和 T 是有序域同构的, 如果存在 S 到 T 的域同构 $i: S \rightarrow T$, 使得任意 a 属于 S^+ , 都有且 $i(a)$ 属于 T^+ 。

定义 5 不等关系

设 S 为任意有序域, 设 a, b 为 S 中的元素。定义 $a < b$ 如果 $b - a$ 为正, 定义 $a \leq b$ 如果 $b - a$ 为正, 或等于零。

定义 6 绝对值

设 S 为一个有序域, a, b 为 S 的元素。绝对值的定义如下:

$|a| = a$, 如果 a 为正或等于零; $|a| = -a$, 如果 a 为负。

绝对值 $|a - b|$ 叫做 a 与 b 之间的距离。

完备性公理

定义 7 设 S 为一个有序域。称 S 的子集 G 有上界, 如果存在 S 中元素 k 满足对 G 中任意元素 $a, a \leq k$, 并称 k 为 G 的一个上界。

称 S 中的元素 b 为 G 的上确界, 如果 b 是 G 的上界, 同时对 G 的任意上界 k , 都有 $b \leq k$ 。

定义 8 称一个有序域 S 序完备, 如果 S 的任意有上界的非空子集存在上确界。

定义 9 阿基米德性质

称一个有序域 S 是阿基米德的, 如果任给两个整数 a, b , 存在正整数 n 满足 $b < na$ 。

定义 10 极限

称一个取值于有序域 S 的数列 $\{x(n)\}$ 的极限为 b (也叫收敛到 b), 如果任给 S 中元素 k , 存在正整数 N , 使得

好书推荐

$$|x(n) - b| < k, \text{ 对于 } n > N.$$

称序列 $\{x(n)\}$ 是一个柯西序列, 如果任给 $S +$ 中元素 k , 存在正整数 M 满足

$$|x(n) - x(m)| < k, \text{ 对于 } m, n > M.$$

定义 11 称一个有序域 S 柯西完备, 如果 S 中所有的柯西序列在 S 中有极限。

定理 1. 一个有序域序完备, 当且仅当它柯西完备且有阿基米德性质。

本书的第一章在定义有理数后, 又介绍了域的概念, 逐步引入同构、有序、完备性、阿基米德的定义。学习这些概念对于建立严谨思维很有意义。书中每一小节的结尾配有大量习题, 有效地帮助读者巩固小结内容。

零序列

定义 12 一个极限为零的序列称为零序列。

定义 13 序列的等价

称两个序列 $x = \{x(n)\}$ 、 $y = \{y(n)\}$ 等价, 记作 $x \sim y$, 如果序列之差 $\{x(n) - y(n)\}$ 是一个零序列。

定义 14 (实数的柯西序列定义) 设 S 为所有有理数的柯西序列组成的集合, 实数集 R 是 S 在序列等价关系下的等价类组成的集合。

定义 15 任给 x, y 属于 R , 设 $\{x(n)\}$ 为一个属于 x 的序列, $\{y(n)\}$ 为一个属于 y 的序列。 $x + y$ 定义为 $\{x(n) + y(n)\}$ 所在的等价类, xy 是定义为 $\{x(n)y(n)\}$ 所在的等价类。

定义 16 一个由有理数组成的柯西序列 $\{x(n)\}$ 称为正的, 如果存在正整数 M 和 N 满足任意 $n > N$, $x(n) > 1/M$ 。

如果 x 属于 R , 称 x 为正的如果任意一个属于 x 的序列是正的。

定理 2 通过柯西序列构造的实数集 R 是序完备的有序域。

戴德金分割

定义 21 一个戴德金分割 (简称为一个分割) 是指有理数 Q 的一个子集 x , 满足

- x 或 x 的补集都不是空集,
- 如果 r 在 x 中, $s > r$, 那么 s 在 x 中,
- x 没有最小的元素。

实数集 R' 被定义为所有分割组成的集合。

定义 17 如果 x, y 是两个分割, 那么它们的和 $x + y$ 定义为:

$$x + y = \{r+s | r \in x, s \in y\}.$$

定义 19 称正有理数组成的集合为零分割; 称一个分割非负, 如果它是零分割的一个子集; 称它为正, 如果它是零分割的一个真子集。

定义 20 如果 x 和 y 是非负分割, 它们的乘积定义为 $xy = \{rs | r \in x, s \in y\}$ 。如果 x 是一个分割, 那么 $x, -x$ 中有且仅有一个非负。我们定义: $|x| = x$ 与 $-x$ 中非负的那个。

对于分割 x, y 我们定义:

$xy = |x||y|$, 如果 x, y 都是正的; $xy = |x||y|$, 如果 x, y 都是负的; $xy = -|x||y|$, 其他情况。

定理 3 所有序完备的有序域与 R 之间存在有序域同构。

推论: 通过柯西序列构造的实数集 R 与通过戴德金分割构造的实数集 R' 之间存在有序域同构。

第二章由有理数序列及其性质为基础, 给出了实数的两种定义方式: 柯西序列定义和戴德金分割和定义域。这部分内容与第一章内容紧密相连, 表现出严谨的逻辑性, 有助于读者更好地理解实数的概念和性质。

本书由浅入深, 不要求太多数学背景知识。开始第一章阅读基本没有障碍, 但是内容高度抽象, 定理证明有一定难度, 因此需要一定的数学成熟性。书中配有大量习题辅助读者理解, 但是这本书对于我们高中生而言, 难度仍显略大。似乎本书更适合于本科生阅读。

作者简介:

单治超, 北京大学学士、博士, 带着成为数学家的梦想选择数学专业, 但却没能最后实现, 有些遗憾。现在北大附中工作, 致力培养数学人才。