

种下你的数学， 让她生长

塞德里克·维拉尼 / 文 欧阳顺湘 / 译

译者按：原文来自作者的个人主页（<http://cedricvillani.org/plant-your-math-and-let-it-grow/>），介绍了他与合作者研究最优输运问题，并将其应用于里奇曲率的刻画的研究历程，其中普及了里奇曲率、最优输运等知识，还在文末总结了一些富有启发的研究体会。

几天前，我在东北大学做高木讲座¹。我为此写了一篇综述文章《里奇曲率的综合理论》²。里奇曲率理论是一个在过去多年间蓬勃发展的研究主题。

什么是综合理论呢？我们在中学学习过，有多种方法做平面上的初等几何。平面几何可以用方程与笛卡尔坐标来做（直线由方程 $ax + by + c = 0$ 来描述，圆由 $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ 这样的方程来描述，等等）。但平面几何也可以用古希腊的方式来：使用公理以及三角形、直线等的性质，但不写下任何方程。第一种方法是解析法（可以计算，并使用方程），第二种方法是综合法（使用概念与性质）。两种方法各有千秋，分别有其优点与缺点。一般来说，解析法更加系统，而综合法更加漂亮。用解析法常常能得到更多定量结果，而综合法可以提供更好的理解。认识到平面几何可以有两种等价的方法来处理，是高中生数学教育方面一个重大的概念进步。

¹ 高木讲座是日本以高木贞治（1875-1960）之名命名的讲座，也是日本第一个以日本数学家的名字命名的数学的讲座。高木贞治被誉为日本现代数学第一人。高木讲座自2006年开始。历届演讲可以参考讲座主页 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~toshi/jjm/JJM_HP/contents/jjm-takagi.htm。维拉尼是2015年6月27-28日在东北大学（Tohoku University）举行的第15届高木讲座的三位演讲人之一。

² <http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2015/07/takagi-2.pdf>



高木贞治 (1875-1960)

什么是里奇曲率呢？显然，它是一个有关曲率的概念，也显然是以一位叫里奇的人的名字命名的。确实，格雷戈里奥·里奇-库尔巴斯托罗 (Gregorio Ricci-Curbastro) 是 20 世纪初意大利几位重要的几何学家之一，以他的名字命名的曲率是几个最重要的曲率概念之一。曲率是自高斯与黎曼以来都使用的用来定量刻画一种几何与欧几里得几何差别多大的概念。里奇曲率反映非欧几何中体积的扭曲。它也在爱因斯坦的广义相对论中起作用而最为知名。粗略地说，若你生活在一种里奇曲率为正的几何中，则由于光线偏移（因为光线弯曲而非直射），你所见到的明物总是比真实的要大（指更大的体积）。

里奇曲率是在非欧几何上做研究的概率学者的最爱。在 20 世纪里，它主要被用分析的方法——使用方程——来处理。但从 90 年代以来，专家开始考虑如何用综合方法来理解里奇曲率不等式。同时，与此相应的是，截面曲率的综合处理取得了很大成功。在解决这问题的过程中，有一些美丽的偶遇，以及多年的共同努力。

大约 15 年前，在这个理论开始之初我就参与其中。当时只有几篇文章。现在这个领域已有许许多多的文章，成千上万的页面。然而，写下它是如何开始的，仍然非常有意思。

回到 1998 年，我刚好博士答辩完，去参加一个由我的导师 Yann Brenier 组织的一个关于最优运输的研讨会。这是一个关于将一定量的物质从某个初始位置重组织到另一个位置的理论。研讨会的参与者来自不同方向：统计物理、等周理论、流体力学；但他们都因最优运输这一共同兴趣而来到一起。

最优运输问题最早由蒙日 (Gaspard Monge) 在他 1781 年的一篇著名的文章中提及，这篇文章讨论关于“挖 (déblais)”与“填 (remblais)”——寻求最优的方式来运输与重组织给定分布的一定量的

The Fifteenth Takagi Lectures



Teiji Takagi (1875-1960)

Date : June 27 (Sat) - 28 (Sun), 2015

Place : Lecture Theater (3rd floor), House of Creativity, Tohoku University

Access : http://www.ic.tohoku.ac.jp/about_us/contact_and_access.htmlV.F.R. Jones
(Vanderbilt University)A. Vershik
(St. Petersburg Department of
Steklov Institute of Mathematics)C. Villani
(Université de Lyon
and Institut Henri Poincaré)

◆List of Takagi Lecturers

- 2016 S. Bloch, P.-L. Lions, S. Smale, C. Voisin
- 2017 K.-H. Neeb, D.-V. Voiculescu, M. Yor, J. Makino, P. Malliavin
- 2018 H. Ooguri, O. Viro, J.-P. Bourguignon, E. Ghys, M. Kontsevich, N.A. Nekrasov
- 2019 M. Khovanov, D. McDuff, M. Harris, M. Hopkins, U. Jannsen, C. Khare, J. McKernan
- 2010 A. Connes, S. Gukov
- 2011 S. Brendle, C. Kenig
- 2012 Y. Benoist, A. Naor, P.F. Baum, A. Lubotzky, R. Sciringer
- 2013 L. Lafforgue, S. Popa, H. Oh, G. Tian
- 2014 A. Guionnet, C. Manolescu, P. Scholze, A. Venkatesh



JAPANESE JOURNAL OF MATHEMATICS
Articles based on the Takagi Lectures are to appear in the Japanese Journal of Mathematics (the official journal of Math. Soc. Japan, published by Springer).

Organizing Committee:

Y. Kawahigashi / T. Kobayashi / H. Nakajima / K. Ono / T. Saito
(Univ. of Tokyo) (Univ. of Tokyo / Kavli IPMU) (RIMS, Kyoto) (RIMS, Kyoto) (Univ. of Tokyo)



The Mathematical Society of Japan

Mathematical Institute, Tohoku University

Supported by



Japanese Journal of Mathematics



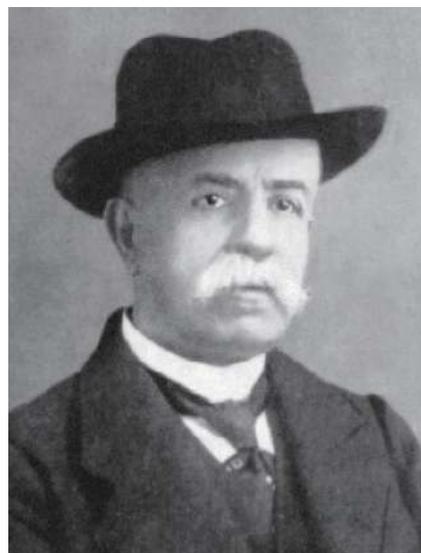
Advanced Institute for Materials Research, Tohoku University

Takagi Lectures Web site:

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/takagi/>

The Fifteenth Takagi Lectures are partially supported by the ICM 90 Kyoto Fund.

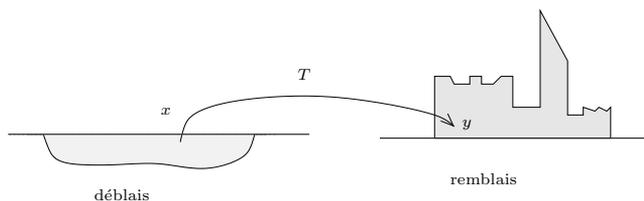
第 15 届高木讲座海报



格雷戈里奥·里奇-库尔巴斯托罗 (1853-1925)



加斯帕·蒙日 (1746-1818)



蒙日的“挖”与“填”（图片来自维拉尼的书《最优运输：旧识与新知》第1版第42页）

物质。蒙日是画法几何与巴黎综合理工学院之父，拿破仑之友，远见卓识的几何分析专家。关于蒙日的更多信息，读者可以参考 Étienne Ghys 的美文³以及有关最优运输的诞生的文章⁴。值得一提的是，运筹学专家说，这也是运筹学中在某种意义上被解决了的最古老问题。

由于蒙日问题的数学性质，可以考虑任何类型物质的运输。在我深爱的书《最优运输：旧识与新知》（*Optimal transport, old and new*）中，作为对我曾经最爱的蒙日面包店（Boulangier de Monge）的敬意（哎，现在不是从前那样了！），我采用了羊角面包。问题如下：假设你有一些散布在巴黎的面包店，每天生产羊角面包，同时又有一些咖啡店，同样散布在各地，每天提供给消费者新鲜羊角面包。面包店的生产量和咖啡店的销售量都是已知的。每次一篮羊角面包从某面包店运到一个咖啡店，根据不同的地理位置，有不同的运输费用。怎样分布面包店和咖啡店以使总运费尽可能最小呢？

这个问题也引发涉及经济利益的问题。例如，假设面包店向咖啡店的收费依赖于运费，则最好的定价方式是什么？俄罗斯数学家和经济学家列昂尼德·康托洛维奇（Leonid Kantorovich），难以分类的小说《红色财富》⁵中英雄人物之一，从这个角度研究了蒙日最小化问题。他实际上梦想设计一种理性价格理论——在他所工作的时代和地方，这无异于一只脚已经踏进了古拉格（前苏联劳改集中营）或刑场。然而，由于康托洛维奇在关键的政府计划中的作用而得以幸存，并在1975年获得诺贝尔经济学奖。

³ <http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge.html>

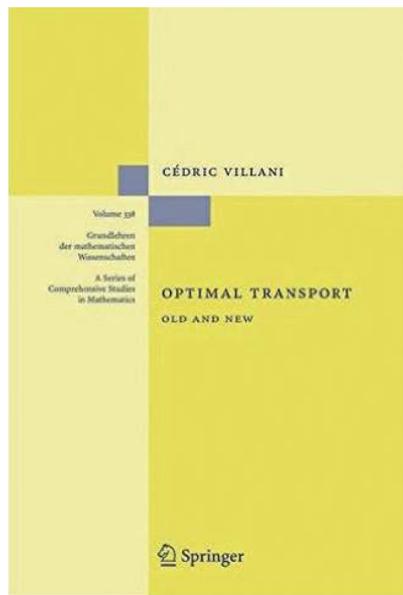
⁴ <http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge,1094.html>

⁵ Red Plenty, 弗朗西斯·斯布福特（Francis Spufford）著，2012年，参考 http://www.redplenty.com/Front_page.html



蒙日面包店

现在，最优问题被称为蒙日 - 康托洛维奇问题，许多人都很熟悉它。被运送的东西可能是物质、气体分子或其他东西。在 1998 年的研讨会上，我报告了 Hiroshi Tanaka 的工作，其中讨论的被运送的物质是某（特定）稀薄气体。Tanaka 在 70 年代证明，如果给定两种气体分布，两者按照某物理模型（确切地说，麦克斯韦分子的空间齐次玻尔兹曼方程）演化，则随着时间的推移，一种分子分布运输到另一种分子分布的总费用总是下降的。我把这个贡献也写入了我的第一本关于最优运输的书的 7.5 节中⁶，也在我关于碰撞动力学理论的综述的 4.2 节中⁷。



《最优运输：旧识与新知》封面

⁶ <http://cedricvillani.org/for-mathematicians/surveys-books#tot>

⁷ <http://cedricvillani.org/for-mathematicians/surveys-books#collisional>