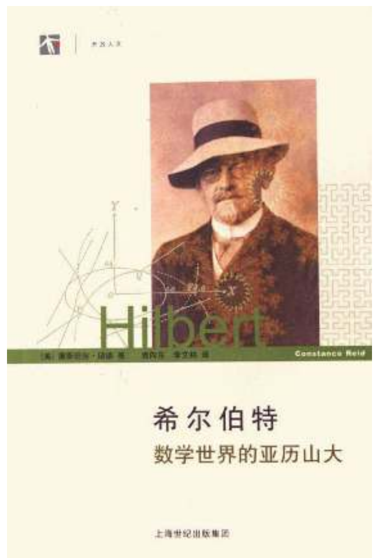
从希尔伯特的一堂课说起

柳形上

希尔伯特是个杰出的范例，在他身上显露出真正科学天才的无限创造力……我记得，我在这所大学听的第一堂数学课简直太迷人了……那正是希尔伯特讲的关于 e 和 π 的超越性的著名课程……

说上面这段话[1]的是 20 世纪最有影响力的数学家之一—— 赫尔曼 • 外尔（Hermann Weyl），他被誉为“希尔伯特的数学儿子”。

外尔是一位德国数学家。尽管他的大部分工作时间是在苏黎世和美国普林斯顿高等研究院度过的（他是普林斯顿高等研究院早期的重要成员），他仍被认为传承了以大卫 • 希尔伯特为代表的哥廷根学派的数学传统。他的研究足迹遍及纯数学和理论物理的诸多领域。当代最伟大的数学家之一，迈克尔 • 阿蒂亚爵士（Sir Michael Francis Atiyah）曾评价道，“在他开始研究一个数学题目的时候，经常发现外尔已经在他之前有所贡献…… ”



《希尔伯特》

外尔所描绘的第一堂数学课正是他在 1903-1904 年间初到哥廷根大学时听希尔伯特讲授的关于两个经典数学常数 e 和 π 的超越性的课程。

那是一个特别的年代。哥廷根的伟大数学传统自高斯、狄利克雷、黎曼、克莱布什以来，由 F. 克莱因和希尔伯特所继承。1900 年的国际数学家大会上那一场题为《数学问题》的著名演讲，让希尔伯特的声望如日中天。世界各地的年轻学者汇集到这一美丽的小城。约二十多年前由两位前辈数学家所给出的关于 e 和 π 的超越性的证明，在希尔伯特教授的课程里，又会得到怎样的演绎呢？

[1] 康斯坦丝 • 瑞德著，希尔伯特——数学世界的亚历山大，（中译本，袁向东 李文林译） 上海科学技术出版社，2006 年。

一. 追古溯源

当我们将数学的历史画卷翻到遥远的古希腊时代，我们不由地惊叹古希腊人所提出的三大古典几何作图问题那经久不衰的魅力。这三个问题从提出到最后被证明，走过了 2300 多年的漫漫长路，其中有如此众多的数学家为之梦系魂牵，孜孜以求……[2]

这三个古老而著名的问题说的是：（只用直尺和圆规求出下列问题的解）

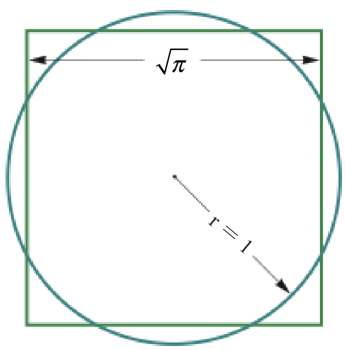
（1）三等分任意角问题：求一角，使其角度是已知角度的三分之一；
（2）化圆为方问题：求一个正方形，使其面积与一已知圆的面积相等；
（3）倍立方问题：求一立方体，使其体积是一已知立方体体积的二倍。

尺规作图的规定来自于古希腊的柏拉图学派。他们相信经由直线和圆可构绘出其他有趣的几何图形。这里的"直尺"没有刻度，只可以画直线的全部或一部分。而通过"圆规"（也没有刻度），我们只可作出圆或者圆的一部分——圆弧。所谓尺规作图，则是通过下面的 5 种步骤的有限回合的重复，实现所预定的几何图形的作图：

- 通过两个已知点，可作一直线。
- 已知圆心和半径，可作一个圆。
- 若两已知直线相交，可确定其交点。
- 若已知直线和一已知圆相交，可确定其交点。
- 若两已知圆相交，可确定其交点。

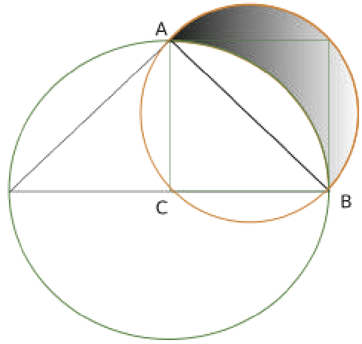
在古希腊三大几何作图问题中，化圆为方是最具魅力的，它很早就出现在数学的历史长河中，在公元前 5 世纪后半叶的雅典就已广为流传。

与这一问题相关的第一人是古希腊数学家阿那克萨戈拉（Anaxagoras）。他是古希腊哲学爱奥尼亚学派的代表人物之一，正是他首先把哲学带到雅典，影响了苏格拉底的思想。在这位科学家的故事传奇里，记载着他为献身科学而放弃财产，因天体学说而身陷囹圄，但他在铁窗里依然醉心于这一问题的研究。"人生的意义在于研究日、月、天"，阿那克萨戈拉曾如是说。



化圆为方问题与阿那克萨戈拉（约公元前 510 – 前 428 年）

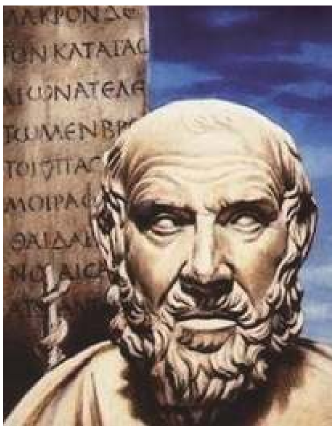
[2] 卡茨著，数学史通论，（中译本，李文林等译），高等教育出版社，2004。



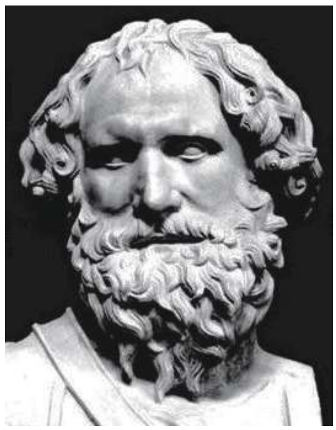
阴影部分弓月形的面积等于直角三角形 ABC 的面积

与阿氏同时代的数学家希波克拉底（Hippocrates of Chios）为此开始了弓月形问题的研究，希望由此实现“化圆为方”。虽然他的这一数学梦想未能成真，却收获了诸多关于弓月形的数学“惊喜”（如左图）。

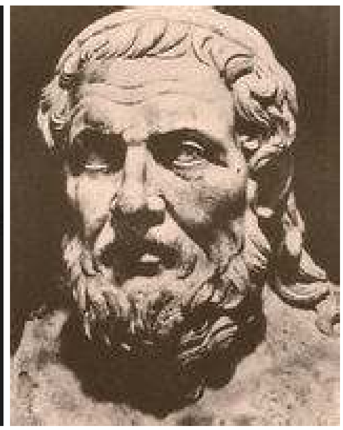
化圆为方的历史之旅，留有众多数学家的足迹。这其中的著名人物有安提丰（Antiphon，苏格拉底时代的数学家），阿基米德（Archimedes），阿波罗尼奥斯（Apollonius）……



希波克拉底（公元前 470 - 前 410 年）



数学之神阿基米德（公元前 287 年 - 公元前 212 年）



阿波罗尼奥斯（约公元前 262- 前 190 年），他的著作《圆锥曲线论》是一大数学经典

在文艺复兴时期，意大利著名艺术大师达•芬奇（Leonardo da Vinci）曾被化圆为方问题所吸引，并获奇妙方法。他以半径为 R 的圆为底，作高为 $R/2$ 的圆柱，然后将圆柱在平面上滚动一周，得一矩形，再将矩形化方，即完成“化圆为方”。当然这并不是希腊人原来表述的化圆为方问题的解。

达•芬奇（1452-1519）《自画像》

詹姆斯•格雷戈里（1638-1675）

在化圆为方的故事之旅上，我们不可不提一个人，苏格兰数学家詹姆斯 • 格雷戈里（James Gregory）。他在 1667 年的一篇论文 *Vera circuli et Hyperbolae Quadratura* 中，尝试用阿基米德的方法来证明化圆为方问题是无解的。尽管他的证明后来被证明是错的，但他的这一努力在数学史上依然意义非凡：正是上面的这一论文第一次开启了借助于圆周率 π 的代数性质来解决化圆为方问题……

二. 代数几何

三大数学难题的魅力并没有随希腊文明的沦亡而消失。古希腊以后，特别是欧洲文艺复兴以来到 20 世纪的四百多年间，数学家对它们的研究从未停止过 [2]。

当历史的鸿篇翻到 17 世纪的欧洲，因为解析几何的发明，尺规作图问题从原来的几何问题被转化成了代数问题。且让我们看看这些问题新的脸谱……

我们知道，经由尺规约束的一切作图，归根到底都取决于下面的三点：

- 求两圆的交点；
- 求一直线与一个圆的交点；
- 求两直线的交点。

直尺和圆规究竟可以走多远呢？

若在平面上设定有一个单位长 1，那么长为 a, b（其中最初的 a, b 为整数）的两条线段，经过有限次的四则运算和开平方，都是可以用直尺和圆规作出的：不妨看一看下面的图。

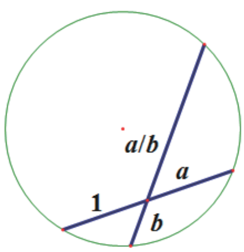


图 2.1

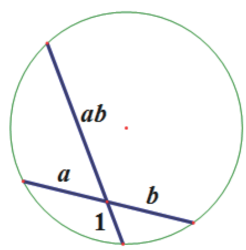


图 2.2

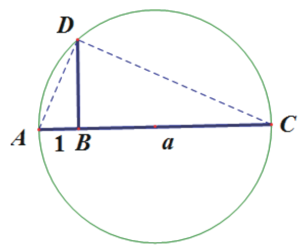


图 2.3

由相交弦定理，上面的图 2.1 和 2.2 告诉我们经由最初的整数开篇，尺规作图在有限回合的四则运算下都是可以的。因而所有的有理数(长度)都可由尺规作出。而图 2.3 则告诉说，形如$\sqrt{a}$（其中 a 是正整数，这是图中的 $BD=\sqrt{a}$）可尺规作出。

注意到在笛卡尔的坐标平面上，直线和圆方程分别可表示为

$$ax + by + c = 0 \text{ 和 } x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0。$$

于是若某线段可以用直尺和圆规作出来，那么这条线段的两端势必是直线与直线、或者直线与圆、或者圆与圆的交点。这即是说，它的坐标由如下的三类方程组来确定：

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad \text{直线与直线的交}$$

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases} \quad \text{直线与圆的交}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ x^2+y^2+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases} \quad \text{圆与圆的交}$$

代数学的相关知识告诉我们：上面这些方程组的解，都可以由系数经过有限次的加减乘除和开平方求得。于是，若最初的这些系数都是有理数的话，我们得到的交点坐标都将是形如$\sqrt{a+b\sqrt{c}}$ 和$\sqrt{d\sqrt{e}+f\sqrt{c}}$ （其中 $a,b,c\in\mathbb{Q}$ ）的数。如此，有限回合的尺规作图后的交点坐标将是这类经过开平方后得到的式子的有限层根式重叠。

于是借助于代数学的力量，尺规作图的问题可转化为：一个线段（或相应的端点）可用尺规作出，则其必定是已知线段的有限层根式重叠。反之，如果一条线段（或者其相应的端点）能表示为已知线段的有限层根式重叠，则其可以经由直尺和圆规作出。

经由现代数学（伽罗瓦理论）的语言，对形如上述的任何一个可用尺规作出的交点，我们可将之对应于一个复数 $z_0 = a + ib$，当我们进而考察其相应的域扩张 $\mathbb{Q}(z_0)$ 的阶数，则有

$$[\mathbb{Q}(Z_0):\mathbb{Q}]=2^m,$$

这即是说，存在一个有理数系数的（次数为 2^m）多项式 $f(z)\in\mathbb{Q}[z]$, 使得 $f(z_0) = 0$。

这样的数被叫作代数数。

回眸处，让我们设想化圆为方问题中最初的圆的半径是单位 1, 那么化圆为方后那一正方形的边长即是$\sqrt{\pi}$。伴随时间的舞步。当德国数学家林德曼（C. F. von Lindemann）在 1882 年成功地证明圆周率 π 不是一个代数数，而是一个超越数的时刻，古希腊三大几何问题之“化圆为方”问题被画上了休止符。经由 2000 多年的等待，人类终于揭开了这一古老问题的谜底：以尺规作图的模式解决化圆为方问题，这是可望而不可即的。

三．星光熠熠

超越数故事的开篇当比 1882 那一年还早上 200 年。

话说“超越的（transcendental）”一词最早出现在德国数学家莱布尼兹 1682 年的一篇论文中，在那篇论文他第一次证明了 sin$x$ 不是 x 的代数函数。而欧拉（L. Euler）则可能是（在现代意义上）给出什么样的数是超越数定义的第一人[3]。

莱布尼兹（1646-1716）

欧拉（1707-1783）

[3] A. J. Kempner. On Transcendental Numbers. Transactions of the American Mathematical Society 17 (4): 476–482.