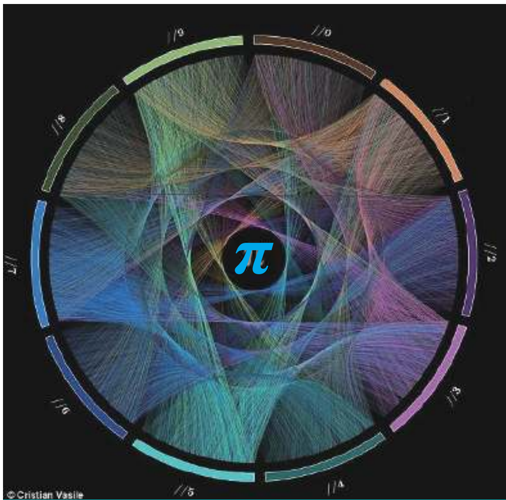


π 日趣谈

万精油

3.14
MARCH 14
PI DAY

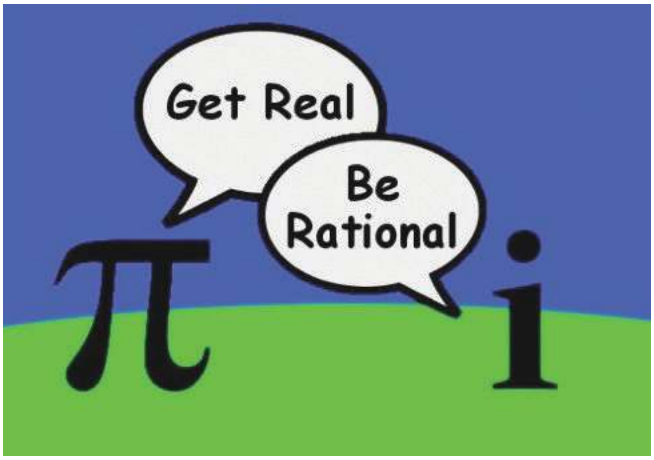
3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078

今天是 π day（3 月 14 号），是 nerd[1] 们的节日。在 nerd 聚集的学校和科技公司每年的 π 日通常都有类似下图那样的庆祝活动。

像 MIT（麻省理工）这样 nerd 云集的地方，学校的录取通知书每年都是 3 月 14 号发。如果是发电子邮件，还要等到 1 点 59 分 26 秒才发出，对应于 π = 3.1415926…，为本来就是喜讯的录取通知书平添一份韵味。

网上的 π 日也很热闹。像微信、微博这些社交媒体通常都转发一些与 π 有关的趣图，这样的趣图很多，我最喜欢的是下面这幅。

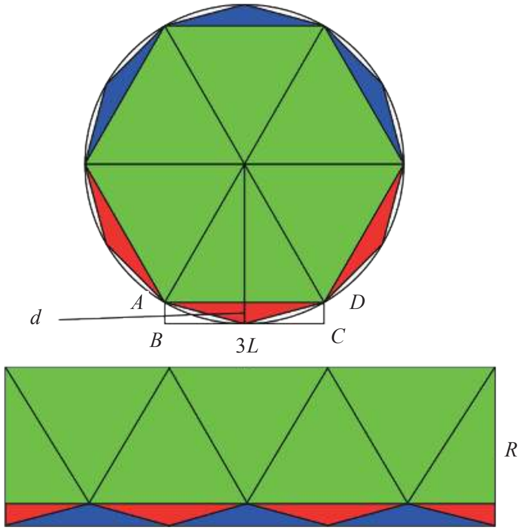
[1] nerd 与汉语中“书呆子”类似，大众心目中的印象是老土、古板。



π 对 i 说，现实一点（i 是虚数，实数在英文里叫 real numbers，real 也做现实讲，所以非实数的虚数就不现实了），i 对 π 说，讲道理一点（π 是无理数，有理数在英文里叫 rational numbers, rational 也做讲道理理解，所以无理数的 π 就不讲道理）。

这种趣图很多，贴不完，我还是来贴点干货，聊聊 π 的计算问题。

对于 π 的计算，中国比西方国家早。祖冲之把 π 算到小数点后 7 位的记录，西方人要到一千多年以后才打破。生在祖冲之的年代，对 π 不是很了解，只知道它的几何性质，圆周率，所以，要算 π 只能用割圆术，就是用正多边形逼近圆，如下图。这样算很辛苦，据说祖冲之算到两万多条边的多边形。



祖冲之把 π 算到小数点后 7 位所用的方法叫割圆术。割圆术简单说起来就是从 n 边形的边长求 $2n$ 边形的边长。n 足够大时，边长等于 2π。用现在的程序来算，比如 MATLAB，就是下面这两行迭代。

x = 1/4; for i = 1:12, x = (1 − sqrt(1 − x))/2; end,

pi = 2^12*6*sqrt(x)

上面的代码是从六边形开始，加倍 12 次后精确 π 到小数点后第 7 位。通常说祖冲之算到 24576 边形，这个 24576 就是 $2^{12}\times 6$.

这个割圆术不是祖冲之发明的，而是三国时代的数学家刘徽发明的。这样说起来，比祖冲之又早了好几百年。祖冲之真正的贡献是密率，他说 π 接近于 355/113（= 3.1415929…），相当接近啊。华罗庚说祖冲之能搞出密率说明他懂连分数。这点很不容易，所以有外国数学家提出把这个密率叫祖率。顺便说一句，除了密率外，还有一个叫约率，$\pi = 22/7$（= 3.14），与我们把 3 月 14 号叫 π 日很符合。还有人因为这个约率，把 7 月 22 日叫近 π 日。

后来人们知道一些 π 的数字性质后，算起来就相对容易一点。基本都是用级数公式算。比如下面的级数公式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

其实，上面的第一个公式还是 π 的几何性质，用微积分证明这个公式要用到三角函数。记得我读大学时第一次证明这个公式的时候惊讶了半天，想不到一个纯粹的几何量（圆周率）会用一串数字表达出来。后来学的多一点，发现上面那些公式实际上有通项公式，用黎曼 ζ 函数表示

$$\zeta(2n)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}=\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\cdots(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!},$$

其中 B_{2n} 是所谓的伯努利数。

这就开始与数论有关了。用级数算 π 的公式数不胜数，下面是一些与奇数指数有关的一类。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^1=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^2=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^3=\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^4=\frac{1}{1^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\right)^5=\frac{1}{1^5}-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\cdots=\frac{5\pi^5}{1536}$$

一个值得特别提一下的是欧拉公式。我们都知道，调和级数发散，但如果在调和级数中改一些加号为减号，就可以收敛到 π。至于改哪些项，这就与那个数的整数分解有关了，纯数论的东西。