

阿贝尔奖 的小波数学

汤涛

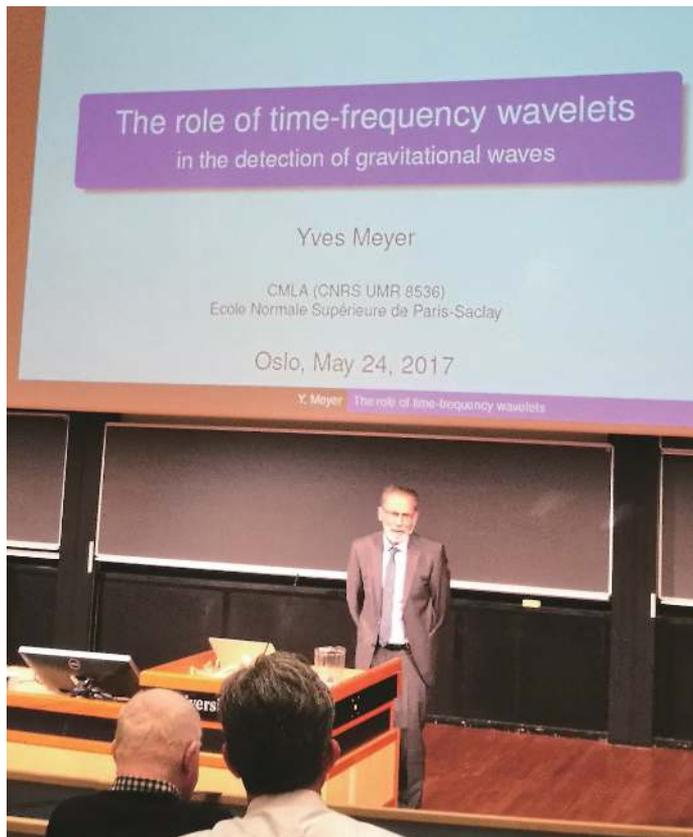


2017年5月23日梅耶尔从挪威国王哈拉尔五世手中接过阿贝尔奖

2001年，为了纪念挪威著名数学家尼尔斯·阿贝尔二百周年诞辰，挪威政府宣布将开始颁发阿贝尔奖(Abel Prize)，奖金数额和诺贝尔奖相若，以此来弥补诺贝尔奖没有数学奖的缺憾。挪威科学与文学院3月21日宣布，将2017年度阿贝尔奖授予法国数学家伊夫·梅耶尔(Yves Meyer)，以表彰他在小波数学理论发展方面发挥的关键作用。颁奖词指出，梅耶尔是小波分析理论现代化发展的“有远见的领导者”；小波分析处于数学、信息技术和计算科学的交叉发展领域，梅耶尔的研究成果使其发展成为一种逻辑连贯、应用广泛的理论。

伊夫·梅耶尔成为近二十五年第四位斩获阿贝尔数学奖的法国数学家，这使得法国的阿贝尔奖数量居于全球第二。令法国这个浪漫民族自豪的还有他们的菲尔兹奖数也为全球第二，仅次于美国，而巴黎高等师范(École Normale Supérieure)是培养出最多菲尔兹奖得主的高校，11位高师毕业生获此殊荣。

小波分析作为一种较新的时频分析方法，是当前应用数学和工程学科中一个迅速发展的新领域，广泛应用于计算调和分析、信号分析、数据压缩、医学成像、数字电影、计算机分类与识别以及地震勘探数据处理等领域。



接受阿贝尔奖后的学术演讲：“时域小波在引力波观测中的作用”

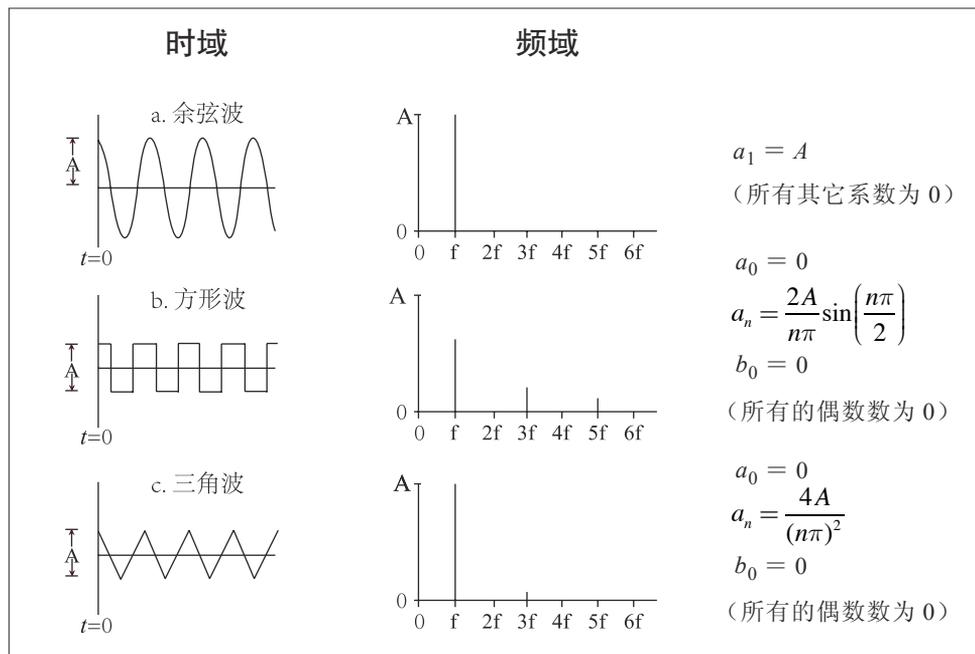
小波研究的历史

傅里叶变换是法国数学家傅里叶贡献给人类的一个伟大礼物，通过将函数（或信号）分解成正余弦函数（数学语言就是把三角函数当做函数空间的基），将时域信号转化为频域信号。具体来说，就是把一个函数 $f(x)$ 表示成下面三角函数的线性组合：

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

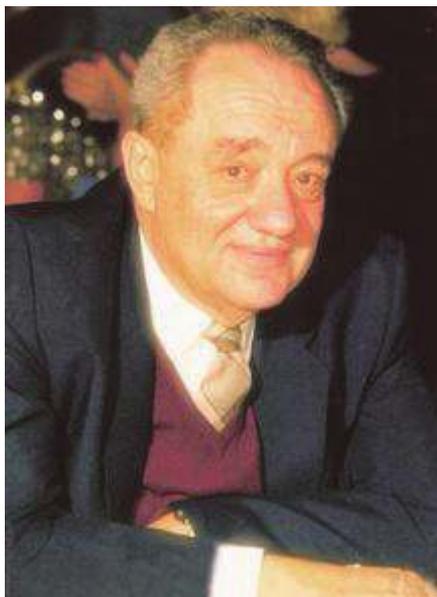
那么给定一个函数，只要计算出这些系数 a_n 和 b_n 就可以知道这个函数的全部信息了。如下图所示，像一个余弦函数，只要储存一个系数就可以了；一个方块函数只要储存一个序列的数就可以了。这样，传输图像就可以变成传送一些数据，接受者拿到数据后，在进行一个所谓的“傅里叶逆变换”就可以得到图像了。这就大大节省了存储空间，由此大幅度提高了信号传送速度。

可惜，傅里叶变换的缺点是只适用于平稳性信号，在频域图上不能获得对应频率的时间信息。小波的提出就是要解决这个困难；它是由从事石油信号处理的法国工程师让·莫莱特（Jean Morlet）于1974年首先提出的，用于收集



时频小波在捕捉引力波中的作用

地震数据。然而石油公司对其研究不屑一顾，批评他说：“如果那是真的，自会有人知道。”尽管没能在工业界得到青睐，莫莱特没有放弃，他于 1984 年和物理学家亚历克斯·格罗斯曼 (Alex Grossmann) 将该研究发表在学术期刊上，他们在文章中首先用到了 *ondelette*，法语的意思就是“小波”，后来在英语里，“*onde*”被改为“*wave*”而成了 *wavelet*。



让·莫莱特 (1931-2007)

莫莱特的基本思想就是：首先把信号置于一个“小窗口”，然后在小窗口里面进行傅里叶展开并求得傅里叶展开系数。换一种说法就是把傅里叶基函数限制到一个小窗口，得到了在小窗口不为零而之外全为零的基函数，称为“窗口基函数”，它一般依赖于两个参数：窗口的位置和不同系数的频率标记。

具体来说，傅里叶变换用到的展开函数（即基函数）是正弦和余弦函数，它们在整个数轴上几乎处处不为零，这种基函数在数学上叫非紧支函数；而紧支 (compact support) 函数在有界区间外函数值恒等于零。小波变换的主要思想是将傅里叶变换的基给换了——将支集无限长的三角函数基换